

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебно-методическому  
Комплексу \_\_\_\_\_ С.А. Упоров

**МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ**

**Б1.В.01.02 ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЕ ПРЕДПРИЯТИЙ**

Направление подготовки

***13.03.02 Электроэнергетика и электротехника***

Направленность (профиль)

***Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий***

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Стариков В. С. канд. техн. наук, доцент

Одобрена на заседании кафедры

Электрификации горных предприятий

(название кафедры)

Зав. кафедрой

(подпись)

Садовников М. Е.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 28.09.2021

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией  
факультета

Горно-механический

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П. А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	2
2. Тематический план дисциплины.....	4
3. Указания по выполнению расчетно-графической работы.....	5
4. Вопросы к экзамену по дисциплине.....	15
5. Рекомендуемая литература.....	16
5.1. Основная литература.....	16
5.2. Дополнительная литература.....	16
Приложение. Исходные данные для расчетно-практической работы.....	18

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Приобретение знаний, умений и навыков, необходимых студенту для осуществления практической деятельности, связанной с применением, выбором и эксплуатацией современных схем электроснабжения горных предприятий, комплектных распределительных устройств напряжением выше 1000 В, основной коммутационной аппаратуры, устройств релейной защиты и сетевой автоматики, а также элементов электрических сетей, таких, как силовые трансформаторы, линии электропередачи и др.

Изучение дисциплины решает задачу подготовки студентов к завершающему этапу обучения - дипломному проектированию, где один из разделов проекта «Внешнее электроснабжение» целиком базируется на знаниях, полученных в процессе изучения дисциплины.

Методические указания по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

– подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;

- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;
- написание рефератов, докладов, эссе;
- подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;
- выполнение письменных контрольных и курсовых работ;
- подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;
- подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;
- другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчетно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

#### **Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4.1), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 2. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

### 5.1 Тематический план изучения дисциплины

Для студентов очной формы обучения:

№	Тема, раздел	Контактная работа обучающихся с преподавателем			Практическая подготовка	Самостоятельная работа
		лекции	практич. занятия и др. формы	лаборат. занятия		
1.	Общие сведения о системах электроснабжения.	4	2	-	-	7
2.	Электроприемники и электрические нагрузки.	6	4	-	-	8
3.	Электрические сети систем внешнего электроснабжения.	6	4	4	-	12
4.	Переходные процессы в системах электроснабжения.	8	4	4	-	10
5.	Подстанции и распределительные устройства.	2	-	4	-	6
6.	Режимы работы систем электроснабжения.	2	2	-	-	6
7.	Заземление и защитные меры электробезопасности	4	-	4	-	4
8.	Подготовка к экзамену	-	-	-	-	27
9.	<b>ИТОГО</b>	<b>32</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>-</b>	<b>80</b>

### Для студентов заочной формы обучения:

№	Тема, раздел	Контактная работа обучающихся с преподавателем			Практическая подготовка	Самостоятельная работа
		лекции	практич. занятия и др. формы	лаборат. занятия		
1.	Общие сведения о системах электроснабжения.	1	2		-	12
2.	Электроприемники и электрические нагрузки.	2	1		-	18
3.	Электрические сети систем внешнего электроснабжения.	2	1		-	24
4.	Переходные процессы в системах электроснабжения.	2	1		-	26
5.	Подстанции и распределительные устройства.		1		-	14
6.	Режимы работы систем электроснабжения.		2		-	13
7.	Заземление и защитные меры электробезопасности	1				12
8.	Подготовка к экзамену					9
9.	<b>ИТОГО</b>	<b>8</b>	<b>8</b>		-	<b>128</b>

### 3. УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Целью выполнения работы является закрепление теоретических положений дисциплины и формирование практических навыков и приемов проектирования систем электроснабжения предприятий.

Работа выполняется по заданию, которое выдается студенту или группе студентов. Работа выполняется во время практических занятий (8 часов) и самостоятельной работы студентов (ориентировочная трудоемкость 16 часов). Исходные данные принимаются каждым студентом самостоятельно в соответствии с вариантом, который определяется по списочному составу академической группы. В случае затруднения в определении номера варианта студенту следует обратиться за пояснениями к ведущему преподавателю. Варианты с исходными данными заданий приведены в виде отдельного файла в папке «Практика».

В расчетной работе необходимо выполнить следующее:

- проанализировать состав электроприемников (ЭП) предприятия и определить для каждой группы ЭП категорию по надежности и бесперебойности их электроснабжения, используя требования Правил устройства электроустановок (ПУЭ);

- обосновать и составить структурную схему внешнего электроснабжения предприятия (требуемое количество источников питания; количество питающих ЛЭП; способ резервирования питания; потребность в использовании автоматического включения резерва (АВР); количество силовых трансформаторов на главной понизительной подстанции (ГПП)

предприятия; потребность в секционировании сборных шин закрытого распределительного устройства (ЗРУ) на 6 кВ на ГПП и т.п.).

Здесь же необходимо распределить электроприемники предприятия по секциям шин ЗРУ-6 для нормального режима, соблюдая требования ПУЭ к электроснабжению различных категорий ЭП и стараясь обеспечить по возможности одинаковость нагрузки по секциям шин 6 кВ ГПП. **Предлагаемую структурную схему необходимо согласовать с ведущим преподавателем;**

- определить по справочной или нормативной литературе для каждой группы ЭП значения расчетных коэффициентов: коэффициент спроса  $K_c$  и расчетный коэффициент мощности  $\cos \varphi_p$ .

Для синхронных двигателей, которые как правило работают с опережающим коэффициентом мощности значение принимают  $\cos \varphi_p = 0,9$  (оп), что предписано Нормами технологического проектирования (НТП) электроснабжения предприятий, если номинальное значение коэффициента мощности не известно.

Для электроприемников участковых подстанций КТП-6/0,4 кВ принимаем усредненные значения коэффициентов загрузки  $K_z = 0,7$  (для двухтрансформаторных КТП) и расчетный  $\cos \varphi_p = 0,7 \dots 0,8$ .

- выполнить расчет электрических нагрузок по секциям шин ГПП и в целом по ГПП;
- выбрать (при необходимости) средства компенсации реактивной мощности;
- произвести выбор силовых трансформаторов ГПП по электрическим нагрузкам и на основании технико-экономического сравнения ближайших вариантов;
- выполнить расчет питающих ЛЭП и всех отходящих от шин ЗРУ-6 кВ ЛЭП (в том числе и кабельные вставки для отходящих воздушных ЛЭП);
- выполнить расчет токов короткого замыкания на шинах ЗРУ-6 кВ ГПП; выбрать средства ограничения токов к.з.

Работа выполняется в виде пояснительной записки с необходимыми расчетами, пояснениями и обоснованиями. Дублировать однотипные расчеты не надо. Для однотипных расчетов следует привести подробные выкладки по одному характерному примеру, а по другим примерам привести в табличной форме только результаты расчетов. Записка ориентировочным объемом 15-20 страниц выполняется на бумаге формата А4 рукописным или печатным образом.

При выполнении расчетной работы студенты могут руководствоваться лекционным материалом, учебной и справочной литературой, указанной в рабочей программе дисциплины (РПД) и Интернет-изданиями.

### 3.1. Методические указания по расчету электрических нагрузок.

В соответствии с полученным вариантом задания на расчетную работу следует исходные данные извлечь из общего массива и привести их в более удобном для практического использования виде – в виде таблицы «Исходные данные по электроприемникам предприятия» Пример таблицы с исходными данными приведен ниже.

#### Исходные данные по электроприемникам предприятия

Таблица 1

Наименование потребителя или электроприемника (ЭП)	Кол-во в	Тип ЭП	Номин.единичная мощность ЭП,	Линия от ЗРУ до ЭП
--	----------	--------	------------------------------	--------------------

	работе		кВт/кВ А*	Тип линии	Длина линии, м
Компрессоры	2	СД	320	КЛ	100
Центральная подземная подстанция (включая главный водоотлив)	2	АД	2x1250	КЛ	800
Электроприемники промплощадки (КТП-6/0,4 кВ)	1	ТМ	2x1000*	КЛ	400
Электроприемники отопительной котельной (КТП-6/0,4 кВ)	1	ТМ	2x630*	КЛ	1600
ЛЭП «Карьер» (экскаваторы, буровые станки)	3	СД	1500	ВЛ	2000

Дополнительные сведения:

- напряжение питающих ЛЭП – 110 кВ;
- протяженность питающих ЛЭП (от РПС до ГПП) – 25 км;
- мощность короткого замыкания на шинах РПС – 1500 МВ А;
- допустимый ток короткого замыкания на шинах ЦПП – 5 кА;
- рассмотреть РЗ и А фидера «Карьер».

Обозначения в таблице: СД – синхронный двигатель; АД – асинхронный двигатель; ТМ – трехфазный силовой трансформатор с масляным охлаждением; КЛ – кабельная линия; ВЛ – воздушная линия.

Электроприемники (ЭП) предприятия необходимо проанализировать с точки зрения последствий от перерывов электроснабжения и определить категории, к которым относятся те или иные ЭП. Категории ЭП приведены в Правилах устройства электроустановок (ПУЭ). В зависимости от категории необходимо обосновать необходимое количество источников питания для ЭП предприятия, способ резервирования источников питания и питающих ЛЭП (допускается без резерва, допустимо явное резервирование, требуется применить неявное резервирование); конструктивное исполнение питающих ЛЭП (воздушная ЛЭП или кабельная; одноцепные ЛЭП или двухцепные); необходимый способ включения резервного питания (обязательно АВР или допускается без него) и др. На основании такого анализа составляется структурная схема внешнего электроснабжения предприятия.

Кроме того, при составлении структурной схемы необходимо электроприемники предприятия распределить по узлам электрических нагрузок, соблюдая требования ПУЭ по резервированию питания. При этом нагрузку по секциям шин подстанций следует распределить по возможности равномерно; синхронные двигатели также распределить по узлам нагрузок во избежание значительного перекаса по реактивной мощности; электроприемники, работающие на один технологический процесс, запитать желательнее от разных источников. Необходимо помнить, что в расчете электрических нагрузок учитываются только электроприемники, которые могут находиться в одновременной работе. Резервные электроприемники, находящиеся в ремонте, в расчете нагрузок не учитываются.

Расчет электрических нагрузок является основой для выбора мощности трансформатора ГПП, для выбора компенсирующих устройств, для выбора сечения проводников ЛЭП и решения других задач.

Для расчета электрических нагрузок систем внешнего электроснабжения горных предприятий наиболее широко используют метод коэффициентов спроса и установленной мощности электроприемников [1,2]. Установленную мощность электроприемников определяют по их паспортным данным и в зависимости от продолжительности рабочего режима.

Коэффициенты спроса принимают по справочной и нормативной литературе [6, 9]. Кроме того, в этих источниках приводятся расчетные значения коэффициентов мощности. Для расчета электрических нагрузок необходимо электроприемники предприятия разделить на отдельные группы однородных по режиму работы электроприемников (насосы, вентиляторы, экскаваторы, подъемные установки, компрессоры и т.д.).

Для удобства результаты расчетов представляют в виде таблицы – **Формуляра электрических нагрузок**.

При составлении формуляра электрических нагрузок все потребители электроэнергии независимо от их напряжения следует сгруппировать по отдельным узлам электрических нагрузок (секциям шин ГПП, секциям шин распределительных пунктов РП, отдельным крупным фидерам и т. д.). Это в дальнейшем облегчит расчет электрических сетей предприятия.

В графе 2 формуляра указываются потребители электроэнергии (экскаваторы, буровые станки, установки освещения, конвейеры, водоотливные установки и пр.), подключаемые по проекту к конкретному узлу системы электроснабжения.

Для потребителей электроэнергии напряжением 6(10) кВ необходимо в графе 2 дополнительно указать наименование электроприемников на это напряжение (для экскаваторов это сетевые двигатели и трансформаторы собственных нужд ТСН).

В графе 3 формуляра указывается количество электроприемников (двигателей, трансформаторов, ламп и т. п.), установленных на соответствующих потребителях.

В графах 4 и 5 указываются установленная (номинальная) мощность одного электроприемника и общая установленная мощность группы однородных по режиму работы электроприемников. Эти данные по электроприемникам берутся из их технических данных и справочной литературы.

В графах 6 и 7 указываются коэффициенты спроса  $K_c$  и расчетные коэффициенты мощности  $\cos \varphi_p$  для потребителей электроэнергии, принятые по справочной литературе. При заполнении формуляра следует учитывать, что синхронные двигатели, как правило, работают с опережающим коэффициентом мощности  $\cos \varphi_p$  (оп).

В графе 7 также приводятся значения  $\operatorname{tg} \varphi_p$ , соответствующие расчетным коэффициентам мощности  $\cos \varphi_p$ .

При работе электроприемника с опережающим коэффициентом мощности  $\cos \varphi_p$  (оп) значения функции  $\operatorname{tg} \varphi_p$  заносятся в формуляр со знаком « $\leftarrow$ » – минус.

Расчетные значения активной, реактивной и полной мощности групп электроприемников заносятся, соответственно, в графы 8, 9 и 10.



Для узла электрических нагрузок алгебраическим суммированием (т. е. с учетом знаков) определяют:

- сумму расчетных максимумов активной нагрузки  $\Sigma P_m$ ;
- сумму расчетных максимумов реактивной нагрузки  $\Sigma Q_m$

При этом следует иметь в виду, что итоговое значение  $\Sigma Q_m$  в целом по узлу нагрузок должно быть положительным и минимально возможным для конкретных условий. Если при первоначальных прикидочных расчетах окажется, что  $\Sigma Q_m$  при работе синхронных двигателей с опережающим коэффициентом мощности  $\cos \varphi_p$  (оп) окажется отрицательной, то следует перевести синхронные двигатели на работу с более высоким коэффициентом мощности (вплоть до 1) и внести соответствующие изменения в формуляр электрических нагрузок.

Пример выполнения расчета электрических нагрузок по **Исходным данным** (смотри таблицу выше) приведен в сканированных файлах, приведенных в папке «Б1.Б.20 Электроснабжение предприятий. Практика. Расчет электрических нагрузок».

### **3.2. Методические указания по выбору мощности трансформаторов ГПП**

Практически на всех горных предприятиях имеются электроприемники I и II категорий. При этом электрические нагрузки от электроприемников I категории обычно незначительны, а основная нагрузка создается электроприемниками II и частично III категорий. Необходимость выполнения требований ПУЭ в части обеспечения надежности электроснабжения электроприемников I и II категорий приводит к проектированию резервированных схем электроснабжения, более сложных и дорогих по сравнению с нерезервированными. При этом предпочтение из экономических соображений обычно отдается схемам неявного резервирования, в которых используется допустимая перегрузочная способность элементов сети.

В соответствии с руководящими указаниями по проектированию электроснабжения и нормами технологического проектирования систем электроснабжения при решении схемных вопросов следует отдавать предпочтение подстанциям глубокого ввода (ПГВ) с максимально возможным приближением напряжения 35 – 220 кВ к потребителям и с наименьшим числом ступеней трансформации. Выполнение этого требования позволяет снизить потери электрической энергии в распределительных сетях, уменьшить их стоимость и упростить задачу прокладки этих сетей в условиях насыщенности промплощадки другими инженерными коммуникациями. Кроме того, горные предприятия, как правило, находятся на значительном удалении (не менее 20 – 50 км) от сетей энергосистем и районных подстанций. Поэтому для передачи электрической энергии, как правило, используются магистральные воздушные ЛЭП напряжением 35 – 110 кВ (иногда 220 кВ).

Для приема, преобразования и распределения электрической энергии на территории предприятия сооружается одна или несколько главных понижающих подстанций (ГПП). Питание ГПП (или ПГВ) от сетей энергосистемы должно выполняться не менее чем по двум линиям, подключенным к независимым и взаиморезервируемым источникам питания.

Распределительные сети на горных предприятиях выполняются, как правило, на напряжение 6 кВ, так как в России за долгие годы выпущено и эксплуатируется значительное количество мощных горных машин, дробилок, мельниц, подъемных установок, вентиляторов главного проветривания и других электроустановок на это напряжение.

Для повышения надежности электроснабжения главные понижающие подстанции ГПП выполняются, как правило, двухтрансформаторными с трансформаторами одинаковой мощности, что необходимо для обеспечения однотипности применяемого на ГПП электрооборудования. Более двух трансформаторов на ГПП предусматривают в случаях использования на предприятии электроприемников с резкопеременной нагрузкой (электрифицированный ж.д. транспорт, дуговые сталеплавильные печи, дуговая электросварка и т.п.). Силовые трансформаторы размещаются, как правило, на территории открытого распределительного устройства (ОРУ) напряжением 35-110 кВ. В нормальном режиме оба трансформатора работают отдельно на разные секции шин закрытого распределительного устройства ЗРУ-6 кВ. В электротехническом помещении ЗРУ-6 кВ устраивается секционированная система шин, состоящая из двух секций, между которыми предусмотрен секционный выключатель (СВ). В нормальном режиме работы СВ отключен и секции шин ЗРУ-6 кВ работают отдельно. Таким образом электроприемники предприятия получают питание по двум вводам и от разных источников. При повреждении электророборудования одного ввода поврежденный ввод отключают с обеих сторон, после чего СВ включают (автоматически при наличии электроприемников I категории или вручную) и электроснабжение электроприемников предприятия будет выполняться от одного исправного ввода. Этот режим работы системы электроснабжения называется послеаварийным.

В послеаварийном режиме оставшийся в работе трансформатор должен обеспечить бесперебойную работу электроприемников I и II категории и взять не менее 75...80 % расчетной нагрузки. Кроме того, мощность трансформаторов выбирают с учетом их допустимой перегрузочной способности (см. лекцию №7).

При эксплуатации трансформатора, кроме относительно длительных послеаварийных перегрузок допускается кратковременные перегрузки. Эти аварийные перегрузки не зависят от предшествующего режима работы, являются кратковременными и используются для прохождения максимума нагрузки. Для трансформаторов с масляным охлаждением (со всеми его видами: М, Д, Ц, ДЦ) аварийные перегрузки составляют не более 30% продолжительностью не более 120 минут.

При выборе мощности трансформаторов намечают, как правило, два варианта трансформаторов с разной мощностью, которые в дальнейшем сравнивают с помощью технико-экономических расчетов.

### **3.3. Методические указания по расчету электрических сетей**

В соответствии с заданием на расчетную работу студентам необходимо выполнить электрические расчеты линий электропередач (ЛЭП) напряжением выше 1000 В. В выполняемых заданиях к таким линиям относятся:

- питающие ЛЭП напряжением 35 или 110 кВ (в зависимости от варианта расчетной работы);

- распределительные (отходящие) кабельные и воздушные ЛЭП напряжением 6 кВ;
- кабельные вставки напряжением 6 кВ, с помощью которых осуществляется передача электрической энергии от ячеек ЗРУ подстанции (ГПП) на отходящие воздушные ЛЭП напряжением 6 кВ.

Электрические расчеты ЛЭП производятся с целью определения сечений проводников линий по условиям воздействия токовой нагрузки в нормальных, аварийных и послеаварийных режимах. Кроме того, при выборе сечений проводников ЛЭП должны учитываться требования ПУЭ и ГОСТ в части качества передаваемой электрической энергии и экономические показатели электроснабжения. Методы электрических расчетов и требования нормативных документов к проводникам различных ЛЭП рассмотрены в материалах лекций №8...№10 курса «Основы электроснабжения горных предприятий».

Последовательность выполнения расчетов обычно следующая:

- Формирование нормальных и послеаварийных токовых нагрузок по каждой линии (на основе расчета электрических нагрузок);
- определение типа электрической связи (воздушная линия, кабельная линия, магистральный шинопровод);
- выбор экономических сечений проводников (ПУЭ, глава 1.3) для нормального режима работы;
- проверка проводника выбранного сечения по допустимой токовой нагрузке нормального и послеаварийного режимов (ПУЭ, глава 1.3);
- ориентировочная проверка проводов воздушных линий электропередачи по механической прочности (ПУЭ, глава 2.5 и табл. 2.5.5);
- проверка проводов воздушных ЛЭП напряжением более 35 кВ по условиям коронобразования и радиопомех (ПУЭ, глава 1.3, глава 2.5 и табл. 2.5.6)
- проверка жил выбранных кабелей на термическую стойкость к токам короткого замыкания;
- проверка проводников воздушных и кабельных линий по потере напряжения;
- проверка магистральных шинопроводов на электродинамическую стойкость.

Выбранный провод (сечение жилы кабеля, тип шинопровода) должны удовлетворять наиболее жесткому из указанных условий, любое из которых может оказаться определяющим.

Питающие линии напряжением 35 – 110 кВ предназначены для передачи электрической энергии от источников питания (одна или несколько районных подстанций – РПС) до главной понижающей подстанции предприятия (ГПП). Как правило, питающие ЛЭП на 35-110 кВ выполняются двумя воздушными линиями на одноцепных или двухцепных опорах. В соответствии с НТП ЭПП-94 для предприятий, на которых преобладают электроприемники I категории, питающие линии следует выполнять на одноцепных опорах, проложенных по разным трассам. Для предприятий с преобладанием электроприемников II и III категорий питающие линии могут быть выполнены на двухцепных опорах, что при питании от разных секций шин одной РПС является более рациональным. Следует напомнить, что использование двухцепных ЛЭП напряжением 35 кВ и выше отражается на выборе сечения

проводов ВЛ по условиям механической прочности и требует применения проводов сечением не менее 120 мм<sup>2</sup>.

Сечение проводов стационарных воздушных ЛЭП напряжением 6(10) кВ выбирается и проверяется по всем условиям, применяемым для воздушных ЛЭП напряжением 35-110 кВ, за исключением проверки по условиям коронобразования и радио помех. Дополнительно к этому провода временных и передвижных ВЛ напряжением 6(10) кВ (к таким относятся внутрикарьерные распределительные сети и ЛЭП «Карьер») не проверяют по экономической плотности тока, так как основной статьёй расходов по таким ВЛ являются эксплуатационные расходы, связанные с частыми работами по монтажу – демонтажу и переносу таких линий.

По этим же причинам гибкие кабели самоходных горных машин (карьерных экскаваторов, буровых станков) так же не проверяют по экономическим критериям. Электрические расчеты по выбору сечения токоведущих жил бронированных и небронированных кабелей (**в том числе кабельных вставок**) напряжением выше 1000 В, предназначенных для стационарной прокладки, выполняют, как правило, в следующей последовательности:

- выбор сечения жил кабеля по экономической плотности тока;
- проверка жил выбранного кабеля по длительно допустимому току нормального и послеаварийного режимов;
- расчет кабельной линии на термическую стойкость к токам короткого замыкания;
- проверка кабельной линии по потере напряжения.

Марка кабеля выбирается в зависимости от условий эксплуатации и способа прокладки кабельной линии (табл.1).

Таблица 2

Рекомендуемые для применения марки кабелей

Способ прокладки	Марки кабелей	
	При отсутствии растягивающих усилий, механических воздействий	При наличии растягивающих усилий, механических воздействий
В траншее (в земле)	ААШВ, ААБ, АСБ	ААП, АСП
В кабельных каналах, тоннелях (сырые помещения)	ААШВ, ААГ, АСГ	ААБлГ, АСБлГ
В пожароопасных помещениях, по кабельным конструкциям	ААШВ, ААГ, АСГ	ААПГ, АСПГ, ЦСПн, ЦСКн ЦАСПн, ЦАСКн
При крутонаклонной и вертикальной прокладке	ЦСПн, ЦСКн, ЭВТ ЦАСПн, ЦАСКн	ЦСПн, ЦСКн, ЭВТ ЦАСПн, ЦАСКн
Во взрывоопасных зонах	СБГ, СБШВ	СПГ

Кабели любой конструкции даже самого малого сечения, выпускаемые отечественными производителями, являются механически прочными при горизонтальной или слабонаклонной (до 45 градусов) прокладке. Для вертикальной или крутонаклонной (более 45 градусов) прокладке в стволах необходимо использовать бронированные кабели конструкции, которых должны удовлетворять следующим требованиям:

- кабели должны иметь прочную броню, предохраняющую изоляцию и токоведущие жилы от механических повреждений и растягивающих усилий: для этой цели применяется броня, выполненная из стальных круглых или плоских оцинкованных проволок, так называемая несущая броня;

- кабели должны быть устойчивы против сырости, окисления и разъедания: для этого предназначена герметизирующая оболочка (свинцовая, алюминиевая или поливинилхлоридная);

- в кабеле не должно создаваться гидростатических давлений вследствие стекания изоляционной пропиточной массы на основе церезина или жилы кабеля должны иметь пластмассовую изоляцию (кабели типа ЭВТ);

- конструкция кабеля должна быть устойчива против вибраций.

Этим требованиям соответствуют кабели марок ЦСПн или ЦСКн, которые имеют медные жилы с бумажной изоляцией, пропитанной нестекающей массой на основе церезина, свинцовую оболочку, бронированные плоскими или круглыми стальными оцинкованными проволоками с негорючим наружным покровом. Эти кабели допускаются к применению в пожароопасных помещениях, в шахтах при значительных растягивающих усилиях, на вертикальных и крутонаклонных трассах, без ограничения разности уровней прокладки. Кабели с алюминиевыми жилами типа ЦАСКн и ЦАСПн предназначены для прокладки в тех же условиях, что и кабели типа ЦСКн и ЦСПн за исключением прокладки в стволах угольных шахт.

В соответствии с ВНТП 13-2-93 (ведомственные нормы технологического проектирования) для рудников цветной металлургии «питание центральных подземных подстанций напряжением 6 и 10 кВ предусматривать не менее чем по двум кабельным фидерам: при выходе из строя одного из них оставшийся в работе должен обеспечить 100%-ную нагрузку потребителей I и II категорий» (п.7.3.3). Там же в п. 7.3.4 «питание подстанций насосных главного водоотлива осуществлять по самостоятельным линиям от поверхностных подстанций. При этом каждая линия должна быть рассчитана на 100%-ную нагрузку.

При расчете электрических нагрузок на подстанциях насосных водоотлива следует учитывать все насосные агрегаты (рабочие и резервные)».

«Минимальное сечение питающих кабелей, прокладываемых по вертикальному стволу, необходимо принимать  $35\text{мм}^2$ , максимальное – не более  $185\text{мм}^2$ » (п.7.3.5).

### **3.4. Методические указания по расчетам токов короткого замыкания в сетях напряжением выше 1000 В.**

Для расчета токов короткого замыкания составляют расчетную схему. Расчетная схема составляется на основе анализа схемы электроснабжения предприятия в зависимости от целей расчета и представляет собой однолинейную электрическую схему. На расчетной схеме указывают все источники питания точки КЗ (генераторы энергосистемы), силовые трансформаторы и автотрансформаторы, воздушные и кабельные линии электропередачи, токоограничивающие реакторы, синхронные компенсаторы, мощные синхронные и асинхронные электродвигатели, а также основные параметры перечисленных элементов. Ком-

мутационные аппараты на расчетной схеме не приводятся. Резервные элементы указываются в том случае, если в нормальном режиме допустима их параллельная работа с основными.

При расчете начального действующего значения периодической составляющей тока трехфазного короткого замыкания в электроустановках выше 1000 В в исходную расчетную схему должны быть введены все синхронные генераторы и компенсаторы, а также синхронные и асинхронные электродвигатели мощностью 100 кВт и более, если между электродвигателем и точкой КЗ отсутствуют токоограничивающие реакторы или силовые трансформаторы.

Расчетная схема составляется с учетом назначения расчетов:

- для выбора и проверки электрооборудования расчетная схема должна соответствовать максимально возможным токам КЗ;

- для настройки и оценки чувствительности релейных токовых защит расчетная схема должна соответствовать минимально возможным токам КЗ.

В связи с этим при схеме внешнего электроснабжения, построенной по принципу неявного резерва, максимально возможный ток КЗ на шинах ЗРУ-6(10) кВ будет при питании обеих секций шин через включенный секционный выключатель от одного силового трансформатора (т. е. в послеаварийном режиме). В этом случае в точку КЗ будут поступать токи от энергосистемы и от всех электродвигателей напряжением выше 1000 В.

Минимально возможный ток КЗ за силовым трансформатором будет иметь место на шинах ЗРУ-6(10) кВ при нормальной схеме и без учета токов подпитки от электродвигателей.

На расчетной схеме указываются расчетные точки, в которых требуется определить токи короткого замыкания. В выполняемом расчетном задании необходимо определить токи КЗ в 2 – 3 точках. Точка К1 расположена на стороне ВН перед силовым трансформатором ГПП. Знание токов КЗ в точке К1 необходимо для проверки электрооборудования ОРУ ГПП на устойчивость к токам короткого замыкания. Точка К2 расположена на шинах ЗРУ-6 кВ ГПП. Токи КЗ в этой точке необходимы для проверки электрооборудования ЗРУ-6 кВ и проверки отходящих кабелей на термическую стойкость. В некоторых вариантах заданий имеются ограничения по токам короткого замыкания в точке КЗ, которая находится на шинах ЦПП или шинах дренажной шахты. Могут потребоваться расчеты токов КЗ и в других точках для выбора уставок и проверки чувствительности токовых защит отдельных электроустановок или присоединений.

По расчетной схеме составляют схему замещения, в которой трансформаторные связи заменяют электрическими. Элементы системы электроснабжения вводят в схему замещения как сопротивления, а источники энергии как сопротивления и ЭДС (электродвижущие силы).

В сетях напряжением выше 1000 В при расчете токов КЗ наиболее широко используют параметры цепей в относительных базисных единицах. При расчете тока КЗ в относительных базисных единицах упрощаются вычисления. Кроме того, этот метод позволяет учитывать типовые характеристики источников питания и электрических дви-

гателей. Для перевода параметров схемы замещения СЭС и показателей режима в относительные единицы (о.е.) устанавливаются базовые значения мощности  $S_6$ , напряжения  $U_6$ , тока  $I_6$  и сопротивлений  $Z_6$ . Из четырех базовых величин две являются независимыми (могут выбираться произвольно), две другие определяются из известных соотношений.

За базисную мощность  $S_6$  обычно принимают 100 МВ·А, 1000 МВ·А или номинальную мощность какого-либо элемента системы, если она повторяется в расчетах несколько раз, или суммарную рабочую мощность энергосистемы, от которой осуществляется электроснабжение предприятия. **Значение базисной мощности принимается единым** для всех ступеней трансформации СЭС.

За базисное напряжение  $U_6$  принимают среднее номинальное напряжение ступени, на которой определяют ток КЗ ( $U_6 = U_{cp} = 6,3; 10,5; 37; 115; 230$  кВ). Эти значения соответствуют требованиям ГОСТ и для расчетов **принимается столько базисных напряжений сколько ступеней** трансформации в рассматриваемой СЭС.

Системы электроснабжения современных горных предприятий характеризуются разветвленной сетью напряжением 6 кВ с двигательной нагрузкой (сетевые двигатели преобразовательных агрегатов, вентиляторы главного проветривания, главные водоотливные установки, стационарные компрессоры, шаровые мельницы и пр.) При возникновении короткого замыкания в сети 6 кВ напряжение в точке КЗ становится равным нулю и работающие двигатели преобразуются в электрические генераторы. Это происходит по следующим причинам:

- у двигателя, работающего с номинальными параметрами и номинальной скоростью, эдс на зажимах в момент возникновения КЗ близка к номинальному напряжению сети;
- вследствие сохранения инерции вращения ротора в первые периоды возникновения режима КЗ двигатель генерирует эдс свободного выбега.

В таких сетях токи подпитки от двигателей могут быть значительными и соизмеримыми с токами КЗ от энергосистемы. Синхронные и асинхронные электродвигатели влияют на общий ток короткого замыкания по-разному: эдс свободного выбега у асинхронных двигателей затухает много быстрее, чем у синхронных двигателей, так как в момент возникновения режима КЗ одновременно с снижением напряжения питания до нуля снижается и магнитное поле обмотки статора. У двигателя синхронного магнитное поле создается током возбуждения обмотки ротора и для гашения магнитного поля требуется некоторое время из-за электромагнитной инерции. В связи с этим асинхронные электродвигатели оказывают влияние только на сверхпереходный  $I''$  ток и на ударный  $i_{уд}$  ток. Двигатели синхронные влияют, помимо указанных, на токи  $I_{nt}$  и на установившийся ток  $I_{\infty}$ .

Более подробно и детально с расчетами токов КЗ необходимо разобраться с помощью приложенного к этому файлу примера.

#### 4. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Электроэнергетическая система России.
2. Уровни стандартных номинальных напряжений источников и электроприемников.
3. Основные требования к системам внешнего электроснабжения предприятий.

4. Классификация электроприемников по степени надежности их электроснабжения.
5. Радиальные и магистральные схемы внешнего электроснабжения предприятий. Их особенности, достоинства и недостатки.
6. Типовые схемы внешнего электроснабжения предприятий. Способы резервирования источников и электрических сетей.
7. Основные типы электроприемников и режимы их работы.
8. Коэффициент мощности электроустановок. Причины и последствия низкого коэффициента мощности электроустановок.
9. Способы повышения коэффициента мощности. Естественные и искусственные способы.
10. Графики электрических нагрузок, их основные показатели и практическое использование.
11. Расчет электрических нагрузок методом коэффициента спроса.
12. Картограмма электрических нагрузок. Определение символического центра электрических нагрузок.
13. Выбор силовых трансформаторов главных понижающих подстанций.
14. Выбор проводников по допустимому току нормального и форсированного режимов работы.
15. Выбор сечения проводников по экономической плотности тока.
16. Выбор проводников по допустимой потере напряжения.
17. Выбор проводников по электродинамической и термической стойкости.
18. Конструкции воздушных ЛЭП. Типы опор, марки и сечения проводов, изоляторы.
19. Конструкции кабельных ЛЭП. Способы прокладки. Защита от механических повреждений.
20. Причины и виды коротких замыканий в системах электроснабжения.
21. Процесс протекания короткого замыкания. Периодическая и аperiodическая составляющие тока к.з. Ударный ток к.з.
22. Расчет токов к.з. в сетях напряжением выше 1000 В в именованных единицах. Расчетная и эквивалентная схемы.
23. Расчет токов к.з. в сетях напряжением выше 1000 В в относительных единицах.
24. Расчет токов к.з. в сетях напряжением выше 1000 В по расчетным кривым (кривым затухания).
25. Расчет токов к.з. в сетях напряжением выше 1000 В с двигательной нагрузкой.
26. Методы преобразования схем замещения при определении токов к.з. (кроме метода коэффициентов токораспределения).
27. Преобразование схем замещения при определении токов к.з. методом коэффициентов токораспределения.
28. Способы ограничения токов к.з. Выбор и проверка реакторов.
29. Главные схемы трансформаторных подстанций. Схемы открытых распределительных устройств.
30. Закрытые распределительные устройства. Конструкции и главные схемы ячеек КРУ.
31. Выбор высоковольтных выключателей и ячеек КРУ.
32. Выбор выключателей нагрузки и предохранителей.
33. Выбор разъединителей, отделителей и короткозамыкателей.
34. Выбор и проверка трансформаторов тока. Кривые 10%-ной погрешности, их применение.
35. Потери мощности и электрической энергии в элементах систем электроснабжения. Способы снижения потерь.
36. Методика технико-экономического сравнения вариантов при выборе схем электроснабжения.
37. Режимы электропотребления в системах электроснабжения. Регулирование электропотребления.



38. Регулирование напряжения в системах электроснабжения.
39. Показатели надежности элементов систем электроснабжения.
40. Анализ надежности систем электроснабжения.
41. Влияние качества электрической энергии на работу электроприемников.

### **5.1. Основная литература**

1. Плащанский Л.А. Основы электроснабжения горных предприятий. Учебник для вузов. М.: Изд-во МГГУ, 2005, 499 с.
2. Плащанский Л.А. Основы электроснабжения горных предприятий. Учебное пособие. М.: Изд-во МГГУ, 2006, 116 с.

### **5.2. Дополнительная литература**

3. Андреев В.А. Релейная защита и автоматика систем электроснабжения: Учебник для вузов – 5-е изд. стер. М.: Высшая школа, 2007, 639 с.
4. Старков В.В. Основы электроснабжения и электротехнические системы. Релейная защита элементов систем электроснабжения горных предприятий. Учебное пособие. Издание УГГГА, 2003, 35 с.
5. Руководящие указания по расчету токов короткого замыкания и выбору электрооборудования (РД 153-34.0-20.527-98) /Под ред. Б.Н. Неклепаева. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2006, 144 с.
6. Справочник по проектированию электроснабжения / Под ред. Ю.Г. Барыбина и др. М.: Энергоатомиздат, 1990.
7. Справочник энергетика /Под ред. А.Н. Чохонелидзе. М.: Колос, 2006, 488 с.
8. Ополева Г.Н. Схемы и подстанции электроснабжения: Справочник: Учебное пособие. М.: ФОРУМ: ИНФРА – М, 2006, 480 с.

**Приложение. Исходные данные для расчетно-практической работы**

Наименование потребителей или электроприемников (ЭП)	Параметры ЭП	Варианты заданий									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вентилятор главного проветривания	Кол-во, Тип ЭП	$\frac{2}{СД}$	$\frac{1}{СД}$	$\frac{1}{СД}$	$\frac{1}{СД}$	$\frac{1}{СД}$	-	-	-	-	
	Номинальн. мощн. кВт	630	1250	1500	1000	840	-	-	-	-	
	Тип, длина линии, м	КЛ, 400	КЛ, 300	КЛ, 250	КЛ, 300	КЛ, 250	-	-	-	-	
Клетевой подъем	Кол-во, Тип ЭП	$\frac{1}{АД}$	$\frac{1}{АД}$	$\frac{1}{АД}$	$\frac{1}{АД}$	$\frac{1}{АД}$	-	-	-	-	
	Номинальн. мощн. кВт	1250	630	1250	630	630	-	-	-	-	
	Тип, длина линии, м	КЛ, 350	КЛ, 200	КЛ, 280	КЛ, 200	КЛ, 250	-	-	-	-	
Скиповой подъем	Кол-во, Тип ЭП	$\frac{2}{АД}$	$\frac{2}{АД}$	$\frac{2}{АД}$	$\frac{2}{АД}$	$\frac{2}{АД}$	-	-	-	-	
	Номинальн. мощн. кВт	1000	1000	1600	1600	1000	-	-	-	-	
	Тип, длина линии, м	КЛ, 350	КЛ, 200	КЛ, 300	КЛ, 200	КЛ, 230	-	-	-	-	
Компрессор	Кол-во, Тип ЭП	$\frac{2}{СД}$	$\frac{3}{СД}$	$\frac{3}{СД}$	$\frac{4}{СД}$	$\frac{3}{СД}$	$\frac{2}{СД}$	$\frac{3}{СД}$	-	-	
	Номинальн. мощн. кВт	540	520	440	360	320	630	340	-	-	
	Тип, длина линии, м	КЛ, 400	КЛ, 180	КЛ, 200	КЛ, 400	КЛ, 160	КЛ, 300	КЛ, 200	-	-	
Центральная подземная подстанция, включая водоотлив	Кол-во, Тип ЭП	$\frac{2}{АД}$	$\frac{2}{АД}$	$\frac{2}{АД}$	$\frac{2}{АД}$	$\frac{1}{АД}$	-	-	-	-	
	Номинальн. мощн. кВт	2*630	2*800	2*560	2*940	2*1250	-	-	-	-	
	Тип, длина линии, м	КЛ, 800	КЛ, 1000	КЛ, 800	КЛ, 860	КЛ, 860	-	-	-	-	
Электроприемники промплощадки (КТП – 6/0,4 кВ)	Кол-во, Тип ЭП	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	
	Номинальн. мощн. кВт А	2*1000	2*1600	2*630	2*630	2*1000	2*1000	2*1000	2*630	2*1600	
	Тип, длина линии, м	КЛ, 200	КЛ, 200	КЛ, 160	КЛ, 100	КЛ, 180	КЛ, 180	КЛ, 100	КЛ, 180	КЛ, 180	
Электроприемники отопительной котельной (КТП – 6/0,4 кВ)	Кол-во, Тип ЭП	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	$\frac{1}{ТМ}$	
	Номинальн. мощн. кВт А	2*630	2*630	2*400	2*630	2*400	2*630	2*400	2*400	2*400	
	Тип, длина линии, м	ВЛ, 2000	ВЛ, 1600	ВЛ, 1400	ВЛ, 1200	ВЛ, 800	ВЛ, 1500	ВЛ, 1000	ВЛ, 1500	ВЛ, 1350	

Таблица (продолжение)

Наименование потребителей или электроприемников (ЭП)	Параметры ЭП	Варианты заданий								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		16	17	18	19	20	21	22	23	24
ЛЭП «Карьер» (экскаваторы, буровые станки)	Кол-во, Тип ЭП	-	-	-	-	-	$\frac{2}{\text{СД}}$	$\frac{4}{\text{АД}}$	$\frac{2}{\text{АД}}$	$\frac{2}{\text{АД}}$
	Номинальн. мощн. кВт	-	-	-	-	-	1500	1200	1440	1680
	Тип, длина линии, м	-	-	-	-	-	ВЛ, 1800	ВЛ, 1300	ВЛ, 1500	ВЛ, 1800
Электроприемники обогатитель- ной фабрики (КТП – 6/0,4 кВ)	Кол-во, Тип ЭП	-	-	-	-	-	-	$\frac{1}{\text{ТМ}}$	$\frac{2}{\text{ТМ}}$	$\frac{2}{\text{ТМ}}$
	Номинальн. мощн. кВт А	-	-	-	-	-	-	2*1600	2*1000	2*1000
	Тип, длина линии, м	-	-	-	-	-	-	КЛ, 300	КЛ, 400	КЛ, 600
Дробилка конусная	Кол-во, Тип ЭП	-	-	-	-	-	-	$\frac{2}{\text{АД}}$	$\frac{1}{\text{АД}}$	$\frac{1}{\text{АД}}$
	Номинальн. мощн. кВт	-	-	-	-	-	-	250	320	520
	Тип, длина линии, м	-	-	-	-	-	-	КЛ, 250	КЛ, 400	КЛ, 300
Шаровая мельница	Кол-во, Тип ЭП	-	-	-	-	-	-	$\frac{2}{\text{СД}}$	$\frac{2}{\text{СД}}$	$\frac{2}{\text{СД}}$
	Номинальн. мощн. кВт	-	-	-	-	-	-	630	540	630
	Тип, длина линии, м	-	-	-	-	-	-	КЛ, 250	КЛ, 350	КЛ, 400
Дренажная шахта	Кол-во, Тип ЭП	-	-	-	-	-	$\frac{2}{\text{АД}}$	-	$\frac{2}{\text{АД}}$	$\frac{2}{\text{АД}}$
	Номинальн. мощн. кВт	-	-	-	-	-	520	-	360	320
	Тип, длина линии, м	-	-	-	-	-	КЛ, 800	-	КЛ, 600	КЛ, 800
Напряжение питающих ЛЭП, кВ	Для вариантов 1 - 15	110	35	110	110	35	35	35	110	110
	Для вариантов 16 - 30	35	110	35	35	110	110	110	35	35
Длина питающих ЛЭП. км	Для вариантов 1 - 15	36	18	32	24	10	15	25	35	25
	Для вариантов 16 - 30	10	50	12	18	36	40	50	20	16
Мощность к. з. на ши- нах РПС, МВ А	Для вариантов 1 - 15	1200	500	1500	1300	300	600	800	1400	900
	Для вариантов 16 - 30	400	1000	600	450	650	900	1500	450	300
Допустимый ток к. з. на шинах ЗРУ-6 кВ		-	-	-	-	-	10	10	10	10
Допустимый ток к. з. на шинах ЦПП, кА		5	5	5	5	5	-	-	-	-
Рассмотреть необходимый объем, уставки и чув- ствительность РЗ и А		СД	АД	КЛ+С Д	АД	ТМ	ВЛ+С Д	ВЛ	КЛ+А Д	АД



Министерство науки и высшего образования РФ  
ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный  
университет»

**П. А. Осипов**

## **ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПРИВОД**

**Методические рекомендации и задания к расчетно-  
графической работе для студентов направления  
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника,  
профиля бакалавриата Электротехнические  
комплексы и системы горных и промышленных  
предприятий**

*Год набора: 2021*

*для студентов  
очной и заочной формы обучения*

**Екатеринбург**

**2020**

## Расчетно-графическая работа

### Расчетно-графическая работа:

1. Расчет мощности и выбор типа двигателя по заданной нагрузочной диаграмме. Выбор передаточного устройства.

2. Расчет и построение по паспортным данным естественной и искусственных механических характеристик в двигательном и тормозных режимах работы. Тормозная диаграмма.

2.1. Двигатель постоянного тока независимого возбуждения. Расчет и построение по паспортным данным естественной и искусственных механических характеристик в двигательном и тормозных режимах работы. Тормозная диаграмма.

2.2. Асинхронный двигатель с фазным ротором. Расчет и построение по паспортным данным естественной и искусственных механических характеристик в двигательном и тормозных режимах работы. Тормозная диаграмма.

3. Проверка выбранного двигателя

*Условия:* Задается тип двигателя (двигатель постоянного тока независимого возбуждения (ДПТ НВ), асинхронный двигатель с фазным ротором (АДФР)), угловая скорость вращения механизма  $\omega_m$  [рад·с<sup>-1</sup>], момент инерции механизма  $J_m$  [кг·м<sup>2</sup>], нагрузочная диаграмма в виде значений момента сопротивления механизма [Нм] и времени его действия [с] на семи интервалах ( $M_1, t_1, M_2, t_2, M_3, t_3, M_4, t_4, M_5, t_5, M_6, t_6, M_7, t_7$ ). Варианты работы для студентов группы уникальные.

Варианты заданий на расчетно-графическую работу по дисциплине "Электрический привод" группы ЭЭТ-16-1																		
№	ФИО	Тип двигателя	$M_1$	$t_1$	$M_2$	$t_2$	$M_3$	$t_3$	$M_4$	$t_4$	$M_5$	$t_5$	$M_6$	$t_6$	$M_7$	$t_7$	$\omega_m$	$J_m$
1	Бобриков Иван	АДФР	600	185	250	310	450	20	290	130	430	215	420	135	360	60	71	21
2	Валимухаметов Евгений	ДПТНВ	650	35	250	215	600	170	390	40	230	115	570	15	160	315	41	18
3	Голованов Антон	АДФР	650	30	20	255	350	70	340	230	1230	215	670	35	140	265	115	15
4	Давлетов Ильдар	ДПТНВ	300	33	130	165	560	120	290	90	780	165	590	185	160	95	85	11
5	Дружинин Евгений	АДФР	420	45	350	95	390	70	690	230	550	315	720	235	240	115	134	10
6	Карпова Анна	ДПТНВ	850	35	250	215	260	40	690	130	400	265	450	185	410	65	74	8
7	Кмита Андрей Павлович	АДФР	700	15	350	215	625	160	390	280	630	140	470	105	410	75	109	25
8	Константинов Павел	ДПТНВ	900	85	150	140	510	95	340	80	490	215	680	125	260	215	59	15
9	Кротов Дмитрий	АДФР	890	85	650	165	300	120	290	250	430	205	470	225	210	85	49	19
10	Куценко Евгений	ДПТНВ	570	25	650	155	580	190	690	80	720	185	390	85	220	215	60	13
11	Охоткин Александр	АДФР	850	45	850	175	310	10	690	70	1030	35	360	285	260	65	59	15
12	Потешкин Артем	ДПТНВ	670	35	450	75	150	970	640	130	430	135	1170	85	420	75	74	28
13	Репин Николай	АДФР	330	65	300	140	700	110	270	240	930	115	670	175	360	155	69	25
14	Сурков Иван	ДПТНВ	400	30	530	165	1300	160	470	60	730	265	1270	175	460	95	72	22
15	Терехин Дмитрий	АДФР	530	175	550	155	1200	170	430	230	1030	55	1170	165	430	75	34	21
16	Фарлюкцин Ранис	ДПТНВ	650	35	210	175	1000	190	450	90	780	205	970	185	400	95	100	20
17	Чернеев Павел	АДФР	1200	110	250	75	120	15	1290	130	120	25	90	35	140	55	84	11

18	Штандар ук Александр	ДПТнв	300	175	300	195	300	100	780	60	450	95	270	25	210	135	109	8
19	Шукин Артем	Адфр	880	35	150	135	600	100	129 0	150	980	185	570	165	460	75	69	23

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная литература

1. Онищенко Г. Б. Электрический привод. Учебник для вузов – М.: РАСХН. 2003. – 320.: ил.
2. Ключев, В. И. Теория электропривода : учеб. для вузов / Владимир Иванович Ключев В. И. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва : Энергоатомиздат, 2001. - 704 с. : ил. - Библиогр.: с. 689.

### Дополнительная литература

3. Ильинский Н. Ф. Основы электропривода: Учебн. пособие для вузов. – 3-е изд., стереот. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 224 с.: ил.
4. Ситников Н. Б. Электрический привод: конспект лекций. Екатеринбург, Изд-во УГГУ, 2004. 280 с.
5. Чиликин М. Г., Сандлер А. С. Общий курс электропривода: учебн. для вузов. 6-е изд., перераб. и доп. М., Энергоиздат», 1981. 575 с.
6. Электропривод. Методические разработки к лабораторным работам по дисциплине «Электропривод» для студентов направлений: 551300 – «Электротехника, электромеханика и электротехнологии», 550600 – «Горное дело», 551800 – «Технологические машины и оборудование» и др./ В. Ф. Бекетов, доцент. Уральская государственная горно-геологическая академия. Кафедра электрификации горных предприятий. – Екатеринбург: Изд. УГГА, 2000. – 74 с.
7. Электрический привод: методические указания для проведения лабораторных работ. / сост.: Н. Б. Ситников, В. Т. Трапезников, В. В. Елисеев; Изд-во УГГУ. - Екатеринбург: УГГУ, 2005. 63 с.
8. Ситников Н. Б. Электропривод: учебно-методические разработки к решению типовых задач по курсу «Электропривод». – Свердловск: СГИ, 1976. 65 с.
9. Инжиниринг электроприводов и систем автоматизации : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / [М. П. Белов, О. И.Зементов, А. Е. Козярук и др.]; под ред. В. А. Новикова, Л. М. Чернигова. — М. : Издательский центр «Академия», 2006. — 368 с.



Министерство науки и высшего образования  
ФГБОУ ВО  
«Уральский государственный горный  
университет»

**П. А. Осипов**

## **ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПРИВОД**

***Методические указания по организации самостоятельной работы для студентов направления 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, профиля бакалавриата Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий***

***Год набора: 2021***

**Екатеринбург  
2020**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Тематический план дисциплины .....</b>	<b>4</b>
<b>2. Тематика лабораторных, практических работ .....</b>	<b>6</b>
<b>3. Вопросы к экзамену по дисциплине .....</b>	<b>6</b>
<b>4. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины .....</b>	<b>11</b>
<b>5. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины .....</b>	<b>11</b>
<b>6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем .....</b>	<b>12</b>



## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;
- написание рефератов, докладов, эссе;
- подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;
- выполнение письменных контрольных и курсовых работ;
- подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;
- подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;
- другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчетно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

### **Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 1 – Тематический план дисциплины

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
1	Назначение и функции электропривода. Структура электропривода.	4	7	[1] с. 5...14 [2] с. 5...9
2	Классификация электроприводов. Основные сведения из истории развития электропривода	6	9	[1] с. 18...22 [2] с. 9...19
3	Механические характеристики двигателя и рабочего механизма. Двигательный и тормозной режимы работы электродвигателя	4	7	[1] с. 23...28 [2] с. 24...85
4	Уравнение движения электропривода. Приведение моментов и моментов инерции к валу	6	9	[1] с. 30...35 [2] с. 43...51

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
	электродвигателя			
5	Механические характеристики и режимы работы двигателя постоянного тока с независимого возбуждения	4	7	[1] с. 103...113 [2] с. 137...169
6	Механические характеристики и режимы работы двигателя постоянного тока последовательного возбуждения	6	9	[1] с. 127...134, [2] с. 169...184
7	Механические характеристики и режимы работы асинхронного двигателя	4	7	[1] с. 42...78 [2] с. 187...205
8	Механические характеристики и режимы работы синхронного двигателя	6	9	[1] с. 78...86 [2] с. 255...237
9	Механические характеристики и режимы работы вентильно-индукторного двигателя	6	9	[1] с. 170...177 [2] с. 237...241
10	Общие сведения. Переходные процессы, определяемые механической инерционностью электропривода	4	7	[1] с. 186...191 [2] с. 266...276
11	Переходные процессы в электроприводе постоянного тока	4	7	[1] с. 195...205 [2] с. 286...315
12	Переходные процессы в электроприводе переменного тока	6	9	[2] с. 315...324
13	Энергетические показатели электропривода. Энергосбережение средствами электропривода	3	6	[1] с. 264...27 [2] с. 337...356
14	Нагрузочные диаграммы и режимы работы электродвигателей. Расчет мощности и выбор типа электродвигателя	3	9	[1] с. 280...287 [2] с. 356...365
15	Проверка двигателя по нагреву в продолжительном и повторно-кратковременном режимах работы	3	8	[2] с. 365...386

\* см. методические указания к контрольной работе

## 2. ТЕМАТИКА ЛАБОРАТОРНЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Таблица 2 – Перечень лабораторных работ

Номер раздела и темы	Наименование тем лабораторных работ	Трудоемкость, час	
		очная	заочная
3.1	Исследование механических свойств двигателя постоянного тока независимого возбуждения	4	
3.1	Исследование механических характеристик привода по системе Г-Д постоянного тока	4	
3.3	Исследование механических свойств трехфазного асинхронного двигателя	8	
Итого:		16	

Таблица 3 – Перечень практических работ

Номер раздела и темы	Наименование тем практических работ	Трудоёмкость, час	
		очная	заочная
1.1, 5.1	Расчет мощности и выбор типа двигателя по заданной нагрузочной диаграмме. Выбор передаточного устройства	4	
2.1, 2.2, 3.2, 4.1	Расчет и построение по паспортным данным естественной и искусственных механических характеристик в двигательном и тормозных режимах работы двигателя постоянного тока последовательного возбуждения. Тормозная диаграмма.	5	
2.1, 2.2, 3.4, 4.1	Расчет и построение по паспортным данным естественной и искусственных механических характеристик в двигательном и тормозных режимах работы синхронного двигателя. Тормозная диаграмма.	5	
5.2	Проверка выбранного двигателя	2	
3.1	Расчет и построение по паспортным данным естественной и искусственных механических характеристик в двигательном и тормозных режимах работы двигателя постоянного тока независимого возбуждения. Тормозная диаграмма.		4
3.3	Расчет и построение по паспортным данным естественной и искусственных механических характеристик в двигательном и тормозных режимах работы синхронного двигателя. Тормозная диаграмма.		4
Итого:		16	8

## 3. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Назначение, функции и структура электропривода.
2. Классификация электроприводов.
3. Механические характеристики двигателя и рабочего механизма. Двигательный и тормозной режимы работы электродвигателя
4. Уравнение движения электропривода. Приведение моментов и моментов инерции к валу электродвигателя

5. Механические характеристики и режимы работы двигателя постоянного тока с независимого возбуждения
6. Механические характеристики и режимы работы двигателя постоянного тока последовательного возбуждения
7. Механические характеристики и режимы работы асинхронного двигателя
8. Механические характеристики и режимы работы синхронного двигателя
9. Механические характеристики и режимы работы вентильно-индукторного двигателя
10. Общие сведения. Переходные процессы, определяемые механической инерционностью электропривода
11. Переходные процессы в электроприводе переменного тока
12. Переходные процессы в электроприводе постоянного тока
13. Энергетические показатели электропривода. Энергосбережение средствами электропривода
14. Нагрузочные диаграммы и режимы работы электродвигателей. Расчет мощности и выбор типа электродвигателя
15. Проверка двигателя по нагреву в продолжительном и повторно-кратковременном режимах работы
16. Функции регулируемого электропривода. По каким координатам возможно регулирование в электроприводе?
17. Перечислите основные параметры механической характеристики двигателя и рабочего механизма.
18. Определить в каких квадрантах механической характеристики возможны двигательный и тормозные режимы работы?
19. Графический способ определения жесткости механической характеристики.
20. Основное отличие активного от реактивного момента сопротивления?
21. Назовите самый энергетически эффективный режим работы для опускания груза подъемной установкой.
22. Что характеризует величина разности момента двигателя и момента сопротивления в уравнении движения электропривода?
23. Отличие уравнений движения электропривода для вращательного и поступательного движения.
24. Зачем необходимо приведение моментов и моментов инерции к валу электродвигателя?
25. Принципы приведения моментов и моментов инерции к валу электродвигателя.
26. Чем больше коэффициент передачи редуктора тем меньше приведенный момент инерции?
27. Чем больше коэффициент передачи редуктора тем меньше приведенный статический момент?
28. Способы возбуждения двигателя постоянного тока независимого возбуждения.
29. Для двигателей постоянного тока, какой мощности применяется электромагнитное возбуждение от постоянных магнитов?
30. Как изменяется скорость идеального холостого хода и жесткость механической характеристики двигателя постоянного тока независимого возбуждения при увеличении цепи якоря в два раза?

31. Какие сопротивления могут входить в сопротивления якорной цепи?
32. Возможно уменьшить сопротивление якоря двигателя постоянного тока независимого возбуждения меньше номинального значения?
33. Как изменяется скорость идеального холостого хода и жесткость механической характеристики двигателя постоянного тока независимого возбуждения при ослаблении магнитного потока возбуждения в два раза от номинального значения?
34. Целесообразно увеличение магнитного потока обмотки возбуждения двигателя постоянного тока независимого возбуждения выше номинального?
35. Как изменяется скорость идеального холостого хода и жесткость механической характеристики двигателя постоянного тока независимого возбуждения при уменьшении напряжения питания якоря в два раза от номинального значения?
36. К чему может привести увеличение напряжения питания якоря двигателя постоянного тока независимого возбуждения выше номинального?
37. Каким образом осуществляется двухзонное регулирование скорости двигателя постоянного тока независимого возбуждения?
38. Почему регулирование двигателя постоянного тока независимого возбуждения выше основной производится при постоянстве мощности, а ниже при постоянном моменте?
39. В каких режимах работы может работать двигателя постоянного тока независимого возбуждения в квадрантах механической характеристики?
40. Как перевести двигателя постоянного тока независимого возбуждения из двигательного в генераторный режим работы? Объяснить изменение направления электромагнитного момента и тока якоря.
41. Условия перехода двигателя постоянного тока независимого возбуждения в режим противовключения.
42. Условия перехода двигателя постоянного тока независимого возбуждения в режим электродинамического торможения.
43. Каким образом осуществляется реверсирование двигателя постоянного тока независимого возбуждения?
44. Основное конструктивное отличие двигателя постоянного тока независимого возбуждения от двигателя постоянного тока последовательного возбуждения.
45. Вид естественной и идеальной механической характеристики двигателя постоянного тока последовательного возбуждения?
46. Вид характеристик при изменении сопротивления и напряжения?
47. Достоинства двигателя постоянного тока последовательного возбуждения.
48. Для каких механизмов применяется электропривод с двигателя постоянного тока последовательного возбуждения?
49. Какой ток протекает по обмотке последовательного возбуждения?
50. Каким образом осуществляется реверсирование двигателя постоянного тока последовательного возбуждения?
51. Режимы работы двигателя постоянного тока последовательного возбуждения?
52. Как перевести двигателя постоянного тока последовательного возбуждения из двигательного в генераторный режим работы? Объяснить схему шунтирования обмотки якоря.

53. Как перевести двигателя постоянного тока последовательного возбуждения в режим противовключения?
54. Как перевести двигателя постоянного тока последовательного возбуждения в режим электродинамического торможения?
55. Как образуется вращающееся магнитное поле статора асинхронного двигателя?
56. Что определяется число пар полюсов обмотки статора асинхронного двигателя?
57. Типы обмоток ротора асинхронного двигателя.
58. Схемы соединения обмоток статора асинхронного двигателя.
59. К чему приводит изменение числа пар полюсов многоскоростных асинхронных двигателей?
60. Как определяется скольжение асинхронного двигателя?
61. Где применяется асинхронные двигатели с фазным ротором?
62. Запуск асинхронного двигателя с фазным ротором.
63. Виды схем замещения асинхронного двигателя.
64. Основные точки механической характеристики асинхронного двигателя.
65. От чего зависит скорость идеального холостого хода, критическое скольжение, критический и пусковой момент?
66. Чем опасно снижение напряжения питания статора асинхронного двигателя?
67. Каким образом осуществляется реверсирование асинхронного двигателя?
68. Режимы работы асинхронного двигателя?
69. Как перевести асинхронный двигатель из двигательного в генераторный режим работы?
70. Как перевести асинхронный двигатель в режим противовключения?
71. Как перевести асинхронный двигатель в режим электродинамического торможения? Схемы включения статорных обмоток в режиме электродинамического торможения.
72. Как образуется вращающееся магнитное поле статора синхронного двигателя?
73. Достоинства синхронного двигателя по сравнению с асинхронным.
74. Что определяется число пар полюсов обмотки статора синхронного двигателя?
75. Отличия явнополюсного от неявнополюсного типов ротора синхронного двигателя.
76. Способы возбуждения синхронного двигателя.
77. Для какого типа ротора синхронного двигателя характерно наличие реактивного момента?
78. Схемы соединения обмоток статора синхронного двигателя.
79. Как производится запуск синхронного двигателя с помощью пусковой обмотки?
80. Как определить угол нагрузки синхронного двигателя?
81. Для каких механизмов применяется синхронные двигатели?
82. Вид механической характеристики синхронного двигателя.
83. Угловая характеристика явнополюсного и неявнополюсного синхронного двигателя.
84. От чего зависит угол нагрузки синхронного двигателя.
85. Режимы работы синхронного двигателя.
86. Особенности конструкции и формы питающего напряжения вентильно-индукторного двигателя.
87. Форма механической характеристики вентильно-индукторного двигателя.

88. Принцип создания электромагнитного момента вентильно-индукторного двигателя.
89. Режимы работы вентильно-индукторного двигателя.
90. Причины возникновения переходных процессов.
91. У каких механизмов можно не учитывать влияние переходных процессов?
92. Классификация переходных процессов.
93. Типы внутренних переходных процессов?
94. Переходные процессы, определяемые механической инерционностью электропривода. Вид переходной характеристики пуска электропривода.
95. Какие переходные процессы существуют в электроприводе постоянного тока?
96. Процесс изменения тока возбуждения при подключении обмотки возбуждения к источнику питания.
97. Чем определяется электромеханическая постоянная времени двигателя постоянного тока?
98. Как влияет отрицательная обратная связь на характер переходных процессов?
99. Как определить электромагнитную постоянную времени якорной цепи?
100. Какие переходные процессы существуют в электроприводе переменного тока?
101. Чем определяется электромеханическая постоянная времени асинхронного двигателя?
102. Как определить электромагнитную постоянную времени асинхронного двигателя?
103. Какие существуют энергетические показатели электропривода?
104. Составляющие коэффициента полезного действия электропривода.
105. Как определить КПД электропривода?
106. От чего зависит КПД двигателя?
107. Классификация потерь в электроприводе.
108. Вид характеристики КПД асинхронного двигателя.
109. Энергосбережение средствами электропривода. Способы снижения потерь в электроприводе.
110. Что такое нагрузочная диаграмма механизма и электропривода?
111. Для чего используются нагрузочные диаграммы и тахограммы?
112. Порядок выбора типа приводного двигателя.
113. Как производится расчет мощности двигателя?
114. Метод расчета нагрева двигателя по эквивалентному току.
115. Метод расчета нагрева двигателя по эквивалентному моменту.
116. Метод расчета нагрева двигателя по эквивалентной мощности.
117. Как определить режим работы двигателя с помощью продолжительности включения ПВ: продолжительный и повторно-кратковременный.



## 4. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1 Основная литература

№ п/п	Наименование	Кол-во экз.
1	Онищенко Г. Б. Электрический привод. Учебник для вузов – М.: РАСХН. 2003. – 320.: ил.	46
2	Ключев, В. И. Теория электропривода : учеб. для вузов / Владимир Иванович Ключев В. И. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва : Энергоатомиздат, 2001. - 704 с. : ил. - Библиогр.: с. 689.	18

### 4.2 Дополнительная литература

№ п/п	Наименование	Кол-во экз.
3	Ильинский Н. Ф. Основы электропривода: Учебн. пособие для вузов. – 3-е изд., стереот. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 224 с.: ил.	46
4	Ситников Н. Б. Электрический привод: конспект лекций. Екатеринбург, Изд-во УГГУ, 2004. 280 с.	25
5	Чиликин М. Г., Сандлер А. С. Общий курс электропривода: учебн. для вузов. 6-е изд., перераб. и доп. М., Энергоиздат», 1981. 575 с.	105
6	Электропривод. Методические разработки к лабораторным работам по дисциплине «Электропривод» для студентов направлений: 551300 – «Электротехника, электромеханика и электротехнологии», 550600 – «Горное дело», 551800 – «Технологические машины и оборудование» и др./ В. Ф. Бекетов, доцент. Уральская государственная горно-геологическая академия. Кафедра электрификации горных предприятий. – Екатеринбург: Изд. УГГА, 2000. – 74 с.	100
7	Электрический привод: методические указания для проведения лабораторных работ. / сост.: Н. Б. Ситников, В. Т. Трапезников, В. В. Елисеев; Изд-во УГГУ. - Екатеринбург: УГГУ, 2005. 63 с.	16
8	Ситников Н. Б. Электропривод: учебно-методические разработки к решению типовых задач по курсу «Электропривод». – Свердловск: СГИ, 1976. 65 с.	50
9	Инжиниринг электроприводов и систем автоматизации : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / [М. П. Белов, О. И. Зементов, А. Е. Козярук и др.]; под ред. В. А. Новикова, Л. М. Чернигова. — М. : Издательский центр «Академия», 2006. — 368 с.	15

**5. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ  
ИНФОРМАЦИОННОТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ  
«ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

1. Официальный сайт ПО Apache OpenOffice - свободный и открытый офисный пакет – <https://www.openoffice.org/ru/>
2. Владимирский электромоторный завод - <http://www.vemp.ru>

**6. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ  
ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО  
ДИСЦИПЛИНЕ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНОГО  
ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ**

1. 1. Microsoft Windows 10 Professional
2. 2. Apache Open Office (бесплатный пакет офисных программ)

Информационные справочные системы  
ИПС «КонсультантПлюс».

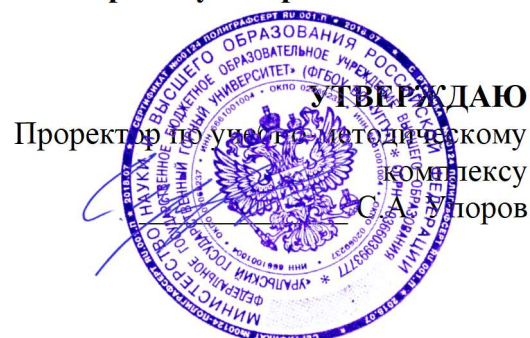
Базы данных

Scopus: база данных рефератов и цитирования.

<https://www.scopus.com/customer/profile/display.uri>

E-library: электронная научная библиотека: <https://elibrary.ru>

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
по выполнению контрольной работы по дисциплине  
**Б1.В.04 ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ**  
**ГОРНОГО И ОБОГАТИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА**

Направление подготовки  
**13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»**

Направленность (профиль)  
**Электроэнергетика горных и промышленных предприятий**

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Хорошавин С.А., канд. техн. наук, доцент

Одобрена на заседании кафедры  
Горных машин и комплексов  
*(название кафедры)*  
Зав.кафедрой \_\_\_\_\_  
*(подпись)*  
Лагунова Ю.А.  
*(Фамилия И.О.)*  
Протокол № 1 от 02.09.2021  
*(Дата)*

Рассмотрена методической комиссией  
факультета  
горно-механического  
*(название факультета)*  
Председатель \_\_\_\_\_  
*(подпись)*  
Оснпов П.А.  
*(Фамилия И.О.)*  
Протокол № 2 от 12.10.2021  
*(Дата)*

Екатеринбург

## **ОГЛАВЛЕНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ...	4
2. ОФОРМЛЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ .....	4
3. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ.....	4
ЛИТЕРАТУРА.....	14

## ВВЕДЕНИЕ

Цель дисциплины: овладение теоретическими основами рабочих процессов горных машин и оборудования; приобретение знаний и навыков, необходимых при определении рабочих нагрузок и расчете производительности горных машин и оборудования; овладение навыками выбора рациональных систем автоматизации рабочих процессов горных машин и оборудования.

**Цель контрольной работы:** проверка приобретенных студентами расчета параметров горного оборудования

Контрольная работа соответствуют следующим компетенциям Государственного стандарта:

Способен разрабатывать планы и программы организации инновационной деятельности на предприятии и организационные мероприятия по техническому обслуживанию электрических и тепловых станций (ПК-1);

Способен разрабатывать эффективную стратегию по энергосбережению и формировать активную политику управления с учетом рисков на предприятии (ПК-2);

Способен проверять техническое состояние оборудования и организации профилактических осмотров, текущего ремонта электрических и тепловых станций (ПК-3).

### **Результат изучения дисциплины:**

#### *Знать:*

- конструктивные особенности различных видов горного и обогатительного оборудования;
- классификации различных горных и обогатительных машин;
- общее устройство горно-обогатительного производства;
- основные методы определения рабочих нагрузок;
- основные рабочие процессы;
- системы автоматизации горного и обогатительного оборудования;
- методики программного и дистанционного управления.

#### *Уметь:*

- проводить расчеты основных параметров горного и обогатительного оборудования,
- определять производительность оборудования;
- осуществлять обработку полученных материалов на ЭВМ;

#### *Владеть:*

- навыками проведения расчетов рабочих нагрузок;
- методами определения основных параметров и производительности горных машин и оборудования с использованием средств вычислительной техники, обработки полученной информации и физической интерпретации данных;
- спецификой условий работы горного и обогатительного оборудования;
- основными направлениями автоматизации горных и обогатительных машин.

# 1. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

При подготовке к контрольной работе необходимо изучить примеры, рассмотренные на лекциях, а также в учебнике [1].

## 2. ОФОРМЛЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа должна включать следующие этапы:

1. Расчет количества карьерных экскаваторов
2. Определение скоростей движения самосвалов на различных участках пути
3. Расчет производительности парка карьерных самосвалов
4. Расчет инвентарного парка карьерных самосвалов.

## 3. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

### 1.1 Исходные данные

1. Годовой объем производства  $Q_r=550$  тыс.т.
2. Дальность транспортировки  $S=3$  км в том числе
  - 0,6 с уклоном 0%
  - 0,7 с уклоном 8%
  - 1,7 с уклоном 0%
3. Грузоподъемность автомобиля  $G_{гр} = 90$  тонн  
Плотность горной массы  $\gamma = 2$  т/м<sup>3</sup>
5. Режим работы подвижного состава
  - Длительность смены  $t_{см} = 8$ ч
  - Число смен работы  $n_{см} = 2$
  - Число дней работы в году – 357

### 1.2 Расчет времени рейса автомобиля

Время рейса  $T_r$  находим из выражения:

$$T_r = t_{погр} + t_{дв}^{гр} + t_{дв}^{пор} + t_{разг}$$

Где  $t_{погр}$  – время погрузки:

$$t_{\text{погр}} = t_{\text{ож}} + t_{\text{ман}} + t_{\text{п}} = 20 + 22 + 181,4 = 223,4 \text{ с}$$

Где  $t_{\text{ож}}$  – время ожидания погрузки

$t_{\text{ман}}$  – время маневров при установке под погрузку (зависит от схемы проезда, смотреть табл. 1). Принимаем схему подъезда – петлевая.

Таблица 1.1 - Время маневров автомобилей, с

Процесс	Схема подъезда	Время маневров
Погрузка	Сквозная	0...10
	Петлевая	20...25
	Тупиковая	50...60

Время маневров  $t_{\text{ман}} = 22 \text{ с}$ .

Чистое время погрузки равно:

$$t_{\text{п}} = t_{\text{ц}} \frac{q_a K_{\Gamma}}{q_k} = 26 \frac{90 \cdot 0,93}{12} = 181,4 \text{ с}$$

где  $t_{\text{п}}$  – чистое время погрузки;

$q_a$  – грузоподъемность автомобиля;

$K_{\Gamma}$  – коэффициент использования грузоподъемности;

$q_k$  – масса груза в ковше:

$$q_k = e \frac{k_{\text{н}}}{k_{\text{р}}} \gamma = 10 \frac{0,9}{1,5} 2 = 12 \text{ т}$$

где  $e$  – вместимость ковша, м<sup>3</sup>. Вместимость ковша выбирается из соображений того, что экскаватор должен загрузить самосвал за 3-7 циклов экскавации и принимается стандартной из типоразмерного ряда карьерных экскаваторов производящихся в РФ (ЭКГ-5А, ЭКГ-8, ЭКГ-10, ЭКГ-12А, ЭКГ-15, ЭКГ-18, ЭКГ-20Р, ЭКГ-32Р, ЭКГ-35К);

$k_{\text{н}}$  - коэффициент наполнения ковша 0,9

$k_{\text{р}}$  – коэффициент разрыхления породы в ковше 1,5

Выберем экскаватор зная объем ковша. Примем экскаватор ЭКГ-10 с ковшем 10 м<sup>3</sup> и временем цикла  $t_{\text{ц}} = 26 \text{ с}$ .

Фактическая загрузка АТС

$$q_{\phi} = n_k \cdot q_k = 7 \cdot 12 = 84 \text{ т}$$

где  $n_k$  – количество ковшей.

Годовая производительность экскаватора:

$$Q_{\text{экс}}^{\Gamma} = \frac{q_k n_{\text{см}} t_{\text{см}} n_{\Gamma}}{t_{\text{ц}}} \cdot K_{\text{в}}$$

где  $K_{\text{в}}$  – коэффициент использования сменного времени  $K_{\text{в}} = 0,8$ ;

$$Q_{\text{экс}}^{\Gamma} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 357 \cdot 3600}{26} \cdot 0,8 = 7592566 \text{ т/год}$$

Количество экскаваторов для годового плана:

$$N_{\text{э}}^{\Gamma} = \frac{Q_{\Gamma}}{Q_{\text{экс}}^{\Gamma}}$$

$$Q_{\Gamma} = \frac{Q_r \cdot 100}{\gamma} = \frac{550000 \cdot 100}{2,64} = 20833333 \text{ т/год.}$$

где  $\gamma$  – процентное содержание полезного ископаемого в породе.

$$N_{\text{э}}^{\Gamma} = \frac{20833333}{7592566} = 2,74 \text{ шт}$$

Коэффициент использования грузоподъемности ( $K_{\Gamma}$ ) определяется по формуле:

$$K_{\Gamma} = \frac{q_{\phi}}{q_a} = \frac{84}{90} = 0,93$$

Рассчитаем время движения в груженом и порожнем направлениях.

Находим динамический фактор на каждом участке

$$D_i = \omega_{0i} \pm g i_i,$$

Где  $\omega_{0i}$  – удельное сопротивление на  $i$ -ом участке дороги, Н/т.

Удельное сопротивление для временных дорог принимается в пределах 350...600 Н/т, для постоянных дорог 250...400 Н/т, для отвальных на скальных дорогах 900...1200 Н/т.

$g$  – ускорение свободного падения, 9,8 м/с<sup>2</sup>;  $i$  – уклон  $i$ -ого участка дороги в тысячных долях, %.

Первый участок движения по дороге в забое (временная дорога):



$$\omega = 500 \text{ Н/т};$$

$$D_{\text{гр1}} = 500 + 9,8 \cdot 0 = 500 \text{ Н/т}$$

$$D_{\text{пор1}} = 500 + 9,8 \cdot 0 = 500 \text{ Н/т}$$

Второй участок выезд из карьера (временная дорога):

$$\omega = 500 \text{ Н/т}$$

$$D_{\text{гр2}} = 500 + 9,8 \cdot 80 = 1284 \text{ Н/т}$$

$$D_{\text{пор2}} = 500 - 9,8 \cdot 80 = 284 \text{ Н/т}$$

Третий участок движения (грунтовая дорога):

$$\omega = 500 \text{ Н/т}$$

$$D_{\text{гр3}} = 500 + 9,8 \cdot 0 = 500 \text{ Н/т}$$

$$D_{\text{пор3}} = 500 + 9,8 \cdot 0 = 500 \text{ Н/т}$$

Расчет силы тяги на каждом участке.

Сила тяги ( $F_T$ ) определяется по формуле:

$$F_{Ti} = D_i P_{\text{гр/пор}}$$

Где  $P_{\text{гр}} = 158 \text{ т}$  – вес груженого автомобиля,

$P_{\text{пор}} = 74 \text{ т}$  – вес порожнего автомобиля

Первый участок:

$$F_{\text{Тгр1}} = 500 \cdot 158 = 79000 \text{ Н}; F_{\text{Тпор1}} = 500 \cdot 74 = 37000 \text{ Н}.$$

Второй участок:

$$F_{\text{Тгр2}} = 1284 \cdot 158 = 202872 \text{ Н}; F_{\text{Тпор2}} = 284 \cdot 74 = 21016 \text{ Н}$$

Третий участок:

$$F_{\text{Тгр3}} = 500 \cdot 158 = 79000 \text{ Н}; F_{\text{Тпор3}} = 500 \cdot 74 = 37000 \text{ Н}$$

Максимальная сила тяги по сцеплению колес с дорогой:

$$F_{\text{сцmax}} = 1000 P_{\text{сц}} g \psi = 1000 \cdot 158 \cdot 9,8 \cdot 0,8 = 1238720 \text{ Н}$$

Где  $P_{\text{сц}}$  – сцепная масса автомобиля = 158т;

$\psi$  – коэффициент сцепления колес с дорогой = 0,8.

Т.к.  $F_{\text{сцmax}} > F_{\text{max}} = 33000$ , то пробуксовки колес не будет.

Определим развиваемую скорость движения автомобиля по динамической характеристике на каждом участке дороги.

$$V = \frac{N_e}{F_{\text{тгр(тпор)}}}$$

Где  $N_e$  – мощность двигателя = 783 кВт самосвала.

Первый участок:

$$V_{\text{гр1}} = 36 \text{ км/ч}; V_{\text{пор1}} = 76 \text{ км/ч.}$$

$$V_{\text{гр2}} = 14 \text{ км/ч}; V_{\text{пор2}} = 134 \text{ км/ч.}$$

$$V_{\text{гр3}} = 36 \text{ км/ч}; V_{\text{пор3}} = 76 \text{ км/ч.}$$

Для обеспечения безопасности дорожного движения в карьере скорость движения не должна превышать 30 км/ч, примем среднетехнические скорости для каждого участка в таком соотношении

$$V_{\text{гр1}} = 20 \text{ км/ч}; V_{\text{пор1}} = 22 \text{ км/ч.}$$

$$V_{\text{гр2}} = 12 \text{ км/ч}; V_{\text{пор2}} = 30 \text{ км/ч.}$$

$$V_{\text{гр3}} = 23 \text{ км/ч}; V_{\text{пор3}} = 25 \text{ км/ч.}$$

Время движения по каждому участку в грузовом и порожнем направлениях:

$$t_i = 60 \frac{S_i}{V_i}$$

Где  $S_i$  – длина  $i$ -ого участка, км;

$V_i$  – скорость движения на  $i$ -ом участке, км/ч.

Первый участок:

$$t_{\text{гр1}} = 60 \frac{0,6}{20} = 1,8 \text{ мин};$$

$$t_{\text{пор1}} = 60 \frac{0,6}{22} = 1,6 \text{ мин.}$$

Второй участок:

$$t_{\text{гр2}} = 60 \frac{0,7}{12} = 3,5 \text{ мин};$$

$$t_{\text{пор}2} = 60 \frac{0,7}{30} = 1,4 \text{ мин.}$$

Третий участок:

$$t_{\text{гр}3} = 60 \frac{1,7}{23} = 4,4 \text{ мин;}$$

$$t_{\text{пор}3} = 60 \frac{1,7}{25} = 4,1 \text{ мин.}$$

Общее время движения автомобиля в порожнем состоянии ( $t_{\text{дв}}^{\text{пор}}$ ) определяется по формуле:

$$t_{\text{дв}}^{\text{пор}} = \sum t_i^{\text{пор}} = 1,6 + 1,4 + 4,1 = 7,1 \text{ мин.}$$

Общее время движения автомобиля в груженом состоянии ( $t_{\text{дв}}^{\text{гр}}$ ) определяется по формуле:

$$t_{\text{дв}}^{\text{гр}} = \sum t_i^{\text{гр}} = 1,8 + 3,5 + 4,4 = 9,7 \text{ мин.}$$

$t_{\text{разг}}$  – время разгрузки с учетом маневров. ( $t_{\text{разг}} = 90 \text{ с.}$ )

Время рейса автомобиля:

$$T_p = 3,72 + 9,7 + 7,1 + 1,5 = 22 \text{ мин} = 0,37 \text{ ч}$$

### 1.3 Расчет производительности парка автомобилей

Сменная техническая производительность парка автомобиля:

$$Q_{\text{т.см.}(A)} = \frac{q_a K_{\Gamma} T_{\text{см}}}{T_p} = \frac{90 \cdot 0,93 \cdot 8}{0,37} = 1809 \text{ т. см}$$

Где  $q_a$  – грузоподъемность автомобиля;

$K_{\Gamma}$  – коэффициент использования грузоподъемности;

$T_{\text{см}}$  – продолжительность смены, ч;

$T_p$  – время рейса, ч.

Сменная эксплуатационная производительность автомобиля:

$$Q_{\text{э.см.}(A)} = Q_{\text{т.см.}(A)} K_{\text{в}} = 1809 \cdot 0,85 = 1537,65$$

$K_{\text{в}}$  – коэффициент использования времени смены (0,7-0,85)

Годовая эксплуатационная производительность автомобиля:

$$Q_{\text{э.год}(A)} = Q_{\text{э.см.}(A)} \cdot n_{\Gamma} \cdot n_{\text{см}} = 1537,65 \cdot 357 \cdot 2 = 1097882,1 \text{ т. год,}$$

$n_r$  – количество рабочих дней в году;

$n_{см}$  – количество смен в сутки.

Рабочий парк автомобилей:

$$n_{\text{раб}} = \frac{Q_{\text{г.плл}}}{Q_{\text{э.год(А)}}} = \frac{20833333}{1097882,1} = 18,9 \approx 19 \text{ ед.}$$

$Q_{\text{г.плл}}$  – заданный объем перевозок горной массы.

Инвентарный парк автомобилей:

$$n_{\text{инв}} = \frac{n_{\text{раб}}}{K_{\text{т.и.}}} = \frac{19}{0,85} = 22 \text{ ед.}$$

Где  $K_{\text{т.и.}}$  – коэффициент технической готовности.

Список вариантов:

№	Годовой объем произ- водства, Qt, тыс.т.	Дальность транс- портирования, км	Уклоны		Карьерный са- мосвал	Число смен	Число рабочих дней в году	Схема подъезда
			Длина подъ- ема, %	Уклон, ‰				
1	650	3,5	15	70	БелАЗ-75570	2	357	Петлевая
2	420	2,8	20	90	БелАЗ-7514	3	300	Сквозная
3	340	2,5	10	60	БелАЗ-7547	2	250	Тупиковая
4	600	3,9	30	60	БелАЗ-7517	3	357	Петлевая
5	270	4	25	100	БелАЗ-7557	2	300	Сквозная
6	380	5	20	60	БелАЗ-75570	3	250	Тупиковая
7	420	5,5	20	90	БелАЗ-7514	2	357	Петлевая
8	390	2	20	90	БелАЗ-7547	3	357	Сквозная
9	380	2,7	30	100	БелАЗ-7517	2	300	Тупиковая
10	290	5,4	30	80	БелАЗ-7557	3	250	Петлевая
11	310	3,9	15	70	БелАЗ-75570	2	357	Сквозная
12	370	4,3	30	80	БелАЗ-7514	3	300	Тупиковая
13	560	4,8	15	100	БелАЗ-7547	2	250	Петлевая
14	490	3,4	10	70	БелАЗ-7517	3	357	Сквозная
15	370	2,9	25	60	БелАЗ-7557	2	300	Тупиковая
16	430	5,1	30	80	БелАЗ-75570	3	250	Петлевая
17	420	4,8	20	60	БелАЗ-7514	2	357	Сквозная

18	340	5,2	15	100	БелАЗ-7547	3	300	Тупиковая
19	380	3,7	15	80	БелАЗ-7517	2	250	Петлевая
20	570	2,6	15	90	БелАЗ-7557	3	357	Сквозная
21	500	5,4	15	80	БелАЗ-75570	2	300	Тупиковая
22	460	4,4	10	80	БелАЗ-7514	3	250	Петлевая
23	300	3,1	10	90	БелАЗ-7547	2	357	Сквозная
24	290	4,6	30	60	БелАЗ-7517	3	300	Тупиковая
25	340	5,1	30	90	БелАЗ-7557	3	250	Петлевая
26	440	2,6	30	70	БелАЗ-75570	2	357	Сквозная
27	360	5,3	10	80	БелАЗ-7514	3	300	Тупиковая
28	420	3,3	10	70	БелАЗ-7547	2	250	Петлевая
29	520	2,9	25	60	БелАЗ-7517	3	357	Сквозная
30	500	4,2	10	80	БелАЗ-7557	2	300	Тупиковая
31	340	2,7	10	80	БелАЗ-75570	2	250	Тупиковая
32	600	5,4	15	60	БелАЗ-7514	3	357	Петлевая
33	270	3,9	30	80	БелАЗ-7547	3	300	Сквозная
34	380	4,3	15	80	БелАЗ-7517	2	250	Тупиковая
35	420	4,8	25	100	БелАЗ-7557	3	357	Петлевая
36	390	3,4	15	60	БелАЗ-75570	2	300	Сквозная
37	300	2,9	10	100	БелАЗ-7514	3	250	Тупиковая
38	290	5,1	15	100	БелАЗ-7547	2	357	Петлевая
39	340	4,8	25	70	БелАЗ-7517	3	300	Сквозная
40	440	5,2	10	70	БелАЗ-7557	3	250	Тупиковая

41	360	3,7	25	80	БелАЗ-75570	2	357	Петлевая
42	420	2,6	20	70	БелАЗ-7514	3	300	Сквозная
43	520	5,4	15	100	БелАЗ-7547	2	250	Тупиковая
44	500	4,4	20	90	БелАЗ-7517	3	357	Петлевая
45	340	3,1	15	60	БелАЗ-7557	2	300	Сквозная
46	600	4,6	25	80	БелАЗ-75570	3	250	Тупиковая
47	270	5,1	30	80	БелАЗ-7514	2	357	Петлевая
48	380	2,6	25	60	БелАЗ-7547	3	357	Сквозная
49	420	5,3	25	90	БелАЗ-7517	2	300	Тупиковая
50	390	3,3	30	90	БелАЗ-7557	3	250	Петлевая
51	300	2,9	30	80	БелАЗ-75570	2	357	Сквозная
52	290	4,2	25	80	БелАЗ-7514	3	300	Тупиковая
53	340	2,7	30	80	БелАЗ-7547	2	250	Петлевая
54	440	5,4	10	100	БелАЗ-7517	3	357	Сквозная
55	360	3,9	25	100	БелАЗ-7557	2	300	Тупиковая
56	420	4,3	10	100	БелАЗ-75570	3	250	Петлевая
57	520	4,8	30	70	БелАЗ-7514	2	357	Сквозная
58	500	3,4	30	90	БелАЗ-7547	3	300	Тупиковая
59	340	2,9	15	70	БелАЗ-7517	2	250	Петлевая
60	600	5,1	10	100	БелАЗ-7557	3	357	Сквозная

## ЛИТЕРАТУРА

1. Подэрни Р.Ю. Механическое оборудование карьеров. Учебник для вузов. — 6-е изд., перераб. и доп. — М.: МГГУ, 2007. — 680 с



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
по выполнению практических и лабораторных работ по дисциплине  
**Б1.В.04 ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ**  
**ГОРНОГО И ОБОГАТИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА**

Направление подготовки  
**13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»**

Направленность (профиль)  
**Электроэнергетика горных и промышленных предприятий**

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Хорошавин С.А., канд. техн. наук, доцент

Одобрена на заседании кафедры

Горных машин и комплексов

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Лагунова Ю.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 02.09.2021

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией  
факультета

горно-механического

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Практические работы .....	3
2. Лабораторные работы.....	5
ЛИТЕРАТУРА.....	12

## ВВЕДЕНИЕ

**Цель практической работы:** овладение теоретическими основами рабочих процессов горных машин и оборудования; приобретение знаний и навыков, необходимых при определении рабочих нагрузок и расчете производительности горных машин и оборудования; овладение навыками выбора рациональных систем автоматизации рабочих процессов горных машин и оборудования.

### **Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины:**

Способен разрабатывать планы и программы организации инновационной деятельности на предприятии и организационные мероприятия по техническому обслуживанию электрических и тепловых станций (ПК-1);

Способен разрабатывать эффективную стратегию по энергосбережению и формировать активную политику управления с учетом рисков на предприятии (ПК-2);

Способен проверять техническое состояние оборудования и организации профилактических осмотров, текущего ремонта электрических и тепловых станций (ПК-3).

### **Результат изучения дисциплины:**

#### *Знать:*

- конструктивные особенности различных видов горного и обогатительного оборудования;

- классификации различных горных и обогатительных машин;

- общее устройство горно-обогатительного производства;

- основные методы определения рабочих нагрузок;

- основные рабочие процессы;

- системы автоматизации горного и обогатительного оборудования;

- методики программного и дистанционного управления.

#### *Уметь:*

- проводить расчеты основных параметров горного и обогатительного оборудования,

- определять производительность оборудования;

- осуществлять обработку полученных материалов на ЭВМ;

#### *Владеть:*

- навыками проведения расчетов рабочих нагрузок;

- методами определения основных параметров и производительности горных машин и оборудования с использованием средств вычислительной техники, обработки полученной информации и физической интерпретации данных;

- спецификой условий работы горного и обогатительного оборудования;

- основными направлениями автоматизации горных и обогатительных машин.

## 1. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

п/п	Тема	Содержание ответа
1	Буровое оборудование для открытых горных работ	Описать: основные способы бурения и марки машин предназначенные для того или иного вида бурения; конструкции и технические харак-

		<p>теристики основных видов буровых станков</p> <p>Подобрать рациональный способ бурения для конкретных горно-геологических условий</p> <p>Рассчитать рабочие параметры буровой станка</p>
2	Буровое оборудование для подземных горных работ	<p>Описать: основные способы бурения и марки машин предназначенные для того или иного вида бурения; конструкции и технические характеристики основных видов буровых станков</p> <p>Подобрать рациональный способ бурения для конкретных горно-геологических условий</p> <p>Рассчитать основные параметры бурового станка</p>
3	Одноковшовые экскаваторы	<p>Описать: основные виды одноковшовых экскаваторов применяемых на открытых горных работах</p> <p>Проанализировать по чертежам конструкции различных одноковшовых экскаваторов</p> <p>Подобрать тип одноковшового экскаватора для конкретных горно-геологических условий</p>
4	Многоковшовые экскаваторы	<p>Описать: основные виды многоковшовых экскаваторов применяемых на открытых горных работах</p> <p>Проанализировать по чертежам конструкции различных многоковшовых экскаваторов</p> <p>Подобрать тип многоковшового экскаватора для конкретных горно-геологических условий</p>
5	Выемочно-транспортирующие машины	<p>Описать: основные виды выемочно-транспортирующих машин применяемых на горных работах</p> <p>Проанализировать схемы и конструкции выемочно-транспортирующих машин</p>
6	Проходческие и очистные комбайны	<p>Описать: основные виды оборудования применяемого для подземных разработок</p> <p>Проанализировать схемы и конструкции про-</p>

		ходческих и очистных комбайнов
7	Дробильно-размольное оборудование	<p>Описать: основные виды дробильно-размольного оборудования</p> <p>Сделать классификацию дробилки и мельницы по типу и по размеру</p> <p>Проанализировать конструктивные схемы дробильно-размольного оборудования</p>

## 2. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

### 1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. «ИЗУЧЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ БУРОВОГО СТАНКА СБШ-250» (Срок выполнения - 2 ч.)

#### 1.1 Цель работы

Научить студентов определять принцип работы машины, взаимодействие ее механизмов, находить кинематические цепи передачи мощности от двигателей к исполнительным органам машины.

#### Задание:

- 1). Установить назначение и область применения буровой машины, перечисляя количество двигателей машин, указывая их назначение и род потребляемой энергии.
- 2). Перечислить механизмы машин и оборудования, указать их назначение.
- 3). Определить тип исполнительного органа, его достоинства и недостатки.

#### 1.2 Общие сведения

СБШ-250 - самоходный станок, который поставляется в комплектации с электроприводом и базой на гусеничном ходу. Разработан для бурения скважин шарошечными долотами в породах крепостью 4-20 ед. по шкале проф. М.М. Протодяконова с высокой образивностью под заряд взрывчатых веществ на открытых горных работах. Максимальный диаметр скважины достигает 270 мм. Скорость передвижения станка составляет от 0 до 1,4 км/ч с возможностью плавной регулировки хода.

Станок способен работать со штангами, которые за один проход позволяют отбурить скважину глубиной 12,5 м., что соответствует высоте уступа на большинстве разрезов. За счет исключения процесса наращивания и развинчивания става штанг, в разы повышается производительность буровых работ, что наиболее важно при работе в мягких и средней твердости породах, когда время проходки соизмеримо с временем, затраченным на вспомогательные операции.

Непрерывность хода подачи длинных штанг, обеспечивается использованием канатно-полиспастного привода подачи от двух лебедок.

#### 1.3 Лабораторная база

Технические средства обучения (плакаты, чертежи, учебные пособия)

#### 1.4 Порядок выполнения работы [2, 4, 5]

Бригада студентов из 3-4 человек по плакатам и чертежам машин определяет:

- 1) Количество механизмов машины, их функциональные назначения;
- 2) Количество двигателей машины и их назначение; вычерчиваются кинематические цепи приводов:

- механизма вращения;
- механизма подачи;
- механизма хода;
- кабельного барабана.

3) Типы и назначение исполнительных органов;

4) Вычерчивается кабельный барабан и тормоз механизма хода.

#### 1.5 Содержание отчета

Студент по результатам лабораторной работы составляет отчет и заносит данные в таблицу 1

Таблица 1 Результаты лабораторной работы

Тип машины	Назначение, область применения, количество двигателей, их характеристика	Примечание
Механизмы машины и оборудования	Назначение	
Тип исполнительного органа	Устройство, достоинства и недостатки	
Преимущества машин и недостатки шарошечного бурения скважин		

#### 1.6 Контрольные вопросы

- 1) Указать отличительные особенности шарошечных буровых станков.
- 2) Назначение силовых гидроцилиндров в конструкции этих машин?
- 3) Из каких материалов изготавливают шарошки?

## 2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. «ИЗУЧЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ БУРОВОЙ МАШИНЫ SIMBA S7» (Срок выполнения - 2 ч.)

### 2.1 Цель работы

Научить студентов определять принцип работы машины, взаимодействие ее механизмов, находить кинематические цепи передачи мощности от двигателей к исполнительным органам машины.

Задание:

- 1). Установить назначение и область применения буровой машины, перечисляя количество двигателей машин, указывая их назначение и род потребляемой энергии.
- 2). Перечислить механизмы машин и оборудования, указать их назначение.
- 3). Определить тип исполнительного органа, его достоинства и недостатки.

### 2.2 Общие сведения

Буровая установка Simba S7 спроектирована на основе современной конструкции и имеет множество общих компонентов с проходческой буровой установкой Boomer S1. Simba S7 представляет собой установку для бурения глубоких скважин диаметром от 51 до 89 мм в выработках малого и среднего сечения. Установка позволяет выполнять веерное бурение с параллельными скважинами на расстоянии до 5,9 м с одной позиции. Simba S7 оснащена высокопроизводительным перфоратором и буровым модулем, смонтированным на стреле, что обеспечивает неизменно высокоточное и производительное бурение глубоких скважин. Более высокий уровень автоматизации расширяет функциональные возможности данной универсальной буровой установки.

### 2.3 Лабораторная база

Технические средства обучения (плакаты, чертежи, учебные пособия)

### 2.4 Порядок выполнения работы [2, 4, 5]

Бригада студентов из 3-4 человек по плакатам и чертежам машин определяет:

- 1) Количество механизмов машины, их функциональные назначения;
- 2) Количество двигателей машины и их назначение; вычерчиваются кинематические

цепи приводов:

- механизма передвижения;
- механизма подачи;
- механизма вращения;

3) Типы и назначение исполнительных органов;

4) Вычерчивается механизм подачи.

### 1.5 Содержание отчета

Студент по результатам лабораторной работы составляет отчет и заносит данные в таблицу 1

Таблица 1 Результаты лабораторной работы

Тип машины	Назначение, область применения, количество двигателей, их характеристика	Примечание
Механизмы машины и обору- дования	Назначение	
Тип исполнительного органа	Устройство, достоинства и недостатки	
Преимущества машин и не- достатки Simba S7		

### 1.6 Контрольные вопросы

- 1) Указать отличительные особенности бурового станка Simba S7.
- 2) Назначение силовых гидроцилиндров в конструкции этих машин?
- 3) Из каких материалов изготавливают буровой инструмент?

3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. «ИЗУЧЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ ЭКГ-18» (Срок выполнения - 4 ч.)

#### 3.1 Цель работы

Научить студентов определять принцип работы машины, взаимодействие ее механизмов, находить кинематические цепи передачи мощности от двигателей к исполнительным органам машины.

Задание:

- 1). Установить назначение и область применения экскаватора, перечисляя количество двигателей экскаватора, указывая их назначение и род потребляемой энергии.
- 2). Перечислить механизмы экскаватора, указать их назначение.
- 3). Определить тип исполнительного органа, его достоинства и недостатки.

#### 3.2 Общие сведения

Экскаватор ЭКГ-18 с канатным механизмом подъема ковша и речным напором предназначен для разработки с погрузкой в транспортные средства или в отвал полезных ископаемых и пород вскрыши I и II категорий (трудности экскавации) без предварительного рыхления и III, IV и V категорий с предварительным рыхлением взрывом

#### 3.3 Лабораторная база

Технические средства обучения (плакаты, чертежи, учебные пособия)

### 3.4 Порядок выполнения работы [2, 4, 5]

Бригада студентов из 3-4 человек по плакатам и чертежам машин определяет:

- 1) Количество механизмов машины, их функциональные назначения;
- 2) Количество двигателей машины и их назначение; вычерчиваются кинематические

цепи приводов:

- напора;
- подъема;
- механизма хода;
- кабельного барабана.

3) Типы и назначение исполнительных органов;

4) Вычерчивается напорный механизм и тормоз механизма подъема.

### 3.5 Содержание отчета

Студент по результатам лабораторной работы составляет отчет и заносит данные в таблицу 1

Таблица 1 Результаты лабораторной работы

Тип машины	Назначение, область применения, количество двигателей, их характеристика	Примечание
Механизмы машины и оборудования	Назначение	
Тип исполнительного органа	Устройство, достоинства и недостатки	
Преимущества и недостатки машин с реечным механизмом напора		

### 3.6 Контрольные вопросы

- 1) Указать отличительные особенности экскаваторов с реечным напором.
- 2) Назначение двуногой стойки?
- 3) Из каких материалов изготавливают ковши экскаваторов?

4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. «ИЗУЧЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ ЭР-1250» (Срок выполнения - 4 ч.)

#### 4.1 Цель работы

Научить студентов определять принцип работы машины, взаимодействие ее механизмов, находить кинематические цепи передачи мощности от двигателей к исполнительным органам машины.

Задание:

- 1). Установить назначение и область применения экскаватора, перечисляя количество двигателей экскаватора, указывая их назначение и род потребляемой энергии.
- 2). Перечислить механизмы экскаватора, указать их назначение.
- 3). Определить тип исполнительного органа, его достоинства и недостатки.

#### 4.2 Общие сведения

Экскаватор роторный типа ЭР-1250 предназначен для добычи каменных и крепких бурых углей на открытых разработках. Обеспечивает погрузку экскавированной горной массы в железнодорожный либо автомобильный транспорт. Экскаватор ЭР-1250-17/1-0Ц оснащен рабочим органом с центробежной разгрузкой

#### 4.3 Лабораторная база



Технические средства обучения (плакаты, чертежи, учебные пособия)

#### 4.4 Порядок выполнения работы [2, 4, 5]

Бригада студентов из 3-4 человек по плакатам и чертежам машин определяет:

- 1) Количество механизмов машины, их функциональные назначения;
- 2) Количество двигателей машины и их назначение; вычерчиваются кинематические

цепи приводов:

- поворота;
- подъема;
- механизма хода;

3) Типы и назначение исполнительных органов;

4) Вычерчивается механизм поворота.

#### 4.5 Содержание отчета

Студент по результатам лабораторной работы составляет отчет и заносит данные в таблицу 1

Таблица 1 Результаты лабораторной работы

Тип машины	Назначение, область применения, количество двигателей, их характеристика	Примечание
Механизмы машины и оборудования	Назначение	
Тип исполнительного органа	Устройство, достоинства и недостатки	
Преимущества и недостатки роторных экскаваторов		

#### 4.6 Контрольные вопросы

- 1) Указать отличительные особенности роторных экскаваторов
- 2) как производится разгрузка ковшей экскаватора?
- 3) Из каких материалов изготавливают стрелы экскаваторов?

### 5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5. «ИЗУЧЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ ПОГРУЗОЧНОЙ МАШИНЫ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ» (Срок выполнения - 2 ч.)

#### 5.1 Цель работы

Научить студентов определять принцип работы машины, взаимодействие ее механизмов, находить кинематические цепи передачи мощности от двигателей к исполнительным органам машины.

Задание:

1). Установить назначение и область применения погрузочной машины, перечисляя количество двигателей машин, указывая их назначение и род потребляемой энергии.

2). Перечислить механизмы машин и оборудования, указать их назначение.

3). Определить тип исполнительного органа, его достоинства и недостатки.

#### 5.2 Общие сведения

Погрузочные машины с нагребными лапами рационально использовать в комплексе с другими самоходными машинами и конвейерами на проходке горизонтальных подготовительно-нарезных выработок сечением свыше 8 м<sup>2</sup> и в очистных забоях при мощности месторождений от 2 до 6 м и угле падения до 10°. Они иногда применяются для погрузки руды с подошвы откаточных выработок с безлюковой погрузкой.

Погрузочные машины с нагребными лапами охвачены типажом (ПНБ), согласно которому подразделяются на четыре класса: легкие, средние, тяжелые, сверхтяжелые. Класс машины выражается цифрой, стоящей после буквенного шифра (например, ПНБ-4).

### 5.3 Лабораторная база

Технические средства обучения (плакаты, чертежи, учебные пособия)

### 5.4 Порядок выполнения работы [2, 4, 5]

Бригада студентов из 3-4 человек по плакатам и чертежам машин определяет:

- 1) Количество механизмов машины, их функциональные назначения;
- 2) Количество двигателей машины и их назначение; вычерчиваются кинематические

цепи приводов:

- нагребных лап;
- скребкового конвейера;
- ведущих звездочек механизма хода;
- кабельного барабана.

3) Типы и назначение исполнительных органов;

4) Вычерчивается кабельный барабан и тормоз механизма хода.

### 5.5 Содержание отчета

Студент по результатам лабораторной работы составляет отчет и заносит данные в таблицу 1

Таблица 1 Результаты лабораторной работы

Тип машины	Назначение, область применения, количество двигателей, их характеристика	Примечание
Механизмы машины и оборудования	Назначение	
Тип исполнительного органа	Устройство, достоинства и недостатки	
Преимущества машин непрерывного действия по сравнению с машинами циклической работы		

### 5.6 Контрольные вопросы

1) Указать отличительные особенности погрузочных машин непрерывного действия, предназначенных для рудной промышленности.

2) Назначение силовых гидроцилиндров в конструкции этих машин?

3) Из каких материалов изготавливают нагребные лапы рабочего органа погрузочного конвейера?

## 6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6 «ИЗУЧЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ ПРОХОДЧЕСКОГО КОМБАЙНА С ПЛАНЕТАРНЫМ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМ ОРГАНОМ» (Срок выполнения - 2 ч.)

### 6.1 Цель работы

Научить студентов определять принцип работы машины, взаимодействие ее механизмов, находить кинематические цепи передачи мощности от двигателей к исполнительным органам машины.

Задание:

1). Установить назначение и область применения проходческого комбайна ПКГ-3.

2) Перечислить механизмы комбайна и объяснить их назначение.

3) Перечислить двигатели комбайна и указать назначение каждого из них; виды энергии, на которой работают двигатели.

4) Назвать тип рабочего органа комбайна, указав положительные его стороны и недостатки.

#### 6.2 Общие сведения

К классу проходческих комбайнов относится и машина Гумменика ПКГ (третьей модели). Машины такого типа применяются для проходки горизонтальных подготовительных выработок преимущественно по углю.

#### 6.3 Лабораторная база

1. Технические средства обучения (плакаты, чертежи, учебные пособия).

#### 6.4 Порядок выполнения работы [6, 2].

Бригада студентов из 3-4 человек по плакатам машин определяет:

1) Количество механизмов машины, их функциональные назначения;

2) Количество двигателей машины, их местоположение и кинематические цепи от двигателей к исполнительным органам машины;

3) Типы и назначение исполнительных органов машины

4) Вычерчивается кинематические схемы приводов:

- исполнительного органа комбайна;

- гусеничного хода передвижения машины (каким образом осуществляется торможение машины на наклонных горных выработках?).

#### 6.5 Содержание отчета

По результатам лабораторной работы студенты составляют отчет и заносят данные в таблицу 1

Таблица 1 Результаты лабораторной работы

Наименование агрегатов, механизмов машин	Их характеристика, достоинства, недостатки
Рабочий орган комбайна	
Привод рабочего органа	
Ходовое оборудование	
Конвейер	
Привод верхнего гусеничного хода	

#### 4.6 Контрольные вопросы

1) Каким образом осуществляется отбор мощности от двигателя хода к верхней гусеничной ленте?

2) Какую роль выполняет верхняя гусеничная лента?

3) Каким образом осуществляется изменение направления движения комбайна в вертикальной и горизонтальной плоскостях?

4) Какими преимуществами обладает ходовое оборудование с индивидуальным приводом на каждую гусеничную ленту?

### 7. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7. «ИЗУЧЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ КМД-1750» (Срок выполнения - 2 ч.)

#### 7.1 Цель работы

Научить студентов определять принцип работы машины, взаимодействие ее механизмов, находить кинематические цепи передачи мощности от двигателей к исполнительным органам машины.

Задание:

1). Установить назначение и область применения дробилки

2). Перечислить механизмы дробилки, указать их назначение.

3). Определить тип исполнительного органа, его достоинства и недостатки.

## 7.2 Общие сведения

Конусная дробилка с камерой мелкого дробления КМД-1750 Т предназначена для среднего дробления рудных и нерудных материалов (исключение – пластические материалы, изменяющие свою форму в процессе переработки), сопротивление сжатия которых не превышает 3000 МПа. Несмотря на малую габаритность, дробилка КМД-1750 Т отличается внушительной производительностью – 85-140 куб. м/час.

## 7.3 Лабораторная база

Технические средства обучения (плакаты, чертежи, учебные пособия)

## 7.4 Порядок выполнения работы [2, 4, 5]

Бригада студентов из 3-4 человек по плакатам и чертежам машин определяет:

- 1) Количество механизмов машины, их функциональные назначения;
- 2) Вычерчиваются кинематические цепи приводов.
- 3) Тип и назначение исполнительного органа

## 7.5 Содержание отчета

Студент по результатам лабораторной работы составляет отчет и заносит данные в таблицу 1

Таблица 1 Результаты лабораторной работы

Тип машины	Назначение, область применения, количество двигателей, их характеристика	Примечание
Механизмы машины и оборудования	Назначение	
Тип исполнительного органа	Устройство, достоинства и недостатки	
Преимущества и недостатки конусных дробилок		

## 7.6 Контрольные вопросы

- 1) Указать конусных дробилок.
- 2) Конструкция конусной дробилки?
- 3) Из каких материалов изготавливают броню дробилок?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Подэрни Р.Ю. Механическое оборудование карьеров. Учебник для вузов. — 6-е изд., перераб. и доп. — М.: МГГУ, 2007. — 680 с
2. Лагунова, Юлия Андреевна. Проектирование обогатительных машин : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности "Горные машины и оборудование" направления подготовки "Технологические машины и оборудование" / Ю. А. Лагунова ; Федеральное агентство по образованию, ГОУ ВПО "Уральский гос. горный ун-т". - Екатеринбург : Изд-во УГГУ, 2009. - 378 с. : ил., табл.; 29 см.; ISBN 978-5-8019-0210-4 (в пер.)
3. Тургель, Дмитрий Климентьевич. Горные машины и оборудование подземных разработок : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности 150402 - "Горные машины и оборудование" / Д. К. Тургель ; Федеральное агентство по образованию, ГОУ ВПО "Уральский гос. горный ун-

т". - Екатеринбург : Уральский гос. горный ун-т, 2007. - 302 с. : ил., табл.; 30 см.; ISBN 5-8019-0135-3 (В пер.)



## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Темы для самостоятельного изучения.....	3
ЛИТЕРАТУРА.....	5

## ВВЕДЕНИЕ

**Цель самостоятельного изучения:** овладение теоретическими основами рабочих процессов горных машин и оборудования; приобретение знаний и навыков, необходимых при определении рабочих нагрузок и расчете производительности горных машин и оборудования; овладение навыками выбора рациональных систем автоматизации рабочих процессов горных машин и оборудования.

### **Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины:**

Способен разрабатывать планы и программы организации инновационной деятельности на предприятии и организационные мероприятия по техническому обслуживанию электрических и тепловых станций (ПК-1);

Способен разрабатывать эффективную стратегию по энергосбережению и формировать активную политику управления с учетом рисков на предприятии (ПК-2);

Способен проверять техническое состояние оборудования и организации профилактических осмотров, текущего ремонта электрических и тепловых станций (ПК-3).

### **Результат изучения дисциплины:**

#### *Знать:*

- конструктивные особенности различных видов горного и обогатительного оборудования;

- классификации различных горных и обогатительных машин;

- общее устройство горно-обогатительного производства;

- основные методы определения рабочих нагрузок;

- основные рабочие процессы;

- системы автоматизации горного и обогатительного оборудования;

- методики программного и дистанционного управления.

#### *Уметь:*

- проводить расчеты основных параметров горного и обогатительного оборудования,

- определять производительность оборудования;

- осуществлять обработку полученных материалов на ЭВМ;

#### *Владеть:*

- навыками проведения расчетов рабочих нагрузок;

- методами определения основных параметров и производительности горных машин и оборудования с использованием средств вычислительной техники, обработки полученной информации и физической интерпретации данных;

- спецификой условий работы горного и обогатительного оборудования;

- основными направлениями автоматизации горных и обогатительных машин.

## 1. ТЕМЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

### **Тема 1: Физико-механические свойства горных пород.**

Физико-механические свойства горных пород как объектов разрушения. Классификация горных пород по трудности разработки и бурения. Определение коэффициентов сопротивления копанию. Характеристика буримости горных пород. Копание и резание горных пород. Влияние геометрии режущей кромки и параметров процесса экскавации на величину силы сопротивления копанию. Динамические способы разрушения крепких горных



пород. Вибрационное разрушение. Ударное разрушение механическим способом. Высокоскоростное разрушение. Импульсное разрушение.

## **Тема 2: Буровое оборудование для открытых горных работ.**

Классификация способов бурения и буровых станков. Буровые станки. Состояние и направления развития. Теория рабочего процесса буровых станков ударного и ударноротационного действия. Теория рабочего процесса роторного бурения шарошечными долотами. Теория рабочего процесса машин роторного бурения режущими коронками. Физические основы термического бурения. Определение основных параметров. Автоматизация буровых станков. Силовое оборудование буровых станков. Системы управления главными приводами. Режимы работы и механические характеристики двигателей.

## **Тема 3: Буровое оборудование для подземных горных работ.**

Классификация, назначение и конструктивные особенности буровых станков для подземного бурения. Определение производительности и основных параметров буровых станков и буровых станков. Исполнительные механизмы буровых станков. Конструктивные схемы роторно-подающих механизмов. Устройства для удаления буровой мелочи из скважины, пылеулавливания и пылеподавления. Устройства для подвода сжатого воздуха и рабочих компонентов к вращающемуся буровому стволу. Устройства для хранения, подачи штанг и свинчивания (развинчивания) бурового ствола.

## **Тема 4. Одноковшовые экскаваторы.**

Классификация экскаваторов: группы, типы и типоразмеры. Устройство, принцип действия, кинематические и конструктивные схемы прямой механической лопаты, гидравлической прямой и обратной лопаты, экскаватора с рабочим оборудованием драглайн. Принцип действия главных механизмов. Определение основных параметров. Статический расчет. Автоматизация одноковшовых экскаваторов. Силовое оборудование одноковшовых экскаваторов. Системы управления главными приводами. Режимы работы и механические характеристики двигателей.

## **Тема 5. Многоковшовые экскаваторы.**

Классификация экскаваторов: группы, типы и типоразмеры. Устройство, принцип действия, кинематические и конструктивные схемы роторного, цепного и фрезерного экскаваторов. Принцип действия главных механизмов. Определение основных параметров. Статический расчет. Автоматизация многоковшовых экскаваторов. Силовое оборудование многоковшовых экскаваторов. Системы управления главными приводами. Режимы работы и механические характеристики двигателей.

## **Тема 6. Выемочно-транспортные машины.**

Назначение, классификация и область применения выемочно-транспортных машин (ВТМ). Базовые машины, тягачи и специальное самоходное шасси. Классификация выемочно-транспортных машин: бульдозеры, рыхлители, скреперы, погрузчики. Рабочее оборудование бульдозера, скрепера, одноковшовых погрузчиков. Ходовое оборудование ВТМ. Сопротивление при работе и перемещении ВТМ. Тяговый расчет. Компонентные схемы ВТМ. Расчет производительности бульдозера, скрепера, погрузчика.

#### **Тема 7. Проходческие и очистные комбайны.**

Проходческие и очистные комбайны, погрузочно-доставочные машины. Очистные и выемочные комбайны и комплексы. Классификация, назначение и структурные схемы комбайнов и комплексов. Конструктивные особенности и основные расчетные характеристики комбайнов и комплексов. Расчет устойчивости оборудования. Классификация, назначение и структурные схемы машин для крепления выработок. Принципиальные схемы и конструктивные особенности машин для крепления выработок. Расчет основных параметров машин для крепления выработок. Определение производительности машин для крепления выработок.

#### **Тема 8. Дробильно-размольное оборудование.**

Виды грохотов. Устройство, принцип работы. Расчет основных параметров и производительности. Виды дробилок. Классификации дробилок: по типу, по размеру. Щековые, конусные, валковые, молотковые и роторные дробилки. Конструктивные схемы, устройство, принцип работы. Расчет основных параметров и производительности. Виды мельниц. Классификация мельниц: по типу, по размеру. Конструктивные схемы, устройство, принцип работы. Расчет основных параметров и производительности.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Подэрни Р.Ю. Механическое оборудование карьеров. Учебник для вузов. — 6-е изд., перераб. и доп. — М.: МГГУ, 2007. — 680 с
2. Лагунова, Юлия Андреевна. Проектирование обогатительных машин : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности "Горные машины и оборудование" направления подготовки "Технологические машины и оборудование" / Ю. А. Лагунова ; Федеральное агентство по образованию, ГОУ ВПО "Уральский гос. горный ун-т". - Екатеринбург : Изд-во УГГУ, 2009. - 378 с. : ил., табл.; 29 см.; ISBN 978-5-8019-0210-4 (в пер.)
3. Тургель, Дмитрий Климентьевич. Горные машины и оборудование подземных разработок : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности 150402 - "Горные машины и оборудование" / Д. К. Тургель ; Федеральное агентство по образованию, ГОУ ВПО "Уральский гос. горный ун-т". - Екатеринбург : Уральский гос. горный ун-т, 2007. - 302 с. : ил., табл.; 30 см.; ISBN 5-8019-0135-3 (В пер.)



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому  
Комплексу

 С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

**Б1.В.05. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ**

Специальность

**13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**

Специализация

**Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий**

Квалификация (степень) выпускника:

**бакалавр**

форма обучения: очная, заочная

год набора 2022

Автор: Раевская Л.Т., доцент, к.ф.-м.н.

Одобрена на заседании кафедры  
Электрификации горных предприятий  
(название кафедры)

Зав. кафедрой


  
(подпись)

Садовников М. Е.  
(Фамилия И.О.)

Протокол №1 от 28.09.2021 г.  
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией  
Горно-механического факультета  
(название факультета)

Председатель

  
(подпись)

Осипов П. А.  
(Фамилия И.О.)

Протокол №2 от 12.10.2021 г.  
(Дата)

Екатеринбург

*Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, владений (опыта деятельности), характеризующие формирование компетенций*

Ознакомление обучающихся с процедурой и алгоритмом оценивания (в течение первой недели начала изучения дисциплины).

Проведение предварительных консультаций.

Проверка ответов на задания письменного экзамена.

Сообщение результатов оценивания обучающимся.

Оформление необходимой документации.

Экзамен – форма контроля промежуточной аттестации, в результате которого обучающийся получает оценку по четырехбалльной шкале: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»

Экзамен проводится по расписанию.

Цель экзамена – завершить курс изучения дисциплины, проверить сложившуюся у обучающегося систему знаний, понятий, отметить степень полученных знаний, определить сформированность компетенций.

Для того чтобы быть уверенным на экзамене, необходимо ответы на наиболее трудные, с точки зрения обучающегося, вопросы подготовить заранее и тезисно записать. Запись включает дополнительные ресурсы памяти.

К экзамену по Вычислительным методам и прикладным программам необходимо начинать готовиться с первой лекции, практического (семинарского) занятия, так как материал, набираемый памятью постепенно, неоднократно подвергавшийся обсуждению, образует качественные знания, формирует необходимые компетенции.

При подготовке к экзамену следует пользоваться конспектами лекций, учебниками.

Экзамен по Вычислительным методам и прикладным программам проводится в устной или письменной форме путем выполнения экзаменационного задания

На подготовку к устному ответу обучающегося дается 40-60 минут в зависимости от объема билета. На подготовку ответа в письменной форме – не менее 120 минут.

При опоздании к началу письменного экзамена обучающийся на экзамен не допускается. Использование средств связи, «шпаргалок», подсказок на экзамене является основанием для удаления обучающегося с экзамена, а в экзаменационной ведомости проставляется оценка «неудовлетворительно».

Для подготовки к экзамену в письменной форме обучающийся должен иметь лист (несколько листов) формата А-4.

Лист (листы) формата А-4, на котором будет выполняться экзаменационное задание, должен быть подписан обучающимся в начале работы в правом верхнем углу. Здесь следует указать:

- Ф. И. О. обучающегося;
- группу, курс
- дату выполнения работы
- название дисциплины.

Страницы листов с ответами должны быть пронумерованы.

Проверка письменных работ осуществляется преподавателем, проводившим экзамен, в течение 3-х рабочих дней после его проведения. Результаты письменного экзамена объявляются путем выдачи копии экзаменационной ведомости старосте группы

или, результаты устного экзамена объявляются в процессе проведения экзамена после ответа обучающегося.

Экзамен может проводиться с использованием технических средств обучения.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

### РАЗДЕЛ 1. Вычисление приближенного значения числа по заданной формуле и погрешности результата

#### Цель занятия:

- закрепить умения вычислять погрешности результатов арифметических действий; косвенных и прямых измерений;
- закрепить умения определять количество верных цифр в числе, вычислять относительные и абсолютные погрешности.

#### 1.1 . Приближение числа. Погрешности приближенных значений чисел

Пусть  $X$  - точное значение некоторой величины,  $x$  - наилучшее приближение этой величины.

**Определение:** Абсолютной погрешностью  $e_x$  приближенного значения числа  $X$  называется модуль разности между точным числом  $X$  его приближенным значением  $x$ , т.е.

$$e_x = |X - x|.$$

**Определение:** Число  $x$  называется приближённым значением точного числа  $X$  с точностью до  $\Delta x$ , если абсолютная погрешность приближённого значения  $x$  не превышает  $\Delta x$ , т.е.

$$|X - x| \leq \Delta x. \quad (1.1)$$

**Определение:** Число  $\Delta x$  называется границей абсолютной погрешности приближённого значения числа  $x$ .

Число  $\Delta x$  на практике стараются подобрать как можно меньше. Из неравенства (1.1) найдём границы, в которых заключено точное значение числа  $X$ :

$$x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x.$$

$НГ_x = x - \Delta x$  - нижняя граница приближения величины  $X$ .

$ВГ_x = x + \Delta x$  - верхняя граница приближения величины  $X$ .

**Определение:** Относительной погрешностью  $\delta x$  приближенного числа  $x$  называется отношение абсолютной погрешности  $\Delta x$  этого приближения к числу  $x$ , т.е.

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

Если первая значащая цифра в относительной погрешности  $\delta x$  меньше 5, то граница относительной погрешности определяется из неравенства  $\delta x \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$ , где  $n$  - количество верных цифр.

### Погрешности арифметических действий

$x; y$	$\Delta(x; y)$	$\delta(x; y)$
$x+y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{ x }{ x+y } \delta x + \frac{ y }{ x+y } \delta y$
$x-y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{ x }{ x-y } \delta x + \frac{ y }{ x-y } \delta y$
$xy$	$ x \Delta y +  y \Delta x$	$\delta x + \delta y$
$x/y$	$\frac{ x \Delta y +  y \Delta x}{y^2}$	$\delta x + \delta y$

### Погрешности значений функций

$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\delta f(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2} \delta x$
$\frac{1}{x}$	$\frac{\Delta x}{x^2}$	$\delta x$
$\sin x$	$ \cos x  \cdot \Delta x$	$ x \operatorname{ctg} x  \cdot \delta x$
$\cos x$	$ \sin x  \cdot \Delta x$	$ x \operatorname{tg} x  \cdot \delta x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2 x }{ \sin 2x } \cdot \delta x$
$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\delta x}{ \ln x }$
$\lg x$	$\frac{\Delta x}{x \ln 10}$	$\frac{\delta x}{ \lg x } \cdot \ln 10$
$e^x$	$e^x \Delta x$	$ x  \cdot \delta x$
$\arcsin x$	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{ x }{ \arcsin x  \sqrt{1-x^2}} \cdot \delta x$
$\arccos x$	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{ x }{ \arccos x  \sqrt{1-x^2}} \cdot \delta x$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{\Delta x}{1+x^2}$	$\frac{ x }{ \operatorname{arctg} x  \sqrt{1+x^2}} \cdot \delta x$
$x^y$	$x^y ( y  \frac{\Delta x}{x} +  \ln x  \cdot \Delta y)$	$ y \ln x  \cdot \delta y +  y  \cdot \delta x$

Погрешности функций вычисляются по формуле

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

**Пример 1.** Вычисление погрешности  $S$  с учетом погрешностей функций

$$S = \frac{\sqrt{ab}}{3a + c^2}, \text{ если } \begin{matrix} a = 12.3 \\ b = 0.43 \\ c = 0.029 \end{matrix} \quad \text{все цифры чисел верные, т. е.} \quad \begin{matrix} \Delta a = 0.1 \\ \Delta b = 0.01 \\ \Delta c = 0.001 \end{matrix}$$

Решение.

$$S = \frac{\sqrt{ab}}{3a + c^2} = \frac{\sqrt{12.3 * 0.43}}{3 * 12.3 + 0.029} = 0.062. \text{ Относительную погрешность можно расписать как}$$

$$\delta S = \delta(\text{числ.}) + \delta(\text{знам.}) = \delta(\sqrt{ab}) + \delta(3a + c^2) = \frac{\Delta\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} + \frac{\Delta(3a + c^2)}{3a + c^2} = \frac{\Delta\sqrt{ab}}{2.299} + \frac{\Delta(3a + c^2)}{36.929},$$

где  $\Delta(3a + c^2) = \Delta(3a) + \Delta(c^2) = 3\Delta a + 2c\Delta c$

$$\Delta\sqrt{ab} = \frac{\Delta(ab)}{2\sqrt{ab}} = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{2\sqrt{ab}} = 0.036 \text{ и } \Delta(3a + c^2) = 3\Delta a + 2c\Delta c = 0.300. \text{ Тогда получаем}$$

$$\delta S = \frac{\Delta\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} + \frac{\Delta(3a + c^2)}{3a + c^2} = 0.024, \quad \Delta S = 0.062 * 0.024 = 0.001488, \quad S = 0.062 \pm 0.002, \text{ или}$$

верными цифрами  $S = 0.06 \pm 0.01$

#### Задание 1.4. Погрешности косвенных измерений

Определить погрешность косвенного измерения момента статического сопротивления  $M_c$  электродвигателя для номинального режима работы. Использовать второй закон Ньютона, закон электромагнитных сил для вычисления электромагнитного момента и уравнение связи между током возбуждения и магнитным потоком

$$M_{\text{об}} - M_c = J \frac{d\omega}{dt} \quad M_{\text{об}} = k * \Phi(t) I_{\text{об}} \quad k = M_{\text{ном}} / \Phi_{\text{ном}}(t) I_{\text{об}}$$

$$\Phi_{\text{ном}}(t) = k_{\phi} I_{\text{в.ном}} \quad k_1 = k * k_{\phi} \quad M_{\text{ном}} = \frac{P_{\text{ном}}}{\omega_{\text{ном}}} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \varepsilon = \frac{\omega_{\text{ном}} - \omega_0}{t_{\text{разг}}}$$

где  $M_{\text{об}}(t)$  – крутящий момент двигателя,  $I_{\text{об}}$  – ток обмотки якоря,  $\Phi(t)$  – магнитный поток,  $I_{\text{в}}(t)$  – ток возбуждения,  $\omega(t)$  – угловая скорость и  $\varepsilon(t)$  – угловое ускорение электродвигателя,  $J$  – момент инерции. Расчеты выполнить для заданной относительной погрешности измеряемых величин 10, 5, и 1 %. Необходимые для расчета данные приведены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

#### Варианты задания 1.4

№ варианта	Мощность P, кВт	Напряжение U, В	Число оборотов n, об/мин	Магнитный поток Φ, Вб	Масса m, кг	Радиус R, м	Скорость V, м/с	Время t, с
1	16	550	1200	1.1	450	0.4	1.1	5
2	11	500	1100	1.0	500	0.3	1.2	4
3	12	510	1300	1.2	600	0.5	1.4	3
4	13	520	1200	1.3	400	0.4	1.5	5
5	17	520	1400	1.1	550	0.3	1.4	4
6	11	540	1000	1.1	450	0.4	1.0	2
7	12	500	1200	1.2	640	0.5	1.1	5
8	13	480	1300	1.3	500	0.3	1.4	4
9	14	470	1400	1.4	550	0.4	1.0	3



10	15	460	1500	1.5	450	0.5	1.5	5
11	10	540	1100	1.1	400	0.4	1.0	3
12	10	530	1000	1.2	540	0.5	1.5	4
13	11	520	1200	1.1	600	0.5	1.4	3
14	12	550	1300	1.3	500	0.4	1.0	3
15	15	500	1400	1.2	400	0.5	1.4	4
16	12	560	1500	1.4	450	0.5	1.4	4
17	11	400	1000	1.1	500	0.4	1.5	5
18	10	520	1200	1.0	550	0.5	1.5	3
19	14	510	1100	1.0	600	0.3	1.4	4
20	13	570	1300	1.1	480	0.3	1.0	3
21	12	580	1400	1.2	580	0.4	1.4	4
22	10	500	1500	1.0	500	0.4	1.4	5
23	13	550	1500	1.4	600	0.4	1.1	5
24	14	500	1000	1.5	400	0.3	1.4	4
25	11	510	1200	1.1	550	0.5	1.0	3
26	12	520	1100	1.2	450	0.4	1.5	5
27	13	530	1300	1.1	640	0.3	1.0	4
28	14	540	1400	1.3	500	0.4	1.5	2
29	15	500	1500	1.2	550	0.5	1.4	5
30	10	480	1100	1.4	450	0.3	1.0	4

**Пример 7.** Определить абсолютную и относительную ошибки момента статического сопротивления в двигателе постоянного тока, если угловое ускорение, ток возбуждения, ток обмотки якоря даны с относительной погрешностью 10%, 5%, 1%. Масса поднимаемого груза  $m$ . Момент инерции вычислить по формуле  $J = mR^2/2$ . В данном примере принять

$$J = 2 \text{ кгм}^2.$$

Дано:  $P=11 \text{ кВт}$ ,  $U=520 \text{ В}$ ,  $n=1200 \text{ об/мин}$ ,  $\Phi=1,1 \text{ Вб}$ ,  $R=0,5 \text{ м}$ ,  $V=1,4 \text{ м/с}$ ,  $t=3 \text{ с}$ .

Решение:

1) Найдем потребляемую силу тока двигателя  $M_c = M_{дв} - J\epsilon$

$$I_{\text{ов}} = \frac{P}{U} = \frac{11000}{520} = 21,2 \text{ А}$$

2) Определим ток возбуждения

$$I_{\epsilon} = 10\% \cdot I_{\text{ов}} = 0,1 \cdot 21,2 = 2,12 \text{ А}$$

3) Найдем угловую скорость

$$\omega = n \frac{\text{об}}{\text{мин}} \rightarrow \frac{\text{рад}}{\text{сек}} = \frac{1200 \cdot 2\pi}{60} = 125,7 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

4) Вычислим линейную скорость привода

$$v_{\text{пр}} = \omega \cdot R = 125,7 \cdot 0,5 = 62,9 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$$

5) Передаточное отношение получается равным

$$i = \frac{v_{np}}{V} = \frac{62.9}{1.4} = 44.9$$

6) Найдем крутящий момент двигателя

$$M_{\text{дв}} = \frac{P}{\omega} = \frac{11000}{125.7} = 87.5 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

7) Найдем тангенциальное ускорение (начальная скорость равна нулю)

$$a^r = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{1.4}{3} = 0.47 \text{ м/с}^2$$

8) Определим угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{a^r}{R} = \frac{0.47}{0.5} = 0.9 \text{ рад/с}^2$$

9) Зная момент двигателя, ток возбуждения и ток двигателя, выразим коэффициент  $k_1$

$$k_1 = \frac{M_{\text{дв}}}{I_{\text{в}} \cdot I_{\text{дв}}} = \frac{87.5}{2.12 \cdot 21.2} = 2.0 \text{ рад/с}^2$$

10) Находим абсолютные погрешности при 10 % относительной погрешности

$$\Delta \varepsilon = 0.1 \cdot 0.9 = 0.09$$

$$\Delta I_{\text{дв}} = 0.1 \cdot 21.2 = 2.12$$

$$\Delta I_{\text{в}} = 0.1 \cdot 2.12 = 0.21$$

Далее полученные данные подставляем в формулу

$$\Delta M_c = \frac{\partial M_c}{\partial I_{\text{в}}} \cdot \Delta I_{\text{в}} + \frac{\partial M_c}{\partial I_{\text{дв}}} \cdot \Delta I_{\text{дв}} + \frac{\partial M_c}{\partial \varepsilon} \cdot \Delta \varepsilon = k_1 \cdot I_{\text{дв}} \cdot \Delta I_{\text{в}} + k_1 \cdot I_{\text{в}} \cdot \Delta I_{\text{дв}} + J \cdot \Delta \varepsilon$$

Абсолютная погрешность при 10 %:

$$\Delta M_c = 2.0 \cdot 21.2 \cdot 0.21 + 2.0 \cdot 2.12 \cdot 2.12 + 2 \cdot 0.09 = 18.1 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

При номинальном режиме работы можно считать, что  $M_c = M_{\text{дв}} = 87.5 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$$\text{относительная погрешность } \delta M_c = \frac{\Delta M_c}{M_c} = \frac{18.1}{87.5} = 0.207 = 20.7\%$$

11) Находим абсолютные погрешности при 5 % относительной погрешности

$$\Delta \varepsilon = 0.05 \cdot 0.9 = 0.05$$

$$\Delta I_{\text{дв}} = 0.05 \cdot 21.2 = 1.06$$

$$\Delta I_{\text{в}} = 0.05 \cdot 2.12 = 0.11$$

Абсолютная погрешность при 5% :

$$\Delta M_c = 2.0 \cdot 21.2 \cdot 0.11 + 2.0 \cdot 2.12 \cdot 1.06 + 2 \cdot 0.05 = 9.3H \cdot м$$

относительная погрешность

$$\delta M_c = \frac{\Delta M_c}{M_c} = \frac{9.3}{87.5} = 0.106 = 10.6\%$$

12) Находим абсолютные погрешности при 1 % относительной погрешности

$$\Delta \varepsilon = 0.01 \cdot 0.9 = 0.01$$

$$\Delta I_{ог} = 0.01 \cdot 21.2 = 0.21$$

$$\Delta I_{г} = 0.01 \cdot 2.12 = 0.02$$

Абсолютная погрешность при 1%:

$$\Delta M_c = 2.0 \cdot 21.2 \cdot 0.02 + 2.0 \cdot 2.12 \cdot 0.21 + 2 \cdot 0.01 = 1.8H \cdot м$$

относительная погрешность

$$\delta M_c = \frac{\Delta M_c}{M_c} = \frac{1.8}{87.5} = 0.021 = 2.1\%$$

### ***Контрольные вопросы***

1. Что такое абсолютная погрешность приближенного значения величины?
2. Что такое относительная погрешность приближенного значения величины?
3. Какое влияние на погрешность арифметических действий оказывают погрешности исходных данных?
4. В какой зависимости находится абсолютная погрешность значения функции одной переменной от абсолютной погрешности значения аргумента?
5. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях значений по правилам подсчета цифр.
6. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу строгого учета предельных погрешностей.
7. Как вычисляются предельные погрешности результата при использовании методики итоговой оценки ошибки вычислений?
8. В чем основное отличие метода границ от вычислений по методу строгого учета границ погрешностей?

## **РАЗДЕЛ 2. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами**

### **Цель занятия:**

- закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений;
- закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод половинного деления, метод хорд (секущих), метод Ньютона (метод касательных));

- разработать алгоритм и использовать программу для решения вычислительных задач приближенными методами, учитывая необходимую точность получаемого результата.

## 2.1. Постановка задачи отделения корней нелинейного уравнений

Решение нелинейного уравнения, описывающего состояние электрической цепи, может быть реализовано приближенными численными методами. Пусть имеется уравнение вида  $f(x)=0$ , где  $f(x)$  - алгебраическая или трансцендентная функция. Решить такое уравнение – значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней (с указанной точностью). Ограничимся обсуждением методов поиска лишь *действительных* корней, не затрагивая проблему корней комплексных.

Решение указанной задачи начинается с отделения корней, т.е. с установления количества корней и интервалов, каждый из которых содержит только один корень. Следует отметить, что универсальных приемов решения этой задачи, пригодных для любых уравнений, не существует. Тем не менее, отделение корней во многих случаях можно произвести графически.

Упростим задачу, заменив уравнение  $f(x)=0$  равносильным ему уравнением  $f_1(x)=f_2(x)$ . В этом случае строятся графики функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , а потом на оси  $x$  отмечаются отрезки, локализирующие абсциссы точек пересечения этих графиков.

**Пример 1.** Пусть необходимо найти корни уравнения  $f(x)=e^x-x^2=0$ .  
*Решение.* Преобразуем исходное уравнение к виду  $y_1(x)=e^x$ ;  $y_2(x)=x^2$ ;  $e^x=x^2$ . Чтобы найти корни уравнения, необходимо найти точку пересечения графиков функций  $y_1(x)=e^x$  и  $y_2(x)=x^2$ . Построим графики функций в Scilab и нанесем на график сетку для удобства визуального определения точки пересечения. Необходимые команды приведены в листинге программы, результат выполнения команд можно видеть на рис. 2.1.

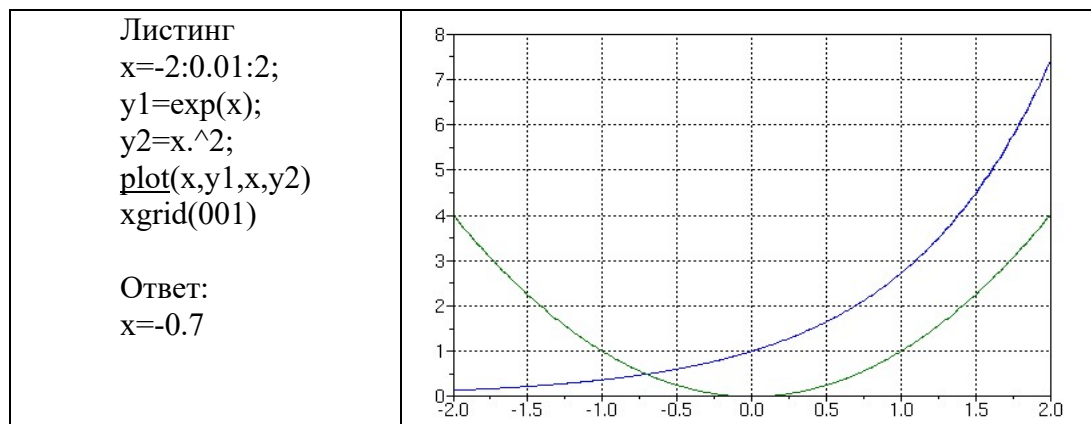
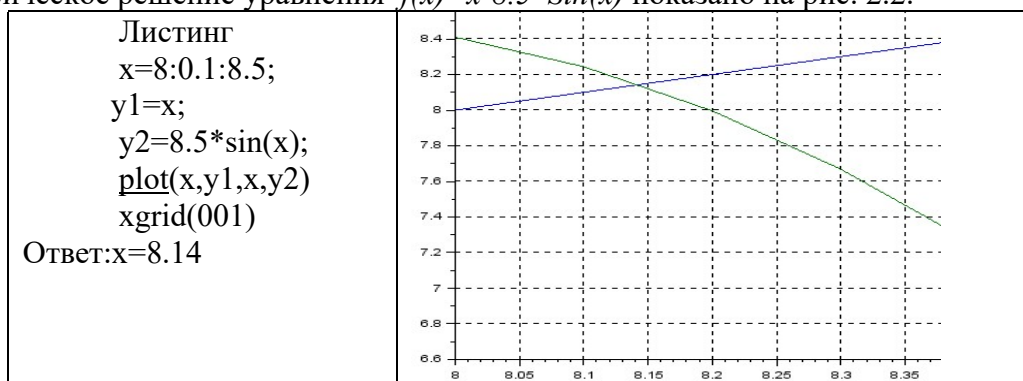


Рис.2.1. Графическое решение уравнения  $f(x)=e^x-x^2$

**Пример 2.** Пусть необходимо найти корни уравнения  $f(x)=x-8.5*\sin(x)$ .  
 Графическое решение уравнения  $f(x)=x-8.5*\sin(x)$  показано на рис. 2.2.





Правая часть системы определяет отображение  $F : y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i$ , (4.3)

которое переводит точку  $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в точку  $\bar{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Используя отображение (4.3) и выбрав начальную точку  $\bar{x}_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  можно построить итерационную последовательность точек.

Если отображение  $F$  является сжимающим, то эта последовательность сходится и её предел является решением системы (4.2), следовательно, и решением исходной системы (4.1).

**Замечание.** Отображение является *сжимающим*, если расстояние между образами меньше, чем расстояние между исходными точками.

Для отображения (4.3) необходимым и достаточным условием сжимаемости является следующее:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad (4.4)$$

т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (4.2), взятых по столбцам, должна быть меньше 1. Из этого условия следует, что прежде чем начать решение системы (4.1) необходимо ее привести к нормальному виду (4.2), т.е. коэффициенты  $\alpha_{ij}$  при неизвестных в правой части системы были существенно меньше 1.

Этого можно достичь, если исходную систему (4.1) с помощью равносильных преобразований привести к системе, у которой абсолютная величина коэффициентов, стоящих на главной диагонали, больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов, стоящих при неизвестных в соответствующих уровнях (такую систему называют *системой с преобладающими диагональными коэффициентами*). Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным 1, будет получена система (4.2), у которой все  $|\alpha_{ij}| < 1$ .

Для проверки точности решения используем условие (4.4).

**Пример 1.** Привести систему линейных уравнений к нормальному виду

$$\begin{cases} 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41, \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44, \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56. \end{cases}$$

*Решение.* Построим систему с преобладающими диагональными коэффициентами.

В качестве 1-ого уравнения возьмем 2-ое, в качестве 3-его уравнения – 1-ое, в качестве 2-ого уравнения – сумму 1-го и 3-го уравнений. Получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44, \\ 6,26x_1 - 12,2x_2 - 3,24x_3 = 69,97, \\ 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41. \end{cases}$$

Разделим каждое из полученных уравнений на диагональный коэффициент и выразим из каждого уравнения диагональные элементы:

$$\begin{cases} x_1 = -0,649x_2 - 0,034x_3 - 0,801, \\ x_2 = 0,573x_1 - 0,266x_3 - 5,735, \\ x_3 = 0,202x_1 - 0,363x_2 - 1,241. \end{cases}$$

Система приведена к нормальному виду. Проверку условия сходимости (4.4) и точности решения можно осуществить с помощью программы.

Далее приведем пример решения системы линейных алгебраических уравнений данным методом.

**Пример 2.** Решить систему уравнений методом простых итераций. Проверить расчет с помощью программы. Дана система с преобладающими диагональными коэффициентами.

$$\begin{aligned} 4.3x_1 + 0.217x_2 &= 2.663 \\ 0.1x_1 - 3.4x_2 - 0.207x_3 &= 2.778 \\ 0.09x_2 + 2.5x_3 + 0.197x_4 &= 2.533 \\ 0.08x_3 - 1.6x_4 &= 1.928 \end{aligned}$$

Запишем эквивалентную систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2.663}{4.3} - \frac{0.217x_2}{4.3} \\ x_2 &= -\frac{2.778}{3.4} - \frac{0.207x_3}{3.4} + \frac{0.1x_1}{3.4} \\ x_3 &= \frac{2.533}{2.5} - \frac{0.197x_4}{2.5} - \frac{0.09x_2}{2.5} \\ x_4 &= -\frac{1.928}{1.6} + \frac{0.08x_3}{1.6} \end{aligned}$$

Нулевое приближение  $x_1^0 = 0.6193$      $x_2^0 = -0.8170$      $x_3^0 = 1.013$      $x_4^0 = -1.205$ .

Первая итерация

$$\begin{aligned} x_1^1 &= 0.6193 + 0.0411 = 0.6604 \\ x_2^1 &= -0.8170 - 0.0616 + 0.018 = -0.8606 \\ x_3^1 &= 1.013 + 0.0949 + 0.0294 = 1.1373 \\ x_4^1 &= -1.205 + 0.05 = -1.155 \end{aligned}$$

Вторая итерация

$$\begin{aligned} x_1^2 &= 0.06193 + (0.05 * 0.86) = 0.6623 \\ x_2^2 &= -0.817 - (0.06 * 1.137) = -0.8678 \\ x_3^2 &= 1.013 + (0.078 * 1.55) + (0.036 * 0.86) = 1.072 \\ x_4^2 &= -1.205 + 0.05 * 1.137 = -1.148 \end{aligned}$$

Третья итерация

$$\begin{aligned} x_1^3 &= 0.06193 + (0.05 * 0.86) = 0.6623 \\ x_2^3 &= -0.817 - (0.06 * 1.072) + (0.029 * 0.66) = -0.862 \\ x_3^3 &= 1.013 + (0.078 * 1.148) + (0.036 * 0.86) = 1.133 \\ x_4^3 &= -1.205 + (0.05 * 1.072) = -1.151 \end{aligned}$$

Оценим сходимость итерационной процедуры

$$\begin{aligned} |x_1^2 - x_1^1| &= 0.0019 & |x_1^3 - x_1^2| &= 0.00001 \\ |x_2^2 - x_2^1| &= 0.0063 & |x_2^3 - x_2^2| &= 0.005 \\ |x_3^2 - x_3^1| &= 0.069 & |x_3^3 - x_3^2| &= 0.061 \\ |x_4^2 - x_4^1| &= 0.007 & |x_4^3 - x_4^2| &= 0.003 \end{aligned}$$

Проверим решение с помощью программы.

// решение СЛАУ методом простых итераций. Листинг программы	// вычисление начальных приближений X0=B;
---	---

<pre>// ввод матрицы A A=[4.3 0.217 0 0 ; 0.1 -3.4 -0.207 0; 0 0.09 2.5 0.197; 0 0 0.08 -1.6] // ввод вектора B B=[2.633;2.778;2.533;1.928] // формирование матрицы D R=diag(A); D=diag(R); // формирование матриц P и G P=-inv(D)*(A-D); G=inv(D)*B;</pre>	<pre>X=P*X0+G; //циклические вычисления while max(abs(X-X0))&gt;=0.00001, X0=X; X=P*X0+G; end; //вывод результата X // проверка обусловленности матрицы A cond(A) X = 0.6560717 - 0.8668572 1.1348894 - 1.1482556</pre>
---	---

Сравним результаты «ручного» счета и с помощью ЭВМ

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
Ручной счет	0.6623	- 0.862	1.1373	-1.151
ЭВМ	0.6560717	- 0.8668572	1.1348894	- 1.1482556

### Типовые контрольные задания и материалы

**Тема 1.** Оценка погрешности прямых измерений. Виды погрешностей. Представление результата прямых измерений.

Относительная погрешность. Использование относительной погрешности при умножении результатов измерений.

Абсолютная погрешность косвенных измерений.

Статистические характеристики результатов измерений. Доверительный интервал.

**Тема 2.** Итерационные методы решения нелинейных алгебраических уравнений. Метод отделения корней. Метод и алгоритм отделения корней уравнения с одной переменной.

**Тема 3.** Численное решение нелинейного уравнения с одной переменной методом деления пополам (дихотомии).

Численное решение нелинейного уравнения с одной переменной методом хорд.

Численное решение нелинейного уравнения с одной переменной методом Ньютона.

Численное решение нелинейного уравнения с одной переменной методом секущих.

Численное решение нелинейного уравнения с одной переменной методом простых итераций.

**Тема 4.** Метод Гаусса решения систем линейных алгоритмических уравнений.

Итерационный метод решений СЛАУ методом Зейделя.

Решение системы линейных алгоритмических уравнений методом простой итерации. Понятие метрики. Принцип сжимающих отображений.

**Тема 5.** Интерполирование функции. Интерполяция сплайнами. Линейные, кубические сплайны. Интерполирование функции. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Интерполяционные многочлены Ньютона. Конечные разности.

**Тема 6.** Численное дифференцирование по формуле Лагранжа.

Численное дифференцирование на основе интерполяционной формулы Ньютона.

**Тема 7.** Численное интегрирование. Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений

**Тема 8.** Метод Эйлера решения обыкновенных дифференциальных уравнений.



**Тема 9.** Метод Рунге-Кутты решений обыкновенных дифференциальных уравнений

**Тема 10.** Виды задач линейного программирования.

**ПРИМЕР оформления курсовой работы. Вычислительные методы и  
прикладные программы**

**Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Уральский государственный горный университет»**

## **Курсовая работа**

**по дисциплине «Вычислительные методы и прикладные  
программы»**

... вариант

Выполнил .....  
студент группы ...

Проверил: доцент  
Раевская Л. Т.

Екатеринбург

2020

### Задание 1. Правильная запись результатов выполнения округлений

1)

$127,3 \pm 0,2$	→	Верно
$127 \pm 0,2$	→	$127,0 \pm 0,2$
$127,00 \pm 0,2$	→	$127,0 \pm 0,2$

2)

$122,13 \pm 0,2$	→	$132,1 \pm 0,2$
$122,13 \pm 0,17$	→	$132,1 \pm 0,2$
$122,1 \pm 0,17$	→	$132,1 \pm 0,2$

3)

$246,402 \pm 0,15$	→	$246,4 \pm 0,2$
$246,4 \pm 0,15$	→	$246,4 \pm 0,2$
$246,40 \pm 0,15$	→	$246,4 \pm 0,2$

4) Округлить до сотых

$0,27439 \pm 0,0791$	→	$0,27 \pm 0,08$
----------------------	---	-----------------

5) Округлить до десятых

22,7849±0,98	→	22,8±1,0
--------------	---	----------

б) Округлить до десятков

2789±32	→	2790±40
---------	---	---------

## Задание 2. Расчет погрешности прямых измерений

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	35,0	35,1	35,2	35,3	35,0	35,0	35,1	35,0	35,0	35,1

$$x = \frac{35,0 + 35,1 + 35,2 + 35,3 + 35,0 + 35,0 + 35,1 + 35,0 + 35,0 + 35,1}{10} = 35,08$$

$$\Delta x_1 = |35,1 - 35,08| = 0,02$$

$$\Delta x_2 = |35,1 - 35,08| = 0,02$$

$$\Delta x_3 = |35,2 - 35,08| = 0,12$$

$$\Delta x_4 = |35,3 - 35,08| = 0,22$$

$$\Delta x_5 = |35,0 - 35,08| = 0,08$$

$$\Delta x_6 = |35,0 - 35,08| = 0,02$$

$$\Delta x_7 = |35,1 - 35,08| = 0,02$$

$$\Delta x_8 = |35,0 - 35,08| = 0,08$$

$$\Delta x_9 = |35,0 - 35,08| = 0,08$$

$$\Delta x_{10} = |35,1 - 35,08| = 0,02$$

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{10} \left| \frac{0,02 + 0,02 + 0,12 + 0,22 + 0,08 + 0,02 + 0,02 + 0,08 + 0,08 + 0,02}{10} \right| = 0,08$$

$$\delta x = \frac{0,08}{35,08} * 100\% = 0,23\%$$

35,08±0,08; δx=0,23%

Ответ: 35,1±0,1 – ответ верными цифрами

**Задание 3. Вычисление приближенного значения числа по заданной формуле**

a=1,75	Δa=0,01
b=1,21	Δb=0,01
c=0,199	Δc=0,001

$$S = \frac{a - \sin b}{b^2 - 6c} = \frac{1,75 - \sin 1,21}{1,21^2 - 6 * 0,199} = \frac{0,814}{2,658} = 0,306245$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta(a - \sin b) + \delta(b^2 - 6c) = \frac{\Delta(a - \sin b)}{a - \sin b} + \frac{\Delta(b^2 - 6c)}{b^2 - 6c} = \\ &= \frac{\Delta(a) + \Delta(\sin b)}{a - \sin b} + \frac{\Delta(b^2) + \Delta(6c)}{b^2 - 6c} = \\ &= \frac{\Delta a}{a - \sin b} + \frac{(\cos b) * \Delta b}{a - \sin b} + \frac{2b * \Delta b}{b^2 - 6c} + \frac{6 * \Delta c}{b^2 - 6c} = \\ &= \frac{0,01}{0,814} + \frac{0,00353}{0,814} + \frac{0,0242}{2,658} + \frac{0,006}{2,658} = \\ &= 0,0123 + 0,0043 + 0,0091 + 0,0026 = 0,0283 * 100 = 2,83\% \end{aligned}$$

$$\Delta S = \delta S * S = 0,0283 * 0,306245 = 0,0086 \approx 0,009$$

Ответ: 0,306±0,009; δS=2,83%

**Задание 4. Решение СЛАУ методом простых итераций**

$$\begin{cases} 10,8x_1 - 0,576x_2 = 12,143 \\ 0,321x_1 + 9,9x_2 + 3,3x_3 = 13,089 \\ 0,369x_2 + 9x_3 - 6,06x_4 = 13,674 \\ 0,416x_3 + 8,1x_4 = 13,897 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 10,8 & -0,576 & 0,000 & 0,000 & 12,143 \\ 0,321 & 9,9 & 3,3 & 0,000 & 13,089 \\ 0,000 & 0,369 & 9 & -6,06 & 13,674 \\ 0,000 & 0,000 & 0,416 & 8,1 & 13,897 \end{vmatrix}$$

$x_1 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} x_2;$ $x_2 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} x_1 - \frac{3,3}{9,9} x_3;$ $x_3 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} x_2 + \frac{6,06}{9} x_4;$ $x_4 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} x_3;$	$x_1^0 = \frac{12,143}{10,8} = 1,124;$ $x_2^0 = \frac{13,089}{9,9} = 1,322;$ $x_3^0 = \frac{13,674}{9} = 1,519;$ $x_4^0 = \frac{13,897}{8,1} = 1,716.$
$x_1^1 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 1,322 = 1,195;$ $x_2^1 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,124 - \frac{3,3}{9,9} * 1,519 = 0,779;$ $x_3^1 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 1,322 + \frac{6,06}{9} * 1,716 = 2,62;$ $x_4^1 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 1,519 = 1,638.$	$\varepsilon_1^1 =  1,124 - 1,195  = 0,071;$ $\varepsilon_2^1 =  1,322 - 0,779  = 0,543;$ $\varepsilon_3^1 =  1,519 - 2,62  = 1,101;$ $\varepsilon_4^1 =  1,716 - 1,638  = 0,078.$
$x_1^2 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 0,779 = 1,166;$ $x_2^2 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,195 - \frac{3,3}{9,9} * 2,62 = 0,41;$ $x_3^2 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 0,779 + \frac{6,06}{9} * 1,638 = 2,59;$ $x_4^2 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 2,62 = 1,581.$	$\varepsilon_1^2 =  1,195 - 1,166  = 0,029;$ $\varepsilon_2^2 =  0,41 - 0,779  = 0,369;$ $\varepsilon_3^2 =  2,62 - 2,59  = 0,03;$ $\varepsilon_4^2 =  1,638 - 1,581  = 0,057.$
$x_1^3 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 0,41 = 1,146;$ $x_2^3 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,166 - \frac{3,3}{9,9} * 2,59 = 0,42;$ $x_3^3 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 0,41 + \frac{6,06}{9} * 1,581 = 2,567;$ $x_4^3 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 2,59 = 1,583.$	$\varepsilon_1^3 =  1,146 - 1,166  = 0,02;$ $\varepsilon_2^3 =  0,42 - 0,41  = 0,01;$ $\varepsilon_3^3 =  2,567 - 2,62  = 0,053;$ $\varepsilon_4^3 =  1,583 - 1,638  = 0,055.$

С помощью программы Scilab выполняем расчет методом простых итераций:

```

1 A=[10.8 -0.576 0 0;
2 0.321 9.9 3.3 0;
3 0 0.369 9 -6.06;
4 0 0 0.416 8.1]
5 B=[12.143;13.089;13.674;13.897]
6 R=diag(A);
7 D=diag(R);
8 P=-inv(D)*(A-D);
9 G=inv(D)*(B);
10 X0=B;
11 X=P*X0+G;
12 while max(abs(X-X0))>=0.00001,
13 X0=X; X=P*X0+G;
14 end;
15 X
16 cond(A)
17

```

```

запуск программы:
загрузка исходного окружения
-->A=[10.8 -0.576 0 0;
-->0.321 9.9 3.3 0;
-->0 0.369 9 -6.06;
-->0 0 0.416 8.1]
A =

    10.8   -0.576    0.    0.
    0.321    9.9    3.3    0.
    0.    0.369    9.   -6.06
    0.    0.    0.416    8.1
-->B=[12.143;13.089;13.674;13.897]
B =

    12.143
    13.089
    13.674
    13.897
-->R=diag(A);
-->D=diag(R);
-->P=-inv(D)*(A-D);
-->G=inv(D)*(B);
-->X0=B;
-->X=P*X0+G;
-->while max(abs(X-X0))>=0.00001,
-->X0=X; X=P*X0+G;
-->end;
-->X
X =

    1.1472248
    0.4288683
    2.5681637
    1.5837831
-->cond(A)
ans =

    2.1486732
-->

```

### Задание 5. Решение СЛАУ методом Зейделя

$$\begin{cases} 10,8x_1 - 0,576x_2 = 12,143 \\ 0,321x_1 + 9,9x_2 + 3,3x_3 = 13,089 \\ 0,369x_2 + 9x_3 - 6,06x_4 = 13,674 \\ 0,416x_3 + 8,1x_4 = 13,897 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 10,8 & -0,576 & 0,000 & 0,000 & 12,143 \\ 0,321 & 9,9 & 3,3 & 0,000 & 13,089 \\ 0,000 & 0,369 & 9 & -6,06 & 13,674 \\ 0,000 & 0,000 & 0,416 & 8,1 & 13,897 \end{vmatrix}$$

$x_1 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} x_2;$ $x_2 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} x_1 - \frac{3,3}{9,9} x_3;$ $x_3 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} x_2 + \frac{6,06}{9} x_4;$ $x_4 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} x_3;$	$x_1^0 = \frac{12,143}{10,8} = 1,124;$ $x_2^0 = \frac{13,089}{9,9} = 1,322;$ $x_3^0 = \frac{13,674}{9} = 1,519;$ $x_4^0 = \frac{13,897}{8,1} = 1,716.$
$x_1^1 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 1,322 = 1,195;$ $x_2^1 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,195 - \frac{3,3}{9,9} * 1,519 = 0,777;$ $x_3^1 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 0,777 + \frac{6,06}{9} * 1,716 = 2,643;$ $x_4^1 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 2,643 = 1,58.$	$\varepsilon_1^1 =  1,124 - 1,195  = 0,071;$ $\varepsilon_2^1 =  1,322 - 0,777  = 0,545;$ $\varepsilon_3^1 =  1,519 - 2,643  = 1,124;$ $\varepsilon_4^1 =  1,716 - 1,58  = 0,136.$
$x_1^2 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 0,777 = 1,166;$ $x_2^2 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,166 - \frac{3,3}{9,9} * 2,643 = 0,4;$ $x_3^2 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 0,4 + \frac{6,06}{9} * 1,58 = 2,567;$ $x_4^2 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 2,567 = 1,584.$	$\varepsilon_1^2 =  1,195 - 1,166  = 0,029;$ $\varepsilon_2^2 =  0,4 - 0,777  = 0,377;$ $\varepsilon_3^2 =  2,643 - 2,567  = 0,076;$ $\varepsilon_4^2 =  1,58 - 1,584  = 0,004.$
$x_1^3 = \frac{12,143}{10,8} + \frac{0,576}{10,8} * 0,4 = 1,146;$ $x_2^3 = \frac{13,089}{9,9} - \frac{0,321}{9,9} * 1,146 - \frac{3,3}{9,9} * 2,567 = 0,43;$ $x_3^3 = \frac{13,674}{9} - \frac{0,369}{9} * 0,43 + \frac{6,06}{9} * 1,584 = 2,568;$ $x_4^3 = \frac{13,897}{8,1} - \frac{0,416}{8,1} * 2,568 = 1,5838.$	$\varepsilon_1^3 =  1,146 - 1,166  = 0,02;$ $\varepsilon_2^3 =  0,4 - 0,43  = 0,03;$ $\varepsilon_3^3 =  2,567 - 2,568  = 0,001;$ $\varepsilon_4^3 =  1,583 - 1,5838  = 0,0002.$

С помощью программы Scilab выполняем расчет методом Зейделя:

```
1 A=[10.8 -0.576 -0 -0;  
2 0.321 -9.9 -3.3 -0;  
3 0 -0.369 -9 -6.06;  
4 0 -0 -0.416 -8.1]  
5 B=[12.143; -13.089; -13.674; -13.897]  
6 R=tril(A)  
7 T=A-R  
8 P=-inv(R)*T;  
9 G=inv(R)*B;  
10 X0=B;  
11 X=P*X0+G;  
12 while max(abs(X-X0))>=0.00001,  
13 ... X0=X; X=P*X0+G;  
14 end;  
15 X  
16 cond(A)  
17 |
```



```

-->A=[10.8 -0.576 0 0;
-->0.321 9.9 3.3 0;
-->0 0.369 9 -6.06;
-->0 0 0.416 8.1]
A =

    10.8    - 0.576    0.    0.
    0.321    9.9    3.3    0.
    0.    0.369    9.    - 6.06
    0.    0.    0.416    8.1
-->B=[12.143; 13.089; 13.674; 13.897]
B =

    12.143
    13.089
    13.674
    13.897
-->R=tril(A)
R =

    10.8    0.    0.    0.
    0.321    9.9    0.    0.
    0.    0.369    9.    0.
    0.    0.    0.416    8.1
-->T=A-R
T =

    0.    - 0.576    0.    0.
    0.    0.    3.3    0.
    0.    0.    0.    - 6.06
    0.    0.    0.    0.
-->P=-inv(R)*T;
-->G=inv(R)*B;
-->X0=B;
-->X=P*X0+G;
-->while max(abs(X-X0))>=0.00001,
-->    X0=X; X=P*X0+G;
-->end;
-->X

X =

    1.1472248
    0.4288687
    2.5681637
    1.5837832
-->cond(A)
ans =

    2.1486732
-->

```

## Задание 6. Вычисление интегралов приближенными методами

### 1. Метод прямоугольника

$$\int_2^3 x^2 * \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$$

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$
3,510	3,816	4,126	4,439	4,754	5,068	5,382	5,691	5,996	6,295	6,585

$$\int_2^3 x^2 * \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx \approx h * (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10}) = \frac{3-2}{10} * (3,816 + 4,126 + 4,439 + 4,754 + 5,068 + 5,382 + 5,691 + 5,996 + 6,295 + 6,585) = 5,2152$$

– метод «правых» прямоугольников;

$$\int_2^3 x^2 * \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx \approx h * (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9) = \frac{2-3}{10} * (3,510 + 3,816 + 4,126 + 4,439 + 4,754 + 5,068 + 5,382 + 5,691 + 5,996 + 6,295) = 4,9077$$

метод "левых" прямоугольников

$$\frac{4,9077 + 5,2152}{2} = 5,06145.$$

### 2. Метод трапеции

$$\int_2^3 x^2 * \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx \approx h * \left(y_0 + \frac{y_1 + y_{10}}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9\right) = 0,1 * \left(3,510 + \frac{3,510 + 6,585}{2} + 4,126 + 4,439 + 4,754 + 5,068 + 5,382 + 5,691 + 5,996 + 6,295\right) = 5,06145.$$

### Задание 7. Решение дифференциальных уравнений методом Эйлера

$$yy' + x = 1$$

$a=0.1$	$y_0 = 1$
$b=1.1$	$h=0.1$

$$y' = \frac{1-x}{y} = f(x,y)$$

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
y	1	1,09	1,1634	1,2236	1,2726	1,3119	1,3424	1,3648	1,3794	1,3866	1,3866
	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$

$$y_i = y_{i-1} + h * f(x_{i-1}; y_{i-1})$$

$$y_1 = 1 + 0.1 * \frac{1-0.1}{1} = 1,09$$

$$y_2 = 1,09 + 0.1 * \frac{1-0.2}{1,09} = 1,1634$$

$$y_3 = 1,1634 + 0.1 * \frac{1-0.3}{1,1634} = 1,2236$$

$$y_4 = 1,2236 + 0.1 * \frac{1-0.4}{1,2236} = 1,2726$$

$$y_5 = 1,2726 + 0.1 * \frac{1-0.5}{1,2726} = 1,3119$$

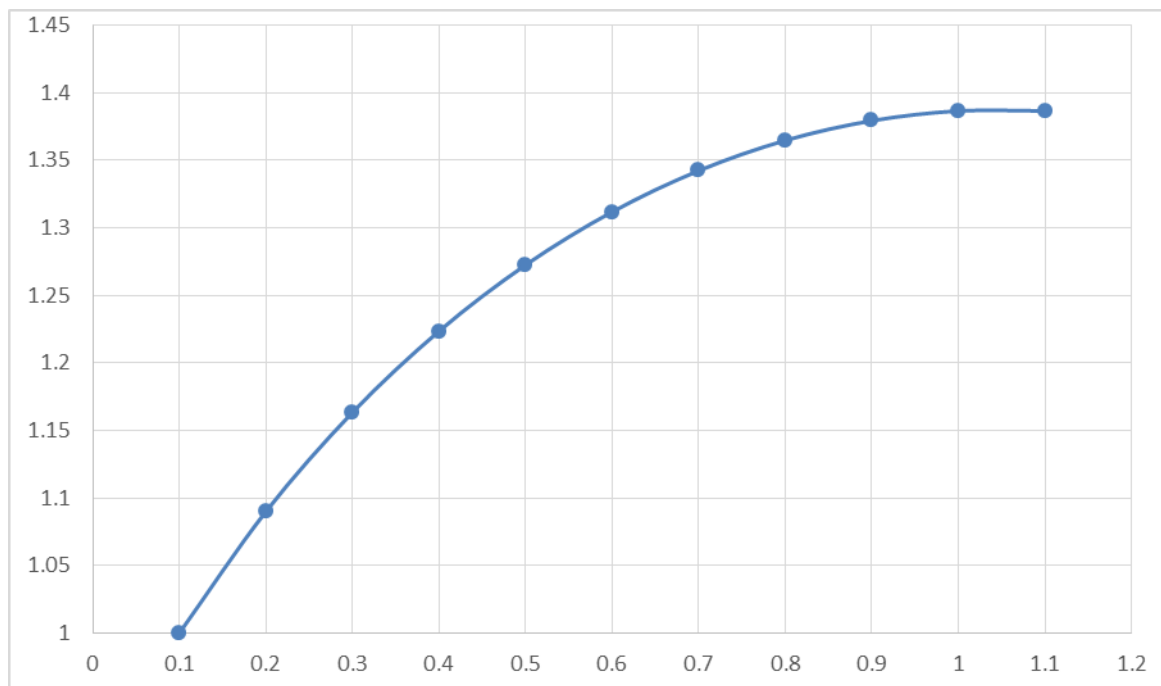
$$y_6 = 1,3119 + 0.1 * \frac{1-0.6}{1,3119} = 1,3424$$

$$y_7 = 1,3424 + 0.1 * \frac{1-0.7}{1,3424} = 1,3648$$

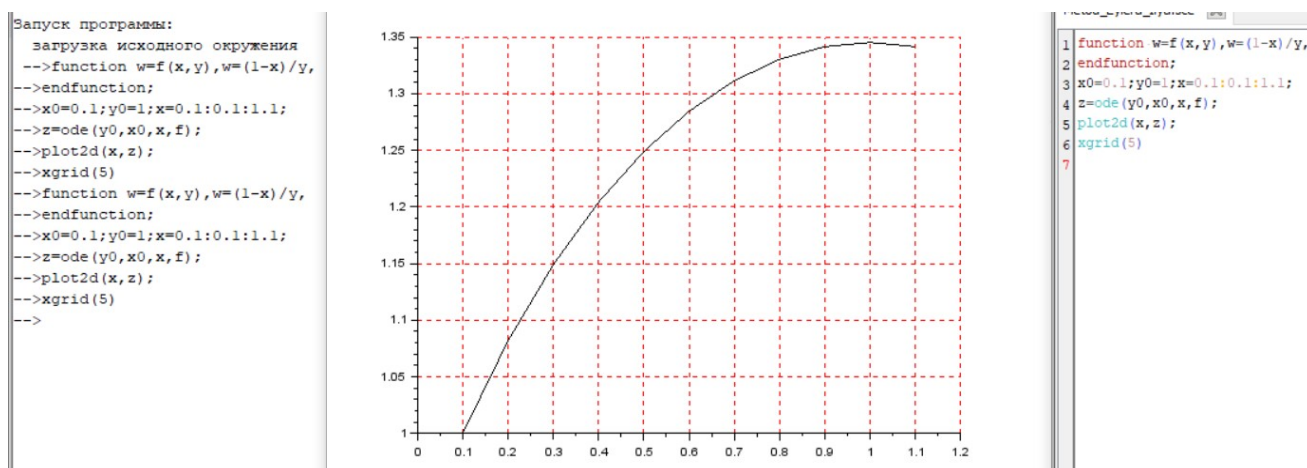
$$y_8 = 1,3648 + 0.1 * \frac{1-0.8}{1,3648} = 1,3794$$

$$y_9 = 1,3794 + 0.1 * \frac{1-0.9}{1,3794} = 1,3866$$

$$y_{10} = 1,3866 + 0.1 * \frac{1-1}{1,3866} = 1,3866$$



С помощью программы Scilab выполняем расчет методом Эйлера:



### СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вержбицкий В. М. Основы численных методов./В. М. Вержбицкий. –М.: Высш. шк., 2002.
2. Турчак Л. И. Основы численных методов/ Л. И. Турчак. – М.: Наука, 1987.
3. Агальцов В. П. Математические методы в программировании: учебник / В. П. Агальцов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ИД «ФОРУМ», 2010. – 240 с. (Профессиональное образование).
4. Информационно-справочная система «В помощь студентам». Форма доступа: <http://window.edu.ru>
5. Алексеев Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О.В.Чеснокова, Е. А.Рудченко. \_ М. : ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. \_ 260 с. (Библиотека ALT Linux).
6. Лапчик М. П. Численные методы : учебное пособие для студ. вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер.— М. : Академия, 2009.— 384 с.
7. Раевская Л.Т., ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ: учебное пособие /Л.Т. Раевская, А.Л. Карякин;- Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2021. – 128 с.





МИНОБРНАУКИ РФ  
ФБГБОУ ВО

«Уральский государственный горный  
университет»

**М. Е. Садовников**

## **НАДЁЖНОСТЬ, ДИАГНОСТИКА И ИСПЫТАНИЯ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ**

***Методические указания по организации  
самостоятельной работы для обучающихся  
направления 13.03.02 Электроэнергетика и  
электротехника, профиля бакалавриата  
Электротехнические комплексы и системы  
горных и промышленных предприятий***

Екатеринбург  
2021

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
1. Тематический план дисциплины .....	4
2. Тематика лабораторных, практических работ .....	5
3. Вопросы к зачёту по дисциплине .....	5
4. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины .....	7
4.1. Основная литература .....	7
4.2. Дополнительная литература .....	7
5. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем .....	8



## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;
- написание рефератов, докладов, эссе;
- подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;
- выполнение письменных контрольных и курсовых работ;
- подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;
- подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;
- другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчетно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

### **Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 1 – Тематический план дисциплины

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
1	Предмет науки о надёжности. Основные понятия, термины и определения	2	12	[1] с. 9...12, [2] с. 3...16
2	Этапы анализа и показатели надёжности технических систем (ТС)	6	12	[1] с. 13...30, [2] с. 17...34
3	Математические модели в теории надёжности ТС	6	12	[1] с. 35...103
4	Мероприятия по формированию надёжности на различных стадиях проектирования	4	12	[1] с. 107...111
5	Расчёт надёжности ТС. Методы расчёта надёжности	6	12	[1] с. 112...166

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
6	Методы повышения надёжности ТС	6	10	[1] с. 370...390, [2] с. 63...78
7	Техническая диагностика электрооборудования	6	12	[2] с. 159...174
8	Идентификация эксплуатационных отказов электрооборудования	6	12	Конспект лекций

\* см. методические указания к контрольной работе

## 2. ТЕМАТИКА ЛАБОРАТОРНЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Таблица 2 – Перечень лабораторных работ

Номер раздела и темы	Наименование тем лабораторных работ	Трудоёмкость, час	
		очная	заочная
7	Измерение сопротивления изоляции <i>Литература:</i> Конспект лекций	4	-
7	Измерение увлажнённости изоляции <i>Литература:</i> Конспект лекций	4	-
7	Проверка электрических схем. Прозвонка жгутов и кабелей. <i>Литература:</i> Конспект лекций	4	2
7	Определение полярности магнитосвязанных обмоток. <i>Литература:</i> Конспект лекций	4	-
Итого:		16	2

Таблица 3 – Перечень практических работ

Номер раздела и темы	Наименование тем практических работ	Трудоёмкость, час	
		очная	заочная
5	Расчёт надёжности по методу среднегрупповых показателей интенсивностей отказов. <i>Литература:</i> [1] с. 113...115	4	-
5	Расчёт надёжности по методу коэффициентов надёжности <i>Литература:</i> [1] с. 115...117	4	-
6	Разработка рекомендаций по повышению надёжности заданного электротехнического устройства (группы устройств). <i>Литература:</i> [1] с. 370...390	4	-
7	Испытания изоляции повышенным напряжением. <i>Литература:</i> Конспект лекций	4	2
Итого:		16	2

## 3. ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Предмет науки о надёжности.
2. Технический объект, элемент, система, подсистема.
3. Ремонтпригодные, неремонтпригодные, восстанавливаемые, невозстанавливаемые, самовосстанавливаемые объекты.
4. Эффективность, надёжность (безотказность, долговечность, ремонтпригодность, восстанавливаемость, сохраняемость, готовность).
5. Этапы жизни технического объекта, на которых формируется его надёжность.
6. Состояния объекта.

7. Повреждения, дефекты и отказы.
8. Классификация отказов.
9. Критерии и показатели надёжности.
10. Основные единичные количественные показатели безотказности невосстанавливаемых систем. Плотность распределения наработки до отказа.
11. Основные единичные количественные показатели безотказности невосстанавливаемых систем. Вероятность безотказной работы, вероятность отказа.
12. Основные единичные количественные показатели безотказности невосстанавливаемых систем. Частота отказов.
13. Основные единичные количественные показатели безотказности невосстанавливаемых систем. Интенсивность отказов.
14. Основные единичные количественные показатели безотказности невосстанавливаемых систем. Нарботка до отказа, средняя наработка до отказа.
15. Основные единичные количественные показатели безотказности восстанавливаемых систем. Параметр потока отказов.
16. Основные единичные количественные показатели безотказности восстанавливаемых систем. Средняя наработка между отказами.
17. Комплексные показатели надёжности. Коэффициенты готовности и неготовности.
18. Комплексные показатели надёжности. Коэффициент оперативной готовности.
19. Комплексные показатели надёжности. Коэффициент технического использования.
20. Комплексные показатели надёжности. Коэффициент сохранения эффективности.
21. Показатели ремонтпригодности, долговечности и сохраняемости. Показатели ремонтпригодности.
22. Показатели ремонтпригодности, долговечности и сохраняемости. Показатели долговечности.
23. Показатели ремонтпригодности, долговечности и сохраняемости. Показатели сохраняемости.
24. Постановка задачи расчёта надёжности.
25. Типы задач расчёта надёжности.
26. Порядок расчёта надёжности.
27. Расчёт надёжности по среднегрупповым значениям интенсивности отказов.
28. Расчёт надёжности по коэффициентам надёжности.
29. Расчёт надёжности с учётом условий эксплуатации.
30. Способы повышения надёжности. Повышение надёжности путём упрощения технической системы, улучшение организации и качества обслуживания.
31. Способы повышения надёжности. Внутриэлементная избыточность.
32. Способы повышения надёжности. Структурное резервирование.
33. Способы повышения надёжности. Временное резервирование, информационное резервирование, повышение ремонтпригодности.
34. Способы повышения надёжности.
35. Идентификация отказов.
36. Испытание изоляции повышенным напряжением постоянного тока.
37. Испытание изоляции повышенным напряжением переменного тока.
38. Разница в испытании изоляции повышенным напряжением постоянного и переменного тока.
39. Измерение тангенса угла диэлектрических потерь нормальным высоковольтным мостом.
40. Измерение тангенса угла диэлектрических потерь перевёрнутым высоковольтным мостом.

41. Измерение тангенса угла диэлектрических потерь ёмкостным мостом с заземлённой диагональю.
42. Метод частичных разрядов.
43. Измерение сопротивления заземляющих устройств.
44. Измерение сопротивления металлосвязи между заземляющим устройством и заземляемым оборудованием.
45. Измерение сопротивления петля «фаза-нуль».
46. Измерение сопротивление грунта.
47. Определение сопротивления эквивалентного грунта в двухслойных грунтах.
48. Прожигание изоляции кабелей на постоянном токе.
49. Прожигание изоляции на переменном токе.
50. Методы определения расстояния до мест повреждения в кабелях.
51. Определение расстояния до места повреждения в кабеле импульсным методом.
52. Определение расстояния до места повреждения в кабеле методом колебательного разряда.
53. Определение расстояния до места повреждения в кабеле петлевым методом.
54. Определение расстояния до места повреждения в кабеле индукционным методом.
55. Определение расстояния до места повреждения в кабеле акустическим методом.
56. Определение расстояния до места повреждения в кабеле методом измерения потенциалов.

#### **4. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

##### **4.1 Основная литература**

№ п/п	Наименование
1	Теория надёжности [Текст]: учебник для вузов / Острейковский В. А. - М.: Высш. шк., 2003. - 463 с.: ил.
2	Надёжность, оптимизация и диагностика автоматизированных систем [Текст]: учебник/ М. Л. Хазин. – Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. - 225 с.

##### **4.2 Дополнительная литература**

№ п/п	Наименование
3	Надёжность и диагностика систем управления [Текст]: учеб. пособие / Хазин М. Л., Боярских Г. А. - Екатеринбург: УГГГА, 2001. - 170 с.: рис.; табл. - Библиогр.: с. 157-158.
4	Надёжность технических систем [Текст]: учебное пособие / Г. А. Боярских, М. Л. Хазин; Уральская государственная горно-геологическая академия. - Екатеринбург: УГГГА, 2002. - 180 с.: рис., табл. - Библиогр.: с. 162.
5	Надёжность электрических машин [Текст]: учебное пособие / Н. Л. Кузнецов. - М.: Издательский дом МЭИ, 2006. - 432 с.: ил.

**5. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ**

1. Microsoft Windows 8 Professional.
2. Microsoft Office Standard 2013.

Информационные справочные системы  
ИПС «КонсультантПлюс».

Базы данных  
Scopus: база данных рефератов и цитирования.  
<https://www.scopus.com/customer/profile/display.uri>  
E-library: электронная научная библиотека: <https://elibrary.ru>



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный  
университет»

**П. А. Осипов**

## **СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ**

***Методические указания по организации  
самостоятельной работы для студентов  
направления 13.03.02 Электроэнергетика и  
электротехника, профиля бакалавриата  
Электротехнические комплексы и системы  
горных и промышленных предприятий***

**год набора: 2021**

Екатеринбург  
2020

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Тематический план дисциплины.....</b>	<b>4</b>
<b>2. Тематика лабораторных, практических работ .....</b>	<b>7</b>
<b>3. Вопросы к экзамену по дисциплине .....</b>	<b>7</b>
<b>4. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины .....</b>	<b>11</b>
<b>5. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины .....</b>	<b>11</b>
<b>6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем .....</b>	<b>12</b>



## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;
- написание рефератов, докладов, эссе;
- подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;
- выполнение письменных контрольных и курсовых работ;
- подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;
- подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;
- другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчетно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

### **Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 1 – Тематический план дисциплины

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
1	Назначение и классификация систем управления электроприводов. Обобщенная структура систем управления электроприводов Показатели качества управления выходными координатами	15	25	[1] с. 4...8
2	Методы анализа с использованием циклограмм и структурных формул булевой алгебры. Дискретные схемы программного управления в	15	25	[1] с. 29...68

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
	<p>многопозиционных электроприводах.</p> <p>Синтез дискретных систем управления электроприводов.</p> <p>Конечные автоматы – определение, диаграммы, функции и таблицы переходов и выходов.</p> <p>Структурный синтез конечных автоматов.</p> <p>Программирование конечных автоматов на языке лестничных диаграмм</p>			
3	<p>Принципы построения непрерывных систем управления электроприводов</p> <p>Электрический двигатель как объект управления</p> <p>Непрерывные системы управления скоростью электропривода постоянного тока с суммирующим усилителем. Узел токоограничения в системах управления скоростью электропривода</p> <p>Системы управления с подчиненным регулированием координат</p> <p>Оптимизация настроек контуров регулирования координат электроприводов и синтез регуляторов</p> <p>Система двухзонного регулирования скорости электропривода</p>	15	25	[1] с. 92...147
4	<p>Математическое описание асинхронной машины в неподвижной системе координат</p> <p>Прямые и обратные преобразования в неподвижных и вращающихся системах координат</p> <p>Математическое описание асинхронной машины с короткозамкнутым ротором во вращающейся системе координат</p> <p>Автономные инверторы напряжения</p> <p>Автономные инверторы тока</p> <p>Методы широтно-импульсной модуляции</p> <p>Способы скалярного управления асинхронным электродвигателем</p> <p>Разомкнутые системы скалярного управления асинхронным электродвигателем</p> <p>Замкнутые системы скалярного управления с обратной связью по скорости и ограничением тока электродвигателя</p> <p>Замкнутые системы скалярного управления с автономным инвертором тока</p> <p>Принципы векторного управления электроприводом переменного тока</p> <p>Структурная схема асинхронного электродвигателя при ориентации вращающейся системы координат по вектору потокосцепления ротора и управлении током статора</p> <p>Функциональная структура системы векторного управления с ориентацией вращающейся системы координат по вектору потокосцепления ротора</p>	15	25	[1] с. 179...234 [2] с. 9...57

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
	Алгоритмическая структура системы векторного управления Система прямого управления моментом асинхронного электродвигателя (DTC) Вентильный двигатель Математическое описание вентильной машины Система управления электропривода с вентильным двигателем			
5	Структура цифровой системы управления выходными координатами электропривода Квантование сигналов по уровню Квантование сигналов по времени, теорема о квантовании, методы восстановления сигналов Оператор сдвига и z-преобразование Методы аппроксимации линейных дифференциальных уравнений и выбор периода квантования Синтез цифровых систем управления электроприводов	17	23	[1] с. 256...296 [2] с. 137...169

\* см. методические указания к контрольной работе

## 2. ТЕМАТИКА ЛАБОРАТОРНЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Таблица 2 – Перечень лабораторных работ

Номер раздела и темы	Наименование тем лабораторных работ	Трудоемкость, час	
		очная	заочная
1, 3, 4.1, 4.2, 4.3	Изучение модели асинхронного короткозамкнутого двигателя.	4	4
1, 5.2, 5.3, 5.4	Цифровые системы управления электроприводов.	6	2
Итого:		10	6

Таблица 3 – Перечень практических работ

Номер раздела и темы	Наименование тем практических работ	Трудоёмкость, час	
		очная	заочная
2.1-2.6	Методы описания дискретных систем управления электроприводов. Структурный синтез автоматов дискретных систем управления электроприводов. Создание программ для логических контроллеров дискретных систем управления электроприводов.	3	
3.1-3.5	Управление скоростью и моментом электродвигателя. Расчет настроек контуров регулирования на модульный и симметричный оптимум. Изучение системы подчиненного регулирования.	2	
4.1, 4.2, 4.3	Изучение модели асинхронного короткозамкнутого двигателя.	1	
4.11, 4.13, 4.14	Векторное управление асинхронным электродвигателем.	2	
5.2, 5.3, 5.4	Цифровые системы управления электроприводов.	2	
Итого:		10	

## 3. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

№	Тема	Вопросы
1	Назначение и классификация систем управления электроприводов. Обобщенная структура систем управления электроприводов. Показатели качества управления выходными координатами	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Назначение, функции и структура системы управления электроприводом.</li> <li>2. Электрический двигатель как объект управления.</li> <li>3. Обобщенная структура систем управления электроприводов.</li> <li>4. Классификация систем управления электроприводов.</li> <li>5. Функции регулируемого электропривода. По каким координатам возможно регулирование в электроприводе?</li> <li>6. Назовите показатели качества управления выходными координатами.</li> <li>7. Задачи верхнего и нижнего уровня систем управления электроприводов.</li> <li>8. Отличия терминов «система управления и система автоматического управления».</li> <li>9. Назовите показатель для качества электропривода</li> </ol>

№	Тема	Вопросы
		<p>«регулируемость по скорости» вверх или вниз от номинальной.</p> <p>10. Поясните, почему для оценки быстродействия электропривода рекомендуется показатель качества <math>1/\omega_{п.п.}</math>, а не <math>\omega_{п.п.}</math>?</p> <p>11. Поясните, почему для оценки жесткости механической характеристики электропривода рекомендуется показатель качества <math>\delta</math>, а не <math>\beta</math>?</p>
2	<p>Методы анализа с использованием циклограмм и структурных формул булевой алгебры. Дискретные схемы программного управления в многопозиционных электроприводах. Синтез дискретных систем управления электроприводов. Конечные автоматы – определение, диаграммы, функции и таблицы переходов и выходов. Структурный синтез конечных автоматов. Программирование конечных автоматов на языке лестничных диаграмм</p>	<p>12. Поясните методы анализа с использованием циклограмм и структурных формул булевой алгебры.</p> <p>13. Последовательность синтеза дискретных систем управления электроприводов.</p> <p>14. Конечные автоматы – определение, диаграммы, функции и таблицы переходов и выходов.</p> <p>15. Алгоритм структурного синтеза конечных автоматов.</p> <p>16. Порядок программирования конечных автоматов на языке лестничных диаграмм.</p> <p>17. Структурный синтез конечных автоматов.</p> <p>18. Дискретные схемы программного управления в многопозиционных электроприводах.</p> <p>19. Программирование конечных автоматов на языке лестничных диаграмм.</p> <p>20. Синтез дискретных систем управления электроприводов.</p>
3	<p>Принципы построения непрерывных систем управления электроприводов. Электрический двигатель как объект управления. Непрерывные системы управления скоростью электропривода постоянного тока с суммирующим усилителем. Узел токоограничения в системах управления скоростью электропривода. Системы управления с подчиненным регулированием координат. Оптимизация настроек контуров регулирования координат электроприводов и синтез регуляторов. Система двухзонного регулирования скорости электропривода</p>	<p>21. Характеристики и математическое описание электрического двигателя как объекта управления.</p> <p>22. Структурная схема непрерывной системы управления скоростью электропривода постоянного тока с суммирующим усилителем.</p> <p>23. Недостатки схему с суммирующим усилителем.</p> <p>24. Узел токоограничения в системах управления скоростью электропривода.</p> <p>25. Способы ограничения электромагнитного момента при возрастании нагрузки на валу двигателя.</p> <p>26. Системы управления с подчиненным регулированием координат: структура, главный и подчиненный контур, достоинства и недостатки системы, сравнение с системой с суммирующим усилителем.</p> <p>27. Достоинства и недостатки системы управления с подчиненным регулированием координат.</p> <p>28. Оптимизация настроек контуров регулирования координат электроприводов и синтез регуляторов.</p> <p>29. Показатели качества электропривода при настройке контуров регулирования на симметричный оптимум.</p> <p>30. Показатели качества электропривода при настройке контуров регулирования на модульный оптимум.</p> <p>31. Система двухзонного регулирования скорости электропривода</p> <p>32. Отличие симметричного оптимума контура скорости от модельного оптимума?</p>

№	Тема	Вопросы
		<p>33. Назначение задающего устройства и блока ограничения выходного напряжения регулирования скорости?</p> <p>34. Примеры технологических установок, где целесообразно применение электропривода с двухзонным регулированием скорости.</p> <p>35. Поясните назначение контуров регулирования тока возбуждения и ЭДС двигателя в системах двухзонного регулирования</p> <p>36. Как изменение магнитного потока влияет на механические и электромеханические постоянные времени двигателя?</p>
4	<p>Математическое описание асинхронной машины в неподвижной системе координат. Прямые и обратные преобразования в неподвижных и вращающихся системах координат.</p> <p>Математическое описание асинхронной машины с короткозамкнутым ротором во вращающейся системе координат.</p> <p>Автономные инверторы напряжения. Автономные инверторы тока. Методы широтно-импульсной модуляции. Способы скалярного управления асинхронным электродвигателем.</p> <p>Разомкнутые системы скалярного управления асинхронным электродвигателем.</p> <p>Замкнутые системы скалярного управления с обратной связью по скорости и ограничением тока электродвигателя.</p> <p>Замкнутые системы скалярного управления с автономным инвертором тока. Принципы векторного управления электроприводом переменного тока.</p> <p>Структурная схема асинхронного электродвигателя при ориентации вращающейся системы координат по вектору потокосцепления</p>	<p>37. Математическое описание асинхронной машины в неподвижной системе координат.</p> <p>38. Прямые и обратные преобразования в неподвижных и вращающихся системах координат.</p> <p>39. Математическое описание асинхронной машины с короткозамкнутым ротором во вращающейся системе координат.</p> <p>40. Структура, достоинства и недостатки автономных инверторов напряжения и тока.</p> <p>41. Методы широтно-импульсной модуляции.</p> <p>42. Автономные инверторы напряжения и тока.</p> <p>43. Способы и законы скалярного управления асинхронным электродвигателем.</p> <p>44. Разомкнутые системы скалярного управления асинхронным электродвигателем: структура, достоинства, недостатки и области применения.</p> <p>45. Замкнутые системы скалярного управления с обратной связью по скорости и ограничением тока электродвигателя: структура, достоинства, недостатки и области применения.</p> <p>46. Замкнутые системы скалярного управления с автономным инвертором тока: структура, достоинства, недостатки и области применения.</p> <p>47. Принципы векторного управления электроприводом переменного тока: структура, достоинства, недостатки и области применения.</p> <p>48. Структурная схема асинхронного электродвигателя при ориентации вращающейся системы координат по вектору потокосцепления ротора и управлении током статора.</p> <p>49. Функциональная структура системы векторного управления с ориентацией вращающейся системы координат по вектору потокосцепления ротора.</p> <p>50. Алгоритмическая структура системы векторного управления.</p> <p>51. Система прямого управления моментом асинхронного электродвигателя (DTC).</p> <p>52. Вентильный двигатель: характеристики, достоинства, недостатки и области применения.</p> <p>53. Математическое описание вентильной машины.</p> <p>54. Система управления электропривода с вентильным двигателем</p>

№	Тема	Вопросы
	<p>ротора и управлении током статора. Функциональная структура системы векторного управления с ориентацией вращающейся системы координат по вектору потокосцепления ротора. Алгоритмическая структура системы векторного управления. Система прямого управления моментом асинхронного электродвигателя (DTC). Вентильный двигатель. Математическое описание вентильной машины. Система управления электропривода с вентильным двигателем</p>	
5	<p>Структура цифровой системы управления выходными координатами электропривода. Квантование сигналов по уровню. Квантование сигналов по времени, теорема о квантовании, методы восстановления сигналов. Оператор сдвига и z-преобразование. Методы аппроксимации линейных дифференциальных уравнений и выбор периода квантования. Синтез цифровых систем управления электроприводов</p>	<p>55. Структура цифровой системы управления выходными координатами электропривода.  56. Квантование сигналов по уровню.  57. Квантование сигналов по времени, теорема о квантовании, методы восстановления сигналов.  58. Оператор сдвига и z-преобразование.  59. Методы аппроксимации линейных дифференциальных уравнений и выбор периода квантования.  60. Синтез цифровых систем управления электроприводов</p>



## **4. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **4.1 Основная литература**

1. Терехов В. М., Осипов О.И. Системы управления электроприводов. — М., Изд. центр «Академия», 2005 – 300 с.
2. Соколовский Г. Г. Электроприводы переменного тока с частотным регулированием: учебн. пособие — М., Изд. центр «Академия», 2006 – 272 с.

### **4.2 Дополнительная литература**

3. Башарин А. В., Новиков В. А., Соколовский Г. Г. Управление электроприводами – Л. Энергоиздат, 1982 – 392 с.
4. Бабенко А.Г. Цифровые системы управления. – Изд-во УГГУ, 2005 – 325 с.
5. Остром К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. – М. Мир, 1987 – 480 с.
6. Шенфельд Р., Хабинер Э. Автоматизированные электроприводы. – Л. Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1985 – 464 с.
7. Носырев М.Б., Карякин А.Л. Расчеты и моделирование САУ главных электроприводов одноковшовых экскаваторов. Учебное пособие. Свердловск, изд-во СГИ, 1987 – 88 с.
8. Герман-Галкин С. Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в Matlab 6.0. Учебное пособие. СПб., Корона принт, 2001 – 320 с.
9. Черных И.В. Моделирование электротехнических устройств в Matlab, SimPowerSystem и Simulink. – М.: ДМК Пресс; СПб, Питер, 2008. – 288 с.

**5. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ  
ИНФОРМАЦИОННОТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ  
«ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

1. Официальный сайт ПО Apache OpenOffice - свободный и открытый офисный пакет – <https://www.openoffice.org/ru/>
2. Schneider Electric Zelio-Soft - <https://www.schneider-electric.ru/ru/product-range-presentation/542-zelio-soft/>
3. Инженерное ПО MathWork MATLAB и MathWork Simulink - <https://www.mathworks.com>
4. Образовательный проект «Экспонента: MATLAB, Simulink, Центр - ЦИТМ Экспонента» - <https://exponenta.ru>

**6. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ  
ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО  
ДИСЦИПЛИНЕ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНОГО  
ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ**

1. Microsoft Windows 10 Professional
2. Apache Open Office (бесплатный пакет офисных программ)
3. Schneider Electric Zelio-Soft (бесплатный пакет программ для программирования контроллеров)
4. Инженерное ПО MathWork MATLAB и MathWork Simulink

Информационные справочные системы  
ИПС «КонсультантПлюс».

Базы данных

Scopus: база данных рефератов и цитирования.

<https://www.scopus.com/customer/profile/display.uri>

E-library: электронная научная библиотека: <https://elibrary.ru>



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный  
университет»

**П. А. Осипов**

**Компьютерная и микропроцессорная  
техника в системах управления  
электроприводов**

***Методические указания по организации  
самостоятельной работы для студентов  
направления 13.03.02 Электроэнергетика и  
электротехника, профиля бакалавриата  
Электротехнические комплексы и системы  
горных и промышленных предприятий***

**год набора: 2021**

**Екатеринбург  
2020**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Тематический план дисциплины.....</b>	<b>4</b>
<b>2. Тематика лабораторных, практических работ .....</b>	<b>7</b>
<b>3. Вопросы к экзамену по дисциплине .....</b>	<b>7</b>
<b>4. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины .....</b>	<b>11</b>
<b>5. Перечень ресурсов информационнотелекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины .....</b>	<b>11</b>
<b>6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем .....</b>	<b>12</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;
- написание рефератов, докладов, эссе;
- подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;
- выполнение письменных контрольных и курсовых работ;
- подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;
- подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;
- другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчетно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

### **Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 1 – Тематический план дисциплины

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
1	Назначение и классификация систем управления электроприводов. Обобщенная структура систем управления электроприводов Показатели качества управления выходными координатами	15	25	[1] с. 4...8
2	Методы анализа с использованием циклограмм и структурных формул булевой алгебры. Дискретные схемы программного управления в	15	25	[1] с. 29...68

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
	<p>многопозиционных электроприводах.</p> <p>Синтез дискретных систем управления электроприводов.</p> <p>Конечные автоматы – определение, диаграммы, функции и таблицы переходов и выходов.</p> <p>Структурный синтез конечных автоматов.</p> <p>Программирование конечных автоматов на языке лестничных диаграмм</p>			
3	<p>Принципы построения непрерывных систем управления электроприводов</p> <p>Электрический двигатель как объект управления</p> <p>Непрерывные системы управления скоростью электропривода постоянного тока с суммирующим усилителем. Узел токоограничения в системах управления скоростью электропривода</p> <p>Системы управления с подчиненным регулированием координат</p> <p>Оптимизация настроек контуров регулирования координат электроприводов и синтез регуляторов</p> <p>Система двухзонного регулирования скорости электропривода</p>	15	25	[1] с. 92...147
4	<p>Математическое описание асинхронной машины в неподвижной системе координат</p> <p>Прямые и обратные преобразования в неподвижных и вращающихся системах координат</p> <p>Математическое описание асинхронной машины с короткозамкнутым ротором во вращающейся системе координат</p> <p>Автономные инверторы напряжения</p> <p>Автономные инверторы тока</p> <p>Методы широтно-импульсной модуляции</p> <p>Способы скалярного управления асинхронным электродвигателем</p> <p>Разомкнутые системы скалярного управления асинхронным электродвигателем</p> <p>Замкнутые системы скалярного управления с обратной связью по скорости и ограничением тока электродвигателя</p> <p>Замкнутые системы скалярного управления с автономным инвертором тока</p> <p>Принципы векторного управления электроприводом переменного тока</p> <p>Структурная схема асинхронного электродвигателя при ориентации вращающейся системы координат по вектору потокосцепления ротора и управлении током статора</p> <p>Функциональная структура системы векторного управления с ориентацией вращающейся системы координат по вектору потокосцепления ротора</p>	15	25	[1] с. 179...234 [2] с. 9...57

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
	Алгоритмическая структура системы векторного управления Система прямого управления моментом асинхронного электродвигателя (DTC) Вентильный двигатель Математическое описание вентильной машины Система управления электропривода с вентильным двигателем			
5	Структура цифровой системы управления выходными координатами электропривода Квантование сигналов по уровню Квантование сигналов по времени, теорема о квантовании, методы восстановления сигналов Оператор сдвига и z-преобразование Методы аппроксимации линейных дифференциальных уравнений и выбор периода квантования Синтез цифровых систем управления электроприводов	17	23	[1] с. 256...296 [2] с. 137...169

\* см. методические указания к контрольной работе



## 2. ТЕМАТИКА ЛАБОРАТОРНЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Таблица 2 – Перечень лабораторных работ

Номер раздела и темы	Наименование тем лабораторных работ	Трудоемкость, час	
		очная	заочная
1, 3, 4.1, 4.2, 4.3	Изучение модели асинхронного короткозамкнутого двигателя.	4	4
1, 5.2, 5.3, 5.4	Цифровые системы управления электроприводов.	6	2
Итого:		10	6

Таблица 3 – Перечень практических работ

Номер раздела и темы	Наименование тем практических работ	Трудоёмкость, час	
		очная	заочная
2.1-2.6	Методы описания дискретных систем управления электроприводов. Структурный синтез автоматов дискретных систем управления электроприводов. Создание программ для логических контроллеров дискретных систем управления электроприводов.	3	
3.1-3.5	Управление скоростью и моментом электродвигателя. Расчет настроек контуров регулирования на модульный и симметричный оптимум. Изучение системы подчиненного регулирования.	2	
4.1, 4.2, 4.3	Изучение модели асинхронного короткозамкнутого двигателя.	1	
4.11, 4.13, 4.14	Векторное управление асинхронным электродвигателем.	2	
5.2, 5.3, 5.4	Цифровые системы управления электроприводов.	2	
Итого:		10	

## 3. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

№	Тема	Вопросы
1	Назначение и классификация систем управления электроприводов. Обобщенная структура систем управления электроприводов. Показатели качества управления выходными координатами	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Назначение, функции и структура системы управления электроприводом.</li> <li>2. Электрический двигатель как объект управления.</li> <li>3. Обобщенная структура систем управления электроприводов.</li> <li>4. Классификация систем управления электроприводов.</li> <li>5. Функции регулируемого электропривода. По каким координатам возможно регулирование в электроприводе?</li> <li>6. Назовите показатели качества управления выходными координатами.</li> <li>7. Задачи верхнего и нижнего уровня систем управления электроприводов.</li> <li>8. Отличия терминов «система управления и система автоматического управления».</li> <li>9. Назовите показатель для качества электропривода «регулируемость по скорости» вверх или вниз от</li> </ol>

№	Тема	Вопросы
		<p>номинальной.</p> <p>10. Поясните, почему для оценки быстродействия электропривода рекомендуется показатель качества <math>1/\omega_{п.п.}</math>, а не <math>\omega_{п.п.}</math>?</p> <p>11. Поясните, почему для оценки жесткости механической характеристики электропривода рекомендуется показатель качества <math>\delta</math>, а не <math>\beta</math>?</p>
2	<p>Методы анализа с использованием циклограмм и структурных формул булевой алгебры. Дискретные схемы программного управления в многопозиционных электроприводах. Синтез дискретных систем управления электроприводов. Конечные автоматы – определение, диаграммы, функции и таблицы переходов и выходов. Структурный синтез конечных автоматов. Программирование конечных автоматов на языке лестничных диаграмм</p>	<p>12. Поясните методы анализа с использованием циклограмм и структурных формул булевой алгебры.</p> <p>13. Последовательность синтеза дискретных систем управления электроприводов.</p> <p>14. Конечные автоматы – определение, диаграммы, функции и таблицы переходов и выходов.</p> <p>15. Алгоритм структурного синтеза конечных автоматов.</p> <p>16. Порядок программирования конечных автоматов на языке лестничных диаграмм.</p> <p>17. Структурный синтез конечных автоматов.</p> <p>18. Дискретные схемы программного управления в многопозиционных электроприводах.</p> <p>19. Программирование конечных автоматов на языке лестничных диаграмм.</p> <p>20. Синтез дискретных систем управления электроприводов.</p>
3	<p>Принципы построения непрерывных систем управления электроприводов. Электрический двигатель как объект управления. Непрерывные системы управления скоростью электропривода постоянного тока с суммирующим усилителем. Узел токоограничения в системах управления скоростью электропривода. Системы управления с подчиненным регулированием координат. Оптимизация настроек контуров регулирования координат электроприводов и синтез регуляторов. Система двухзонного регулирования скорости электропривода</p>	<p>21. Характеристики и математическое описание электрического двигателя как объекта управления.</p> <p>22. Структурная схема непрерывной системы управления скоростью электропривода постоянного тока с суммирующим усилителем.</p> <p>23. Недостатки схему с суммирующим усилителем.</p> <p>24. Узел токоограничения в системах управления скоростью электропривода.</p> <p>25. Способы ограничения электромагнитного момента при возрастании нагрузки на валу двигателя.</p> <p>26. Системы управления с подчиненным регулированием координат: структура, главный и подчиненный контур, достоинства и недостатки системы, сравнение с системой с суммирующим усилителем.</p> <p>27. Достоинства и недостатки системы управления с подчиненным регулированием координат.</p> <p>28. Оптимизация настроек контуров регулирования координат электроприводов и синтез регуляторов.</p> <p>29. Показатели качества электропривода при настройке контуров регулирования на симметричный оптимум.</p> <p>30. Показатели качества электропривода при настройке контуров регулирования на модульный оптимум.</p> <p>31. Система двухзонного регулирования скорости электропривода</p> <p>32. Отличие симметричного оптимума контура скорости от модельного оптимума?</p> <p>33. Назначение задающего устройства и блока</p>

№	Тема	Вопросы
		<p>ограничения выходного напряжения регулирования скорости?</p> <p>34. Примеры технологических установок, где целесообразно применение электропривода с двухзонным регулированием скорости.</p> <p>35. Поясните назначение контуров регулирования тока возбуждения и ЭДС двигателя в системах двухзонного регулирования</p> <p>36. Как изменение магнитного потока влияет на механические и электромеханические постоянные времени двигателя?</p>
4	<p>Математическое описание асинхронной машины в неподвижной системе координат. Прямые и обратные преобразования в неподвижных и вращающихся системах координат.</p> <p>Математическое описание асинхронной машины с короткозамкнутым ротором во вращающейся системе координат.</p> <p>Автономные инверторы напряжения. Автономные инверторы тока. Методы широтно-импульсной модуляции. Способы скалярного управления асинхронным электродвигателем.</p> <p>Разомкнутые системы скалярного управления асинхронным электродвигателем.</p> <p>Замкнутые системы скалярного управления с обратной связью по скорости и ограничением тока электродвигателя.</p> <p>Замкнутые системы скалярного управления с автономным инвертором тока. Принципы векторного управления электроприводом переменного тока.</p> <p>Структурная схема асинхронного электродвигателя при ориентации вращающейся системы координат по вектору потокосцепления ротора и управлении током</p>	<p>37. Математическое описание асинхронной машины в неподвижной системе координат.</p> <p>38. Прямые и обратные преобразования в неподвижных и вращающихся системах координат.</p> <p>39. Математическое описание асинхронной машины с короткозамкнутым ротором во вращающейся системе координат.</p> <p>40. Структура, достоинства и недостатки автономных инверторов напряжения и тока.</p> <p>41. Методы широтно-импульсной модуляции.</p> <p>42. Автономные инверторы напряжения и тока.</p> <p>43. Способы и законы скалярного управления асинхронным электродвигателем.</p> <p>44. Разомкнутые системы скалярного управления асинхронным электродвигателем: структура, достоинства, недостатки и области применения.</p> <p>45. Замкнутые системы скалярного управления с обратной связью по скорости и ограничением тока электродвигателя: структура, достоинства, недостатки и области применения.</p> <p>46. Замкнутые системы скалярного управления с автономным инвертором тока: структура, достоинства, недостатки и области применения.</p> <p>47. Принципы векторного управления электроприводом переменного тока: структура, достоинства, недостатки и области применения.</p> <p>48. Структурная схема асинхронного электродвигателя при ориентации вращающейся системы координат по вектору потокосцепления ротора и управлении током статора.</p> <p>49. Функциональная структура системы векторного управления с ориентацией вращающейся системы координат по вектору потокосцепления ротора.</p> <p>50. Алгоритмическая структура системы векторного управления.</p> <p>51. Система прямого управления моментом асинхронного электродвигателя (DTC).</p> <p>52. Вентильный двигатель: характеристики, достоинства, недостатки и области применения.</p> <p>53. Математическое описание вентильной машины.</p> <p>54. Система управления электропривода с вентильным двигателем</p>

№	Тема	Вопросы
	<p>статора. Функциональная структура системы векторного управления с ориентацией вращающейся системы координат по вектору потокосцепления ротора. Алгоритмическая структура системы векторного управления. Система прямого управления моментом асинхронного электродвигателя (DTC). Вентильный двигатель. Математическое описание вентильной машины. Система управления электропривода с вентильным двигателем</p>	
5	<p>Структура цифровой системы управления выходными координатами электропривода. Квантование сигналов по уровню. Квантование сигналов по времени, теорема о квантовании, методы восстановления сигналов. Оператор сдвига и z-преобразование. Методы аппроксимации линейных дифференциальных уравнений и выбор периода квантования. Синтез цифровых систем управления электроприводов</p>	<p>55. Структура цифровой системы управления выходными координатами электропривода.  56. Квантование сигналов по уровню.  57. Квантование сигналов по времени, теорема о квантовании, методы восстановления сигналов.  58. Оператор сдвига и z-преобразование.  59. Методы аппроксимации линейных дифференциальных уравнений и выбор периода квантования.  60. Синтез цифровых систем управления электроприводов</p>

## **4. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **4.1 Основная литература**

1. Терехов В. М., Осипов О.И. Системы управления электроприводов. — М., Изд. центр «Академия», 2005 – 300 с.
2. Соколовский Г. Г. Электроприводы переменного тока с частотным регулированием: учебн. пособие — М., Изд. центр «Академия», 2006 – 272 с.

### **4.2 Дополнительная литература**

3. Башарин А. В., Новиков В. А., Соколовский Г. Г. Управление электроприводами – Л. Энергоиздат, 1982 – 392 с.
4. Бабенко А.Г. Цифровые системы управления. – Изд-во УГГУ, 2005 – 325 с.
5. Остром К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. – М. Мир, 1987 – 480 с.
6. Шенфельд Р., Хабинер Э. Автоматизированные электроприводы. – Л. Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1985 – 464 с.
7. Носырев М.Б., Карякин А.Л. Расчеты и моделирование САУ главных электроприводов одноковшовых экскаваторов. Учебное пособие. Свердловск, изд-во СГИ, 1987 – 88 с.
8. Герман-Галкин С. Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в Matlab 6.0. Учебное пособие. СПб., Корона принт, 2001 – 320 с.
9. Черных И.В. Моделирование электротехнических устройств в Matlab, SimPowerSystem и Simulink. – М.: ДМК Пресс; СПб, Питер, 2008. – 288 с.

**5. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ  
ИНФОРМАЦИОННОТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ  
«ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

1. Официальный сайт ПО Apache OpenOffice - свободный и открытый офисный пакет – <https://www.openoffice.org/ru/>
2. Schneider Electric Zelio-Soft - <https://www.schneider-electric.ru/ru/product-range-presentation/542-zelio-soft/>
3. Инженерное ПО MathWork MATLAB и MathWork Simulink - <https://www.mathworks.com>
4. Образовательный проект «Экспонента: MATLAB, Simulink, Центр - ЦИТМ Экспонента» - <https://exponenta.ru>

**6. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ  
ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО  
ДИСЦИПЛИНЕ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНОГО  
ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ**

1. Microsoft Windows 10 Professional
2. Apache Open Office (бесплатный пакет офисных программ)
3. Schneider Electric Zelio-Soft (бесплатный пакет программ для программирования контроллеров)
4. Инженерное ПО MathWork MATLAB и MathWork Simulink

Информационные справочные системы  
ИПС «КонсультантПлюс».

Базы данных

Scopus: база данных рефератов и цитирования.

<https://www.scopus.com/customer/profile/display.uri>

E-library: электронная научная библиотека: <https://elibrary.ru>

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому комплексу \_\_\_\_\_ С.А.Упоров

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

### Б1.Б.01 ФИЛОСОФИЯ

Направление подготовки

*13.03.02 Электроэнергетика и электротехника*

Профиль

*Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий*

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Гладкова И. В., доцент, канд. филос. н.

Одобрена на заседании кафедры

Рассмотрена методической комиссией

Философии и культурологии

*(название кафедры)*

Зав. кафедрой

*(подпись)*

Беляев В. П.

*(Фамилия И.О.)*

Протокол №1 от 01.09.2021

*(Дата)*

Горно-механического факультета

*(название факультета)*

Председатель

*(подпись)*

Осипов П. А.

*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 2 от 12.10.2021

*(Дата)*

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по работе с текстом лекций	5
2	Методические рекомендации по подготовке к опросу	8
3	Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)	9
4	Методические рекомендации по написанию эссе	11
5	Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям	14
6	Методические рекомендации по подготовке к дискуссии	15
7	Методические рекомендации по написанию реферата	17
8	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	19
	Заключение	21
	Список использованных источников	22



## ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

**Самостоятельная работа студента (СРС)** - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

**Самостоятельная работа студента** - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;

- освоение информации и ее логическая переработка;
- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблеме;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельной работе, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

## 1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить описки, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тестов по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

## 2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

### *Письменный опрос*

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

### *Устный опрос*

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии<sup>1</sup>.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: [http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii\\_dlya\\_studentov\\_21.pdf](http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf)

<sup>2</sup> Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: [http://priab.ru/images/metod\\_agro/Metod\\_Inostran\\_yazyk\\_35.03.04\\_Agro\\_15.01.2016.pdf](http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf)

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем времени на подготовку к устному опросу зависит от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

### 3. Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

*Доклад должен соответствовать следующим требованиям:*

- тема доклада должна быть согласована с преподавателем и соответствовать теме занятия;
- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;
- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны соответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;
- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)
2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.
3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

#### ***Общая структура доклада***

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

#### ***Вступление.***

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;

- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

**Основная часть.**

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки) Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

**Заключение.**

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

<i>Критерии оценки доклада, сообщения</i>	<i>Количество баллов</i>
Содержательность, информационная насыщенность доклада	1
Наличие аргументов	1
Наличие выводов	1
Наличие презентации доклада	1
Владение профессиональной лексикой	1
Итого:	5

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов



#### 4. Методические рекомендации по написанию эссе

*Эссе* - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

##### *Структура эссе*

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);

2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершенно необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

#### ***Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе***

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

*Тезис* - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

#### ***Требования к фактическим данным и другим источникам***

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедиться в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

### ***Как подготовить и написать эссе?***

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

*Планирование* - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

*Цель* должна определять действия.

*Идеи*, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

*Аналогии* - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

*Ассоциации* - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

*Предположения* - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

*Рассуждения* - формулировка и доказательство мнений.

*Аргументация* - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

*Суждение* - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

*Доводы* - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники*. Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

*Качество текста* складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

*Мысль* - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

*Внятность* - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

*Грамотность* отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

*Корректность* — это стиль написанного. Стиль определяется жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

## 5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогов обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

## 6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия*, где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

*Дискуссия* (от лат. discussio - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

*Дискуссия* обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обусловливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

*Дискуссия- диалог* чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

*Дискуссия - спор* используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,
- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;
- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;
- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;
- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

**Подготовка студентов к дискуссии:** если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

**В проведении дискуссии** выделяется несколько этапов.

**Этап 1-й, введение в дискуссию:** формулирование проблемы и целей дискуссии; определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

**Этап 2-й, обсуждение проблемы:** обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

**Этап 3-й, подведение итогов обсуждения:** выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

## 7. Методические рекомендации по написанию реферата

Слово "реферат" (от латинского – *referre* – докладывать, сообщать) означает сжатое изложение в устной или письменной форме содержания какого-либо вопроса или темы на основе критического обзора информации.

Написание реферата - вид самостоятельной работы студента, содержащий информацию, дополняющую и развивающую основную тему, изучаемую на аудиторных занятиях. Реферат может включать обзор нескольких источников и служить основой для доклада на семинарах, конференциях.

При подготовке реферата необходимо соблюдать следующие правила.

Ясно и четко сформулировать цель и задачи реферата, отражающие тему или решение проблемы.

Найти литературу по выбранной теме; составить перечень источников, обязательных к прочтению.

Только после предварительной подготовки следует приступать к написанию реферата. Прежде всего, составить план, выделить в нем части.

*Введение.* В этом разделе раскрывается цель и задачи работы; здесь необходимо сформулировать проблему, которая будет проанализирована в реферате, изложить своё отношение к ней, то есть мотивацию выбора; определить особенность постановки данной проблемы авторами изученной литературы; объяснить актуальность и социальную значимость выбранной темы.

*Основная часть.* Разделы, главы, параграфы основной части должны быть направлены на рассмотрение узловых моментов в теме реферата. Изложение содержания изученной литературы предполагает его критическое осмысление, глубокий логический анализ.

Каждый раздел основной части реферата предполагает детальное изучение отдельного вопроса темы и последовательное изложение структуры текстового материала с обязательными ссылками на первоисточник. В целом, содержание основной части должно отражать позиции отдельных авторов, сравнительную характеристику этих позиций, выделение узловых вопросов дискурса по выбранной для исследования теме.

*Заключение.* В заключении автор реферата должен сформулировать личную позицию в отношении изученной проблемы и предложить, может быть, свои способы её решения. Целесообразно сделать общие выводы по теме реферата и ещё раз отметить её актуальность и социальную значимость.

*Список использованных источников и литературы.*

Написание рефератов является одной из форм обучения студентов, направленной на организацию и повышение уровня самостоятельной работы, а также на усиление контроля за этой работой.

В отличие от теоретических семинаров, при проведении которых приобретаются, в частности, навыки высказывания своих суждений и изложения мнений других авторов в устной форме, написание рефератов формирует навыки изложения своих мыслей в письменной форме грамотным языком, хорошим стилем.

В зависимости от содержания и назначения в учебном процессе рефераты можно подразделить на два основных типа: научно-проблемные и обзорно-информационные.

*Научно-проблемный реферат.* При написании такого реферата следует изучить и кратко изложить имеющиеся в литературе суждения по определенному, спорному в теории, вопросу (проблеме) по данной теме, высказать по этому вопросу (проблеме) собственную точку зрения с соответствующим ее обоснованием.

*Обзорно-информационный реферат.* Разновидностями такого реферата могут быть следующие:

1) краткое изложение основных положений той или иной книги, монографии, содержащих материалы, относящиеся к изучаемой теме по курсу дисциплины;

2) подбор и краткое изложение содержания статей по определенной проблеме (теме, вопросу), опубликованных в различных журналах за определенный период, либо в сборниках («научных трудах», «ученых записках» и т.д.).

Темы рефератов определяются преподавателем. Литература либо рекомендуется преподавателем, либо подбирается аспирантами самостоятельно, что является одним из элементов самостоятельной работы.

Объем реферата должен быть в пределах 15 страниц машинописного текста через 1,5 интервала. При оформлении реферата необходимо ориентироваться на правила и установленные стандарты для учебных и научных работ.

Реферат сдается в указанные преподавателем сроки.

Критерии оценивания:

- достижение поставленной цели и задач исследования (новизна и актуальность поставленных в реферате проблем, правильность формулирования цели, определения задач исследования, правильность выбора методов решения задач и реализации цели; соответствие выводов решаемым задачам, поставленной цели, убедительность выводов);

- уровень эрудированности автора по изученной теме (знание автором состояния изучаемой проблематики, цитирование источников, степень использования в работе результатов исследований);

- личные заслуги автора реферата (новые знания, которые получены помимо основной образовательной программы, новизна материала и рассмотренной проблемы, научное значение исследуемого вопроса);

- культура письменного изложения материала (логичность подачи материала, грамотность автора);

- культура оформления материалов работы (соответствие реферата всем стандартным требованиям);

- знания и умения на уровне требований стандарта данной дисциплины: знание фактического материала, усвоение общих понятий и идей;

- степень обоснованности аргументов и обобщений (полнота, глубина, всестороннее раскрытие темы, корректность аргументации и системы доказательств, характер и достоверность примеров, иллюстративного материала, наличие знаний интегрированного характера, способность к обобщению);

- качество и ценность полученных результатов (степень завершенности реферативного исследования, спорность или однозначность выводов);

- корректное использование литературных источников, грамотное оформление ссылок.

## **8. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов**



**Экзамен** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы (проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неувоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадет на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие

вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неусттомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и,

следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

- 1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;
- 2) добросовестное выполнение заданий;
- 3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;
- 4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;
- 5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;
- 6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;
- 7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html>
2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml>
3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

## ВСЕОБЩАЯ ИСТОРИЯ

Направление подготовки  
**13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**

Профиль  
**Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий**

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Абрамов С. М., к.пед.н., доцент

Одобрены на заседании кафедры

Управления персоналом

(название кафедры)

Зав. кафедрой

(подпись)

Ветошкина Т.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 16.09.2021

(Дата)

Рассмотрены методической комиссией

Горно-механического факультета

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ.....	6
ПОДГОТОВКА К ДОКЛАДУ.....	10
ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ..	15
ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ.....	18
ПОДГОТОВКА К РЕШЕНИЮ КЕЙСОВ.....	19
ПОДГОТОВКА К ОПРОСУ.....	22
ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ.....	24



## ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа в высшем учебном заведении – это часть учебного процесса, метод обучения, прием учебно-познавательной деятельности, комплексная целевая стандартизованная учебная деятельность с запланированными видом, типом, формами контроля.

Самостоятельная работа представляет собой плановую деятельность обучающихся по поручению и под методическим руководством преподавателя.

Целью самостоятельной работы студентов является закрепление тех знаний, которые они получили на аудиторных занятиях, а также способствование развитию у студентов творческих навыков, инициативы, умению организовать свое время.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- предполагает освоение курса дисциплины;
- помогает освоению навыков учебной и научной работы;
- способствует осознанию ответственности процесса познания;
- способствует углублению и пополнению знаний студентов, освоению ими навыков и умений;
- формирует интерес к познавательным действиям, освоению методов и приемов познавательного процесса,
- создает условия для творческой и научной деятельности обучающихся;
- способствует развитию у студентов таких личных качеств, как целеустремленность, заинтересованность, исследование нового.

Самостоятельная работа обучающегося выполняет следующие функции:

- развивающую (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей студентов);
- информационно-обучающую (учебная деятельность студентов на аудиторных занятиях, неподкрепленная самостоятельной работой, становится мало результативной);
- ориентирующую и стимулирующую (процессу обучения придается ускорение и мотивация);
- воспитательную (формируются и развиваются профессиональные качества бакалавра и гражданина);
- исследовательскую (новый уровень профессионально-творческого мышления).

Организация самостоятельной работы студентов должна опираться на определенные требования, а, именно:

- сложность осваиваемых знаний должна соответствовать уровню развития студентов;

- стандартизация заданий в соответствии с логической системой курса дисциплины;

- объем задания должен соответствовать уровню студента;

- задания должны быть адаптированными к уровню студентов.

Содержание самостоятельной работы студентов представляет собой, с одной стороны, совокупность теоретических и практических учебных заданий, которые должен выполнить студент в процессе обучения, объект его деятельности; с другой стороны – это способ деятельности студента по выполнению соответствующего теоретического или практического учебного задания.

Свое внешнее выражение содержание самостоятельной работы студентов находит во всех организационных формах аудиторной и внеаудиторной деятельности, в ходе самостоятельного выполнения различных заданий.

Функциональное предназначение самостоятельной работы студентов в процессе практических занятий по овладению специальными знаниями заключается в самостоятельном прочтении, просмотре, прослушивании, наблюдении, конспектировании, осмыслении, запоминании и воспроизведении определенной информации. Цель и планирование самостоятельной работы студента определяет преподаватель. Вся информация осуществляется на основе ее воспроизведения.

Так как самостоятельная работа тесно связана с учебным процессом, ее необходимо рассматривать в двух аспектах:

1. аудиторная самостоятельная работа – практические занятия;

2. внеаудиторная самостоятельная работа – подготовка к практическим занятиям, подготовка к устному опросу, участию в дискуссиях, решению практико-ориентированных задач и др.

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;

- уровень образования и степень подготовленности студентов;

- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

Таким образом, самостоятельная работа студентов является важнейшей составной частью процесса обучения.

Методические указания по организации самостоятельной работы и задания для обучающихся по дисциплине «*Всеобщая история*» обращают внимание студента на главное, существенное в изучаемой дисциплине, помогают выработать умение анализировать явления и факты, связывать теоретические положения с практикой, а также облегчают подготовку к выполнению *контрольной работы* и к сдаче *зачета*.

Настоящие методические указания позволят студентам самостоятельно овладеть фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю подготовки, опытом творческой и

исследовательской деятельности, и направлены на формирование компетенций, предусмотренных учебным планом поданному профилю.

Видами самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «*Всеобщая история*» являются:

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение тем курса (в т. ч. рассмотрение основных категорий дисциплины, работа с литературой);
- подготовка к практическим (семинарским) занятиям (в т. ч. подготовка доклада, подготовка к выполнению практико-ориентированного задания);
- подготовка к тестированию;
- решение кейс-задач;
- подготовка контрольной работы;
- подготовка к зачету.

В методических указаниях представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

## САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ

Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка рекомендуемой литературы к дисциплине. При работе с книгой необходимо научиться правильно ее читать, вести записи. Самостоятельная работа с учебными и научными изданиями профессиональной и общекультурной тематики – это важнейшее условие формирования научного способа познания.

Основные приемы работы с литературой можно свести к следующим:

- составить перечень книг, с которыми следует познакомиться;
- перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и выпускных квалификационных работ (ВКР), а что выходит за рамки официальной учебной деятельности, и расширяет общую культуру);
- обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и выпускных квалификационных работ это позволит экономить время);
- определить, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть;
- при составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и руководителями ВКР, которые помогут сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время;
- все прочитанные монографии, учебники и научные статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц);
- если книга – собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора;
- следует выработать способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать). Таким образом, чтение текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации.

От того, насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия. Грамотная работа с книгой, особенно если речь идет о научной литературе, предполагает соблюдение ряда правил, для овладения которыми необходимо настойчиво учиться. Это серьезный,

кропотливый труд. Прежде всего, при такой работе невозможен формальный, поверхностный подход. Не механическое заучивание, не простое накопление цитат, выдержек, а сознательное усвоение прочитанного, осмысление его, стремление дойти до сути – вот главное правило. Другое правило – соблюдение при работе над книгой определенной последовательности. Вначале следует ознакомиться с оглавлением, содержанием предисловия или введения. Это дает общую ориентировку, представление о структуре и вопросах, которые рассматриваются в книге.

Следующий этап – чтение. Первый раз целесообразно прочитать книгу с начала до конца, чтобы получить о ней цельное представление. При повторном чтении происходит постепенное глубокое осмысление каждой главы, критического материала и позитивного изложения; выделение основных идей, системы аргументов, наиболее ярких примеров и т.д. Непременным правилом чтения должно быть выяснение незнакомых слов, терминов, выражений, неизвестных имен, названий. Студентам с этой целью рекомендуется заводить специальные тетради или блокноты. Важная роль в связи с этим принадлежит библиографической подготовке студентов. Она включает в себя умение активно, быстро пользоваться научным аппаратом книги, справочными изданиями, каталогами, умение вести поиск необходимой информации, обрабатывать и систематизировать ее.

Выделяют четыре основные установки в чтении текста:

- информационно-поисковая (задача – найти, выделить искомую информацию);
- усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить, как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений);
- аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему);
- творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к тексту связано существование и нескольких видов чтения:

- библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
- просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
- ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц; цель –

познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

- изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

- аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач.

Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым, или, в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной и научной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках образовательной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с текстом. Научная методика работы с литературой предусматривает также ведение записи прочитанного. Это позволяет привести в систему знания, полученные при чтении, сосредоточить внимание на главных положениях, зафиксировать, закрепить их в памяти, а при необходимости вновь обратиться к ним.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения.

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала.

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала.

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора.

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного. Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Как правильно составлять конспект? Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта. Выделите главное,

составьте план, представляющий собой перечень заголовков, подзаголовков, вопросов, последовательно раскрываемых затем в конспекте. Это первый элемент конспекта. Вторым элементом конспекта являются тезисы. Тезис - это кратко сформулированное положение. Для лучшего усвоения и запоминания материала следует записывать тезисы своими словами. Тезисы, выдвигаемые в конспекте, нужно доказывать. Поэтому третий элемент конспекта - основные доводы, доказывающие истинность рассматриваемого тезиса. В конспекте могут быть положения и примеры. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Конспектирование - наиболее сложный этап работы. Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы. Конспект ускоряет повторение материала, экономит время при повторном, после определенного перерыва, обращении к уже знакомой работе. Учитывая индивидуальные особенности каждого студента, можно дать лишь некоторые, наиболее оправдавшие себя общие правила, с которыми преподаватель и обязан познакомить студентов:

1. Главное в конспекте не объем, а содержание. В нем должны быть отражены основные принципиальные положения источника, то новое, что внес его автор, основные методологические положения работы. Умение излагать мысли автора сжато, кратко и собственными словами приходит с опытом и знаниями. Но их накоплению помогает соблюдение одного важного правила – не торопиться записывать при первом же чтении, вносить в конспект лишь то, что стало ясным.

2. Форма ведения конспекта может быть самой разнообразной, она может изменяться, совершенствоваться. Но начинаться конспект всегда должен с указания полного наименования работы, фамилии автора, года и места издания; цитаты берутся в кавычки с обязательной ссылкой на страницу книги.

3. Конспект не должен быть «слепым», безликим, состоящим из сплошного текста. Особо важные места, яркие примеры выделяются цветным подчеркиванием, взятием в рамочку, оттенением, пометками на полях специальными знаками, чтобы можно было быстро найти нужное положение. Дополнительные материалы из других источников можно давать на полях, где записываются свои суждения, мысли, появившиеся уже после составления конспекта.

## ПОДГОТОВКА ДОКЛАДА

Одной из форм текущего контроля является доклад, который представляет собой продукт самостоятельной работы студента.

Доклад - это публичное выступление по представлению полученных результатов решения определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной темы.

Как правило, в основу доклада ложится анализ литературы по проблеме. Он должен носить характер краткого, но в то же время глубоко аргументированного устного сообщения. В нем студент должен, по возможности, полно осветить различные точки зрения на проблему, выразить собственное мнение, сделать критический анализ теоретического и практического материала.

Подготовка доклада является обязательной для обучающихся, если доклад указан в перечне форм текущего контроля успеваемости в рабочей программе дисциплины.

Доклад должен быть рассчитан на 7-10 минут.

Обычно доклад сопровождается представлением презентации.

Презентация (от англ. «presentation» - представление) - это набор цветных слайдов на определенную тему, который хранится в файле специального формата с расширением PP.

Целью презентации - донести до целевой аудитории полноценную информацию об объекте презентации, изложенной в докладе, в удобной форме.

Перечень примерных тем докладов с презентацией представлен в рабочей программе дисциплины, он выдается обучающимся заблаговременно вместе с методическими указаниями по подготовке. Темы могут распределяться студентами самостоятельно (по желанию), а также закрепляться преподавателем дисциплины.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления.

Для этого, остановитесь на теме, которая вызывает у Вас больший интерес; определите цель выступления; подумайте, достаточно ли вы знаете по выбранной теме или проблеме и сможете ли найти необходимый материал;

- осуществить сбор материала к выступлению.



Начинайте подготовку к докладу заранее; обращайтесь к справочникам, энциклопедиям, научной литературе по данной проблеме; записывайте необходимую информацию на отдельных листах или тетради;

- организовать работу с литературой.

При подборе литературы по интересующей теме определить конкретную цель поиска: что известно по данной теме? что хотелось бы узнать? для чего нужна эта информация? как ее можно использовать в практической работе?

- во время изучения литературы следует: записывать вопросы, которые возникают по мере ознакомления с источником, а также ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;

- обработать материал.

Учитывайте подготовку и интересы слушателей; излагайте правдивую информацию; все мысли должны быть взаимосвязаны между собой.

При подготовке доклада с презентацией особо необходимо обратить внимание на следующее:

- подготовка доклада начинается с изучения источников, рекомендованных к соответствующему разделу дисциплины, а также специальной литературы для докладчика, список которой можно получить у преподавателя;

- важно также ознакомиться с имеющимися по данной теме монографиями, учебными пособиями, научными информационными статьями, опубликованными в периодической печати.

Относительно небольшой объем текста доклада, лимит времени, отведенного для публичного выступления, обуславливает потребность в тщательном отборе материала, умелом выделении главных положений в содержании доклада, использовании наиболее доказательных фактов и убедительных примеров, исключении повторений и многословия.

Решить эти задачи помогает составление развернутого плана.

План доклада должен содержать следующие главные компоненты: краткое вступление, вопросы и их основные тезисы, заключение, список литературы.

После составления плана можно приступить к написанию текста. Во вступлении важно показать актуальность проблемы, ее практическую значимость. При изложении вопросов темы раскрываются ее основные положения. Материал содержания вопросов полезно располагать в таком порядке: тезис; доказательство тезиса; вывод и т. д.

Тезис - это главное основополагающее утверждение. Он обосновывается путем привлечения необходимых цитат, цифрового материала, ссылок на статьи. При изложении содержания вопросов особое внимание должно быть обращено на раскрытие причинно-следственных связей, логическую последовательность тезисов, а также на формулирование окончательных выводов. Выводы должны быть краткими, точными, достаточно аргументированными всем содержанием доклада.

В процессе подготовки доклада студент может получить консультацию у преподавателя, а в случае необходимости уточнить отдельные положения.

### *Выступление*

При подготовке к докладу перед аудиторией необходимо выбрать способ выступления:

- устное изложение с опорой на конспект (опорой могут также служить заранее подготовленные слайды);
- чтение подготовленного текста.

Чтение заранее написанного текста значительно уменьшает влияние выступления на аудиторию. Запоминание написанного текста заметно сковывает выступающего и привязывает к заранее составленному плану, не давая возможности откликаться на реакцию аудитории.

Короткие фразы легче воспринимаются на слух, чем длинные.

Необходимо избегать сложных предложений, причастных и деепричастных оборотов. Излагая сложный вопрос, нужно постараться передать информацию по частям.

Слова в речи надо произносить четко и понятно, не надо говорить слишком быстро или, наоборот, растягивать слова. Надо произнести четко особенно ударную гласную, что оказывает наибольшее влияние на разборчивость речи.

Пауза в устной речи выполняет ту же роль, что знаки препинания в письменной. После сложных выводов или длинных предложений необходимо сделать паузу, чтобы слушатели могли вдуматься в сказанное или правильно понять сделанные выводы. Если выступающий хочет, чтобы его понимали, то не следует говорить без паузы дольше, чем пять с половиной секунд.

Особое место в выступлении занимает обращение к аудитории. Известно, что обращение к собеседнику по имени создает более доверительный контекст деловой беседы. При публичном выступлении также можно использовать подобные приемы. Так, косвенными обращениями могут служить такие выражения, как «Как Вам известно», «Уверен, что Вас это не оставит равнодушными». Выступающий показывает, что слушатели интересны ему, а это самый простой путь достижения взаимопонимания.

Во время выступления важно постоянно контролировать реакцию слушателей. Внимательность и наблюдательность в сочетании с опытом позволяют оратору уловить настроение публики. Возможно, рассмотрение некоторых вопросов придется сократить или вовсе отказаться от них.

После выступления нужно быть готовым к ответам на возникшие у аудитории вопросы.

Стоит обратить внимание на вербальные и невербальные составляющие общения. Небрежность в жестах недопустима. Жесты могут быть приглашающими, отрицающими, вопросительными, они могут подчеркнуть нюансы выступления.

## *Презентация*

Презентация наглядно сопровождает выступление.

Этапы работы над презентацией могут быть следующими:

- осмыслите тему, выделите вопросы, которые должны быть освещены в рамках данной темы;
- составьте тезисы собранного материала. Подумайте, какая часть информации может быть подкреплена или полностью заменена изображениями, какую информацию можно представить в виде схем;
- подберите иллюстративный материал к презентации: фотографии, рисунки, фрагменты художественных и документальных фильмов, материалы кинохроники, разработайте необходимые схемы;
- подготовленный материал систематизируйте и «упакуйте» в отдельные блоки, которые будут состоять из собственно текста (небольшого по объему), схем, графиков, таблиц и т.д.;
- создайте слайды презентации в соответствии с необходимыми требованиями;
- просмотрите презентацию, оцените ее наглядность, доступность, соответствие языковым нормам.

### *Требования к оформлению презентации*

Компьютерную презентацию, сопровождающую выступление докладчика, удобнее всего подготовить в программе MS Power Point.

Презентация как документ представляет собой последовательность сменяющих друг друга слайдов. Чаще всего демонстрация презентации проецируется на большом экране, реже – раздается собравшимся как печатный материал.

Количество слайдов должно быть пропорционально содержанию и продолжительности выступления (например, для 5-минутного выступления рекомендуется использовать не более 10 слайдов).

На первом слайде обязательно представляется тема выступления и сведения об авторах.

Следующие слайды можно подготовить, используя две различные стратегии их подготовки:

1-я стратегия: на слайды выносятся опорный конспект выступления и ключевые слова с тем, чтобы пользоваться ими как планом для выступления. В этом случае к слайдам предъявляются следующие требования:

- объем текста на слайде – не больше 7 строк;
- маркированный/нумерованный список содержит не более 7 элементов;
- отсутствуют знаки пунктуации в конце строк в маркированных и нумерованных списках;
- значимая информация выделяется с помощью цвета, кегля, эффектов анимации.

Особо внимательно необходимо проверить текст на отсутствие ошибок и опечаток. Основная ошибка при выборе данной стратегии состоит в том, что выступающие заменяют свою речь чтением текста со слайдов.

2-я стратегия: на слайды помещается фактический материал (таблицы, графики, фотографии и пр.), который является уместным и достаточным средством наглядности, помогает в раскрытии стержневой идеи выступления. В этом случае к слайдам предъявляются следующие требования:

- выбранные средства визуализации информации (таблицы, схемы, графики и т. д.) соответствуют содержанию;
- использованы иллюстрации хорошего качества (высокого разрешения), с четким изображением (как правило, никто из присутствующих не заинтересован вчитываться в текст на ваших слайдах и всматриваться в мелкие иллюстрации).

Максимальное количество графической информации на одном слайде – 2 рисунка (фотографии, схемы и т.д.) с текстовыми комментариями (не более 2 строк к каждому). Наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана.

Обычный слайд, без эффектов анимации, должен демонстрироваться на экране не менее 10 - 15 секунд. За меньшее время аудитория не успеет осознать содержание слайда.

Слайд с анимацией в среднем должен находиться на экране не меньше 40 – 60 секунд (без учета времени на случайно возникшее обсуждение). В связи с этим лучше настроить презентацию не на автоматический показ, а на смену слайдов самим докладчиком.

Особо тщательно необходимо отнестись к оформлению презентации. Для всех слайдов презентации по возможности необходимо использовать один и тот же шаблон оформления, кегль – для заголовков - не меньше 24 пунктов, для информации - не менее 18.

В презентациях не принято ставить переносы в словах.

Наилучшей цветовой гаммой для презентации являются контрастные цвета фона и текста (белый фон – черный текст; темно-синий фон – светло-желтый текст и т. д.).

Лучше не смешивать разные типы шрифтов в одной презентации.

Рекомендуется не злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже).

## ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ

Практико-ориентированные задания выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций. Это могут быть ситуации, требующие применения умений и навыков, специфичных для соответствующего профиля обучения (знания содержания предмета), ситуации, требующие организации деятельности, выбора её оптимальной структуры личностно-ориентированных ситуаций (нахождение нестандартного способа решения).

Кроме этого, они выступают средством формирования у студентов умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач. Они строятся на основе ситуаций, возникающих на различных уровнях осуществления практики и формулируются в виде производственных поручений (заданий).

Под практико-ориентированными заданиями понимают задачи из окружающей действительности, связанные с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни, в том числе с использованием элементов производственных процессов.

Цель практико-ориентированных заданий – приобретение умений и навыков практической деятельности по изучаемой дисциплине.

Задачи практико-ориентированных заданий:

- закрепление, углубление, расширение и детализация знаний студентов при решении конкретных задач;
- развитие познавательных способностей, самостоятельности мышления, творческой активности;
- овладение новыми методами и методиками изучения конкретной учебной дисциплины;
- обучение приемам решения практических задач;
- выработка способности логического осмысления полученных знаний для выполнения заданий;
- обеспечение рационального сочетания коллективной и индивидуальной форм обучения.

Важными отличительными особенностями практико-ориентированных задания от стандартных задач (предметных, межпредметных, прикладных) являются:

- значимость (познавательная, профессиональная, общекультурная, социальная) получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию обучающегося;
- условие задания сформулировано как сюжет, ситуация или проблема, для разрешения которой необходимо использовать знания из разных разделов основного предмета, из другого предмета или из жизни, на которые нет явного указания в тексте задания;

- информация и данные в задании могут быть представлены в различной форме (рисунок, таблица, схема, диаграмма, график и т.д.), что потребует распознавания объектов;

- указание (явное или неявное) области применения результата, полученного при решении задания.

Кроме выделенных четырех характеристик, практико-ориентированные задания имеют следующие:

1. по структуре эти задания – нестандартные, т.е. в структуре задания не все его компоненты полностью определены;

2. наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задания, что приводит к объемной формулировке условия;

3. наличие нескольких способов решения (различная степень рациональности), причем данные способы могут быть неизвестны учащимся, и их потребуется сконструировать.

При выполнении практико-ориентированных заданий следует руководствоваться следующими общими рекомендациями:

- для выполнения практико-ориентированного задания необходимо внимательно прочитать задание, повторить лекционный материал по соответствующей теме, изучить рекомендуемую литературу, в т.ч. дополнительную;

- выполнение практико-ориентированного задания включает постановку задачи, выбор способа решения задания, разработку алгоритма практических действий, программы, рекомендаций, сценария и т. п.;

- если практико-ориентированное задание выдается по вариантам, то получить номер варианта исходных данных у преподавателя; если нет вариантов, то нужно подобрать исходные данные самостоятельно, используя различные источники информации;

- для выполнения практико-ориентированного задания может использоваться метод малых групп. Работа в малых группах предполагает решение определенных образовательных задач в рамках небольших групп с последующим обсуждением полученных результатов. Этот метод развивает навыки сотрудничества, достижения компромиссного решения, аналитические способности.

Примером практико-ориентированного задания по дисциплине «*Всеобщая история*» выступает **анализ исторического документа**.

Алгоритм анализа исторического документа:

1. Происхождение текста.

1.1. Кто написал этот текст?

1.2. Когда он был написан?

1.3. К какому виду источников он относится: письмо, дневник, официальный документ и т.п.?

2. Содержание текста.

Каково содержание текста? Сделайте обзор его структуры. Подчеркните наиболее важные слова, персоналии, события. Если вам не известны какие-то слова, поработайте со словарем.

3. Достоверна ли информация в тексте?

3.1. Свидетелем первой или второй очереди является автор текста? (Если автор присутствовал во время события, им описываемого, то он является первоочередным свидетелем).

3.2. Текст первичен или вторичен? (Первичный текст современен событию, вторичный текст берет информацию из различных первичных источников. Первичный текст может быть написан автором второй очереди, то есть созданным много позже самого события).

4. Раскройте значение источника и содержащейся в ней информации.

5. Дайте обобщающую оценку данному источнику.

- Когда, где и почему появился закон (сборник законов)?

- Кто автор законов?

- Чьи интересы защищает закон?

- Охарактеризуйте основные положения закона (ссылки на текст, цитирование).

- Сравните с предыдущими законами.

- Что изменилось после введения закона?

- Ваше отношение к этому законодательному акту (справедливость, необходимость и т.д.).

Тесты – это вопросы или задания, предусматривающие конкретный, краткий, четкий ответ на имеющиеся эталоны ответов. При самостоятельной подготовке к тестированию студенту необходимо:

1. готовясь к тестированию, проработать информационный материал по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

2. четко выяснить все условия тестирования заранее. Студент должен знать, сколько тестов ему будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т. д.;

3. приступая к работе с тестами, внимательно и до конца нужно прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов; выбрать правильные (их может быть несколько); на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам;

- в процессе решения желательно применять несколько подходов в решении задания. Это позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант;

- не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, нужно переходить к другим тестовым заданиям; к трудному вопросу можно обратиться в конце;

- обязательно необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

## **ПОДГОТОВКА К РЕШЕНИЮ КЕЙСОВ**



Целью такого вида самостоятельной работы, как решение кейсов, является формирование умения анализировать в короткие сроки большой объем неупорядоченной информации, принятие решений в условиях недостаточной информации.

Кейс-задание (англ. case - случай, ситуация) - метод обучения, основанный на разборе практических проблемных ситуаций - кейсов, связанных с конкретным событием или последовательностью событий.

Различают следующие виды кейсов:

- иллюстративные,
- аналитические,
- кейсы, связанные с принятием решений.

Подготовка кейс-задания осуществляется в следующей последовательности:

- 1) подготовить основной текст с вопросами для обсуждения:
  - титульный лист с кратким запоминающимся названием кейса;
  - введение, где упоминается герой (герои) кейса, рассказывается об истории вопроса, указывается время начала действия;
  - основная часть, где содержится главный массив информации, внутренняя интрига, проблема;
  - заключение (в нем решение проблемы, рассматриваемой в кейсе, иногда может быть не завершено);
- 2) подобрать приложения с подборкой различной информации, передающей общий контекст кейса (документы, публикации, фото, видео и др.);
- 3) предложить возможное решение проблемы.

Планируемые результаты самостоятельной работы в ходе решения кейсов:

- способность студентов анализировать результаты научных исследований и применять их при решении конкретных исследовательских задач;
- готовность использовать индивидуальные креативные способности для оригинального решения исследовательских задач;
- способность решать нестандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий.

Алгоритм решения кейс-задачи студентом можно представить, как взаимосвязь последовательных действий:

1. Понимание задачи:
  - усвоение какой учебной темы предлагает решение кейса;
  - какого рода результат требуется;
  - нужно ли дать оценку тому, что произошло, или рекомендации в отношении того, что должно произойти;

- если требуется прогноз, на какой период времени вы должны разработать подробный план действий;

- какая форма презентации требуется, каковы требования к ней;

- сколько времени вы должны работать с кейсом?

2. Просмотр кейса. После того как студенты узнали, каких действий от них ждут, они должны "почувствовать" ситуацию кейса:

- посмотреть его содержание, стараясь понять основную идею и вид предоставленной информации;

- если на этой стадии возникают вопросы, или "выскакивают" важные мысли, или кажутся подходящими те или иные концепции курса, прочитав текст до конца, следует их выписать;

- после этого прочитать кейс медленнее, отмечая маркером или записывая пункты, которые кажутся существенными.

3. Составление описания как путь изучения ситуации и определения тем. При просмотре кейса вы неизбежно начнете:

- структурировать ситуацию, оценивая одни аспекты как важные, а другие как несущественные;

- определить и отобразить все моменты, которые могли иметь отношение к ситуации. Из них можно построить систему взаимосвязанных проблем, которые сделали ситуацию заслуживающей анализа;

- рассмотреть факторы, находящиеся вне прямого контекста проблемы, поскольку они могут быть чрезвычайно важны;

- выделить "темы" – связанные группы факторов, которые могут воздействовать на каждый аспект ситуации. Например, одна их часть может иметь дело с воспринимаемым низким качеством, другая – с изменениями в поведении конкурента;

- описать ситуацию.

4. Диагностика проблемы. Процесс определения проблемы включает в себя следующие действия:

- вспомнить изученные ранее темы и провести по ним мозговой штурм для выявления потенциально соответствующих кейсу теоретических знаний;

- вертикально структурируйте вопрос, начиная с тех, которые касаются отдельных работников, затем группы или подразделения, организации в целом и, наконец, окружающей среды;

- изучите обстоятельства возникновения ситуации;

- не забывать возвращаться к информации кейса и более внимательно рассматривать факторы, ставшие важными в ходе анализа.

5. Формулировка проблем. На этой стадии следует:

- письменно сформулировать восприятие основных проблем;

- при наличии нескольких проблем следует установить их приоритетность, используя следующие критерии:

- важность – что произойдет, если эта проблема не будет решена;

- срочность – как быстро нужно решить эту проблему;

- иерархическое положение — до какой степени эта проблема является причиной других проблем;

- разрешимость – можете ли вы сделать что-либо для ее решения.

6. Выбор критериев решения проблемы. Сразу после выяснения структуры проблемы следует подумать о критериях выбора решений.

7. Генерирование альтернатив. Важно разработать достаточно широкий круг вариантов решения проблемы, опираясь на известные или изучаемые концепции, чтобы предложить лучшие способы действий, опыт решения других кейсов, креативные методы (мозговой штурм, аналогия, метафора и др.).

8. Оценка вариантов и выбор наиболее подходящего из них.

- необходимо определите критерии предпочтительности варианта;

- критерии выбора варианта должны быть основаны на том, в какой мере они способствуют решению проблемы в целом, а также по признакам выполнимости, быстроты, эффективности, экономичности;

- каждый из критериев необходимо проанализировать с позиций всех групп интересов;

- при оценке вариантов вы должны подумать о том, как они будут воздействовать не только на центральную проблему, но и на всю ситуацию в целом;

- определите вероятные последствия использования ваших вариантов.

9. Презентация выводов.

## ПОДГОТОВКА К ОПРОСУ

### • *Письменный опрос*

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе.

### • *Устный опрос*

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с

пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).

7. Использование дополнительного материала.

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание.

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу. Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы.

## ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

При подготовке к *зачету* по дисциплине «*Всеобщая история*» обучающемуся рекомендуется:

1. повторить пройденный материал и ответить на вопросы, используя конспект и материалы лекций. Если по каким-либо вопросам у студента недостаточно информации в лекционных материалах, то необходимо получить информацию из раздаточных материалов и/или учебников (литературы), рекомендованных для изучения дисциплины «*Всеобщая история*».

Целесообразно также дополнить конспект лекций наиболее существенными и важными тезисами для рассматриваемого вопроса;

2. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *зачете* особое внимание необходимо уделять схемам, рисункам, графикам и другим иллюстрациям, так как подобные графические материалы, как правило, в наглядной форме отражают главное содержание изучаемого вопроса;

3. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *зачете* (в случаях, когда отсутствует иллюстративный материал) особое внимание необходимо обращать на наличие в тексте словосочетаний вида «во-первых», «во-вторых» и т.д., а также дефисов и перечислений (цифровых или буквенных), так как эти признаки, как правило, позволяют структурировать ответ на предложенное задание.

Подобную текстовую структуризацию материала слушатель может трансформировать в рисунки, схемы и т. п. для более краткого, наглядного и удобного восприятия (иллюстрации целесообразно отразить в конспекте лекций – это позволит оперативно и быстро найти, в случае необходимости, соответствующую информацию);

4. следует также обращать внимание при изучении материала для подготовки к *зачету* на словосочетания вида «таким образом», «подводя итог сказанному» и т.п., так как это признаки выражения главных мыслей и выводов по изучаемому вопросу (пункту, разделу). В отдельных случаях выводы по теме (разделу, главе) позволяют полностью построить (восстановить, воссоздать) ответ на поставленный вопрос (задание), так как содержат в себе основные мысли и тезисы для ответа.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебно-методическому  
комплексу С.А. Упоров



## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

### ИСТОРИЯ РОССИИ

Направление подготовки

**13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**

Направленность (профиль)

**Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных  
предприятий**

Автор: Железникова А. В.

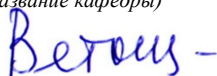
Автор: Абрамов С. М., к.пед.н., доцент

Одобрены на заседании кафедры

Управления персоналом

(название кафедры)

Зав. кафедрой

  
(подпись)

Ветошкина Т.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 16.09.2021


(Дата)

Рассмотрены методической комиссией

Горно-механического факультета

(название факультета)

Председатель

  
(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.....	6
ОСНОВНЫЕ КАТЕГОРИИ ДИСЦИПЛИНЫ.....	10
САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ.....	18
ПОДГОТОВКА К ДОКЛАДУ.....	22
ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ...27	
ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ.....	30
ПОДГОТОВКА ЭССЕ.....	31
ПОДГОТОВКА К ОПРОСУ.....	34
ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ.....	36



## ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа в высшем учебном заведении – это часть учебного процесса, метод обучения, прием учебно-познавательной деятельности, комплексная целевая стандартизованная учебная деятельность с запланированными видом, типом, формами контроля.

Самостоятельная работа представляет собой плановую деятельность обучающихся по поручению и под методическим руководством преподавателя.

Целью самостоятельной работы студентов является закрепление тех знаний, которые они получили на аудиторных занятиях, а также способствование развитию у студентов творческих навыков, инициативы, умению организовать свое время.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- предполагает освоение курса дисциплины;
- помогает освоению навыков учебной и научной работы;
- способствует осознанию ответственности процесса познания;
- способствует углублению и пополнению знаний студентов, освоению ими навыков и умений;
- формирует интерес к познавательным действиям, освоению методов и приемов познавательного процесса,
- создает условия для творческой и научной деятельности обучающихся;
- способствует развитию у студентов таких личных качеств, как целеустремленность, заинтересованность, исследование нового.

Самостоятельная работа обучающегося выполняет следующие функции:

- развивающую (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей студентов);
- информационно-обучающую (учебная деятельность студентов на аудиторных занятиях, неподкрепленная самостоятельной работой, становится мало результативной);
- ориентирующую и стимулирующую (процессу обучения придается ускорение и мотивация);
- воспитательную (формируются и развиваются профессиональные качества бакалавра и гражданина);
- исследовательскую (новый уровень профессионально-творческого мышления).

Организация самостоятельной работы студентов должна опираться на определенные требования, а, именно:

- сложность осваиваемых знаний должна соответствовать уровню развития студентов;
- стандартизация заданий в соответствии с логической системой курса дисциплины;

- объем задания должен соответствовать уровню студента;
- задания должны быть адаптированными к уровню студентов.

Содержание самостоятельной работы студентов представляет собой, с одной стороны, совокупность теоретических и практических учебных заданий, которые должен выполнить студент в процессе обучения, объект его деятельности; с другой стороны – это способ деятельности студента по выполнению соответствующего теоретического или практического учебного задания.

Свое внешнее выражение содержание самостоятельной работы студентов находит во всех организационных формах аудиторной и внеаудиторной деятельности, в ходе самостоятельного выполнения различных заданий.

Функциональное предназначение самостоятельной работы студентов в процессе практических занятий по овладению специальными знаниями заключается в самостоятельном прочтении, просмотре, прослушивании, наблюдении, конспектировании, осмыслении, запоминании и воспроизведении определенной информации. Цель и планирование самостоятельной работы студента определяет преподаватель. Вся информация осуществляется на основе ее воспроизведения.

Так как самостоятельная работа тесно связана с учебным процессом, ее необходимо рассматривать в двух аспектах:

1. аудиторная самостоятельная работа – практические занятия;
2. внеаудиторная самостоятельная работа – подготовка к практическим занятиям, подготовка к устному опросу, участию в дискуссиях, решению практико-ориентированных задач и др.

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

Таким образом, самостоятельная работа студентов является важнейшей составной частью процесса обучения.

Методические указания по организации самостоятельной работы и задания для обучающихся по дисциплине «История России» обращают внимание студента на главное, существенное в изучаемой дисциплине, помогают выработать умение анализировать явления и факты, связывать теоретические положения с практикой, а также облегчают подготовку к выполнению *контрольной работы* и к сдаче *зачета*.

Настоящие методические указания позволят студентам самостоятельно овладеть фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю подготовки, опытом творческой и исследовательской деятельности, и направлены на формирование компетенций, предусмотренных учебным планом поданному профилю.

Видами самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «История России» являются:

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение тем курса (в т. ч. рассмотрение основных категорий дисциплины, работа с литературой);
- подготовка к практическим (семинарским) занятиям (в т. ч. подготовка доклада, подготовка к выполнению практико-ориентированного задания);
- подготовка к тестированию;
- подготовка эссе;
- подготовка контрольной работы;
- подготовка к зачету.

В методических указаниях представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

## **ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ**

## **Тема 1. Объект, предмет, основные понятия и методы исследования истории**

1. История как наука. Сущность, формы, функции исторического знания.
2. Методы и источники изучения истории. Понятие и классификация исторического источника.
3. Концепции исторического процесса.
4. История России - неотъемлемая часть всемирной истории.
5. Историография отечественной истории.

## **Тема 2. Славянский этногенез. Образование государства у восточных славян**

1. Этногенез восточных славян.
2. Славяне: расселение, занятия, общественное устройство, верования.
3. Предпосылки образования государственности у восточных славян
4. Норманнская и антинорманнская теории.
5. Первые князья династии Рюриковичей.
6. Русь и Византия. Первые договоры.

## **Тема 3. Киевская Русь**

1. Социально-экономический и общественно-политический строй Киевской Руси (конец X – первая треть XII вв.).
2. Формирование системы государственного управления. Князья Игорь, Ольга, Святослав.
3. Князь Владимир. Крещение Руси и его значение.
4. Ярослав Мудрый. «Русская правда» - первый свод законов Древнерусского государства. Владимир Мономах.

## **Тема 4. Русь в эпоху феодальной раздробленности**

1. Предпосылки распада Киевской Руси и начала феодальной раздробленности.
2. Политическая раздробленность на Руси
  - а) Новгородская боярская республика.
  - б) Владимиро-Суздальская Русь. Юрий Долгорукий, Андрей Боголюбский, Всеволод Большое Гнездо.
  - в) Галицко-Волынская земля. Ростислав Мстиславич, Даниил Романович.
  - г) Киевская земля в период феодальной раздробленности.
3. Последствия раздробленности.
4. Завоевательные походы монголов и нашествие Батыя на Русь.
5. Борьба с немецко-шведской агрессией. Деятельность А. Невского
6. Золотоордынское влияние на развитие средневековой Руси: оценки историков.

## **Тема 5. Складывание Московского государства в XIV - XVI вв. (XIV – начало XVI вв.)**

1. Предпосылки и особенности процесса объединения русских земель.
2. Этапы политического объединения, их характеристика и содержание. Иван Калита, Дмитрий Донской.
3. Социально-экономическое развитие и формирование политических основ Российского государства при Иване III и Василии III.
4. Внутренняя и внешняя политика Ивана IV.
5. Культура Руси XIV – начала XVI вв.

## **Тема 6. Российское государство в XVII в.**

1. Смутное время начала XVII в.
2. Развитие Российского государства при первых царях династии Романовых:
  - а) новые явления в социально-экономической жизни;
  - б) движение социального протеста;
  - в) государственно-общественное развитие;
  - г) реформы патриарха Никона и церковный раскол;
  - д) внешняя политика России в XVII в., присоединение новых территорий

## **Тема 7. Россия в XVIII в.**

1. Реформы Петра I и начало российской модернизации
2. Внешняя политика Петра I. Рождение Российской империи.
3. «Эпоха дворцовых переворотов» (1725–1762 гг.).
4. Царствование Екатерины II:
  - а) социально-экономическое развитие России во 2-й половине XVIII в.;
  - б) «Просвещенный абсолютизм»: содержание, особенности, противоречия.
4. Российское государство в конце XVIII века. Павел I.
5. Внешняя политика России
6. Европеизация и секуляризация русской культуры: результаты и последствия.

## **Тема 8. Россия в XIX в.**

1. Александр I и его преобразования. М.М. Сперанский.
2. Внешняя политика в первой четверти XIX в.
3. Внутренняя и внешняя политика императора Николая I.
4. Александр II. Отмена крепостного права и ее влияние на социально-экономическое развитие страны.
5. Либерально-буржуазные реформы 60–70-х гг. XIX в. и их последствия.
6. «Контрреформы» Александра III: корректировка реформаторского курса.

7. Общественно-политические движения (консервативный, либеральный, революционный лагерь).

8. Внешняя политика России во второй половине XIX в.

9. Культура и общественная жизнь России в XIX в.

### **Тема 11. Россия в XX в.**

1. Проблемы российской модернизации на рубеже XIX –XX вв. Программа индустриализации С. Ю. Витте. Реформы П. А. Столыпина.

2. Революция 1905–1907 гг. в России. Становление многопартийности и парламентаризма в России.

3. Внешняя политика. Первая мировая война.

4. Февральская революция 1917 года. Октябрь 1917 года: приход к власти большевиков.

5. Гражданская война в России и первое десятилетие Советской власти

6. Новая экономическая политика: цели, направления, результаты.

7. Социально-экономические преобразования в СССР:

а) индустриализация страны: необходимость, источники, методы, итоги;

б) коллективизация сельского хозяйства;

в) формирование и упрочение административно-бюрократической системы.

8. Политическая система СССР в 1930-е годы. Завершение «культурной революции».

9. Образование СССР. Внешняя политика СССР в 1930-е гг.

10. СССР во Второй мировой войне

а) подготовка страны к войне, этапы войны;

б) крупнейшие сражения, партизанское движение, работа тыла;

в) СССР и союзники во Второй мировой войне;

г) итоги войны, цена Великой победы.

11. СССР в послевоенный период

12. Социально-экономическое и общественно-политическое развитие СССР в 1946–1953 гг.

13. Успехи и противоречия социально-экономического и внешне-политического развития страны под руководством Н. С. Хрущева

14. Советское общество в эпоху «застоя» в период руководства Л.И. Брежнева

15. СССР в середине 1980-1990 гг.

а) Экономические преобразования в стране. Политика «ускорения». «Перестройка» в СССР.

б) Концепция «Нового политического мышления» и ее претворение в жизнь.

в) Реформирование политической системы. Распад СССР.

### **Тема 17. Россия и мир в начале XXI в.**

1. Геополитические последствия распада СССР. Провозглашение суверенитета Российской Федерации. 2. Формирование новой государственности. Конституция 1993 г.

3. Социально-экономические преобразования. Рыночная модернизация страны.

4. Внешнеполитическая деятельность в условиях новой геополитической ситуации. Россия и мир на рубеже XX– XXI.

## **ОСНОВНЫЕ КАТЕГОРИИ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Тема 1. Объект, предмет, основные понятия и методы исследования истории**

История

Исторический факт

Исторический источник  
Интерпретация  
Этнос  
Менталитет  
Государство  
Цивилизация  
Формация  
Классы  
Прогресс  
Регресс  
Общественно-экономическая формация  
Геополитика

## **Тема 2. Славянский этногенез. Образование государства у восточных славян**

Великое переселение народов  
Этногенез  
Военная демократия  
Язычество  
Полюдь  
Повоз  
Погосты и уроки  
Феодализм  
Варяги  
Верьвь  
Вече  
Племенной союз  
Государство  
Князь  
Русь  
Волхвы  
Анты и венеды  
Отроки  
Смерды  
Закупы  
Рядовичи  
Холопы

## **Тема 3. Киевская Русь**

«Русская правда»  
Вотчина  
Боярская дума  
Децентрализация  
Уделы  
Централизация



Поместье  
Воевода  
Ремесло  
Феодализм  
Феодальные отношения  
Усложнение социальной структуры  
Культура народная, культура религиозная  
Фольклор  
Храм  
Икона фреска  
Летописание  
Эволюция государственности  
Хазары, половцы, печенеги

#### **Тема 4. Русь в эпоху феодальной раздробленности**

Великий князь  
Княжеский двор  
Дружина  
Междоусобные войны  
Феодальная раздробленность  
Феодальные центры  
Боярская республика  
Посадник  
Тысяцкий  
Сепаратизм  
Последствия раздробленности  
Держава Чингисхана  
Золотая Орда  
Монголо-татарское нашествие  
Баскак  
Выход  
Подушная подать  
Монголо-татарское иго  
Ярлык  
Проблема взаимовлияния  
Вторжения с северо-запада  
Ливонский орден  
Рыцари

#### **Тема 5. Складывание Московского государства в XIV - XVI вв. (XIV – начало XVI вв.)**

Централизация  
Приказы  
Поместье  
Дворяне

Местничество  
Кормление  
Крепостное право  
Боярская дума  
Натуральное хозяйство  
Судебник  
Государев дворец  
Государева казна  
Государственные символы  
«Москва – третий Рим»  
Сословно-представительная монархия  
Земский собор  
Митрополит  
Крепостное право  
Венчание на царство  
Избранная рада  
Реформа  
Приказы  
Стрелецкое войско  
Стоглав  
Опричина  
Губные избы  
Династический кризис

### **Тема 6. Российское государство в XVII в.**

Смутное время  
Интервенция  
Крестьянская война  
Семибоярщина  
Самозванство  
Народное ополчение  
Сословно-представительная монархия  
Патриарх  
«Бунташный век»  
Тягло  
Урочные и заповедные лета  
Мануфактуры  
Юридическое закрепощение крестьян  
Личная зависимость  
Внеэкономическая эксплуатация  
Стрельцы  
Кзаки  
Полки нового строя  
Раскол в Русской православной церкви  
Старообрядчество

Ярмарка  
Абсолютная монархия

### **Тема 7. Россия в XVIII в.**

Абсолютизм  
Империя  
Регулярная армия  
Синод  
Сенат  
Министерства  
Коллегии  
«Великое посольство»  
Подушная подать  
Табель о рангах  
Рекруты  
Ассамблеи  
Кунсткамера  
Протекционизм  
Меркантилизм  
Государственная монополия  
Дворцовые перевороты  
Гвардия  
Верховный Тайный совет  
Кондиции  
«Бироновщина»  
Просвещенный абсолютизм  
Уложенная комиссия  
Жалованная грамота  
Приписные крестьяне  
Обер-прокурор  
Господствующее сословие  
Податные сословия  
Крестьянская война

### **Тема 8. Россия в XIX в.**

Либеральные реформы  
Конституционализм  
Негласный комитет  
Государственный Совет  
Отечественная война  
Конституция  
Монархия  
Крестьянский вопрос  
Либерализм  
Аракчеевщина

Реакция  
Консерватизм  
Общественное движение  
Декабристы  
Западники  
Славянофилы  
Теория «официальной народности»  
Восточный вопрос  
Бюрократизация  
Кодификация  
Финансовая реформа Е.Ф. Канкрин  
Буржуазия  
Капитализм  
Рабочий класс  
Промышленный переворот  
Крестьянская реформа  
Выкупные платежи  
Временно-обязанные крестьяне  
Уставные грамоты  
Крестьянская община  
Народничество, радикализм  
Рабочее движение  
Марксизм  
Социал-демократия  
Контрреформы  
Легитимность  
Выкупная сделка  
Мировой суд  
Земство  
Всесословная воинская повинность  
Буржуазия, пролетариат  
Индустриализация и модернизация  
Союз трех императоров

#### **Тема 9. Россия в XX веке.**

Монополия  
Промышленный подъем  
Депрессия  
Модернизация  
Революция  
Манифест  
Конституционная монархия  
Политическая партия  
Государственная Дума  
Прогрессивный блок

Революционные партии  
Антанта  
Тройственный союз  
Аграрная реформа  
Отруб, хутор  
Советы  
Большевики, меньшевики  
Временное правительство  
Республика  
Двоевластие  
Учредительное собрание  
Первая Мировая война

Совет народных комиссаров  
Красная Армия  
Белое движение  
Гражданская война  
Сепаратный мирный договор  
Иностранная интервенция  
Мировая революция  
Декреты  
Военный коммунизм  
Продразверстка  
Авторитаризм  
Тоталитаризм  
Коминтерн  
Новая экономическая политика  
Продналог  
Индустриализация  
Коллективизация  
Культурная революция  
«Мюнхенский сговор»  
Лига Наций  
Коллективная безопасность  
Вторая Мировая война  
Пакт о ненападении

Государственный Комитет обороны, Ставка Верховного  
главнокомандования

Эвакуация  
Антигитлеровская коалиция  
Второй фронт  
Коренной перелом  
Партизанское движение, подпольное движение  
Сопrotивление  
Фашизм, японский милитаризм

Ленд-лиз  
Капитуляция  
ООН  
НАТО, ОВД  
Репрессии  
Либерализация политического режима  
Десталинизация  
Денежная реформа  
Мировая социалистическая система  
«Оттепель»  
ГУЛАГ  
Реабилитация  
«Холодная война»  
Совхоз  
Целина  
Мелиорация  
Спутник  
Освоение космоса  
Паритет  
Правозащитное движение  
Диссиденты  
Развитой социализм  
Герантократия  
Разрядка  
«Теневая экономика»  
Концепция развитого социализма  
Разрядка международной напряженности  
Стабильность кадров  
Реформа хозяйственного механизма  
Экстенсивный путь развития  
Страны социалистической ориентации  
Перестройка  
Гласность  
«Новое политическое мышление»  
Плюрализм  
СНГ  
Приватизация  
Прибыль и рентабельность  
Госприемка  
«шоковая терапия»  
Ваучер  
Распад СССР  
Многopартийность  
Возрождение парламентаризма  
Рыночная экономика

Борьба с экстремизмом и терроризмом  
Дефолт  
Стабилизация  
Финансовый кризис  
Содружество Независимых государств

### **Тема 17. Россия и мир в начале XXI в.**

Правовое государство  
Гражданское общество  
Рыночная экономика  
Дефолт  
Вертикаль власти  
Олигархи  
Глобализация  
Совет Федерации  
Государственная Дума  
Совет Европы  
ВТО

## **САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ**

Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка рекомендуемой литературы к дисциплине. При работе с книгой необходимо научиться правильно ее читать, вести записи. Самостоятельная работа с учебными и научными изданиями профессиональной и общекультурной тематики – это важнейшее условие формирования научного способа познания.

Основные приемы работы с литературой можно свести к следующим:

- составить перечень книг, с которыми следует познакомиться;
- перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и выпускных квалификационных работ (ВКР), а что выходит за рамки официальной учебной деятельности, и расширяет общую культуру);

- обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и выпускных квалификационных работ это позволит экономить время);

- определить, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть;

- при составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и руководителями ВКР, которые помогут сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время;

- все прочитанные монографии, учебники и научные статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц);

- если книга – собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора;

- следует выработать способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать). Таким образом, чтение текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации.

От того, насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия. Грамотная работа с книгой, особенно если речь идет о научной литературе, предполагает соблюдение ряда правил, для овладения которыми необходимо настойчиво учиться. Это серьезный, кропотливый труд. Прежде всего, при такой работе невозможен формальный, поверхностный подход. Не механическое заучивание, не простое накопление цитат, выдержек, а сознательное усвоение прочитанного, осмысление его, стремление дойти до сути – вот главное правило. Другое правило – соблюдение при работе над книгой определенной последовательности. Вначале следует ознакомиться с оглавлением, содержанием предисловия или введения. Это дает общую ориентировку, представление о структуре и вопросах, которые рассматриваются в книге.

Следующий этап – чтение. Первый раз целесообразно прочитать книгу с начала до конца, чтобы получить о ней цельное представление. При повторном чтении происходит постепенное глубокое осмысление каждой главы, критического материала и позитивного изложения; выделение основных идей, системы аргументов, наиболее ярких примеров и т.д. Непременным правилом чтения должно быть выяснение незнакомых слов, терминов, выражений, неизвестных имен, названий. Студентам с этой целью



рекомендуется заводить специальные тетради или блокноты. Важная роль в связи с этим принадлежит библиографической подготовке студентов. Она включает в себя умение активно, быстро пользоваться научным аппаратом книги, справочными изданиями, каталогами, умение вести поиск необходимой информации, обрабатывать и систематизировать ее.

Выделяют четыре основные установки в чтении текста:

- информационно-поисковая (задача – найти, выделить искомую информацию);
- усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить, как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений);
- аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему);
- творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к тексту связано существование и нескольких видов чтения:

- библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
- просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
- ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц; цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
- изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;
- аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач.

Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым, или, в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной и научной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно

этот вид чтения в рамках образовательной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с текстом. Научная методика работы с литературой предусматривает также ведение записи прочитанного. Это позволяет привести в систему знания, полученные при чтении, сосредоточить внимание на главных положениях, зафиксировать, закрепить их в памяти, а при необходимости вновь обратиться к ним.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения.

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала.

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала.

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора.

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного. Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Как правильно составлять конспект? Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта. Выделите главное, составьте план, представляющий собой перечень заголовков, подзаголовков, вопросов, последовательно раскрываемых затем в конспекте. Это первый элемент конспекта. Вторым элементом конспекта являются тезисы. Тезис – это кратко сформулированное положение. Для лучшего усвоения и запоминания материала следует записывать тезисы своими словами. Тезисы, выдвигаемые в конспекте, нужно доказывать. Поэтому третий элемент конспекта – основные доводы, доказывающие истинность рассматриваемого тезиса. В конспекте могут быть положения и примеры. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической

структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Конспектирование - наиболее сложный этап работы. Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы. Конспект ускоряет повторение материала, экономит время при повторном, после определенного перерыва, обращении к уже знакомой работе. Учитывая индивидуальные особенности каждого студента, можно дать лишь некоторые, наиболее оправдавшие себя общие правила, с которыми преподаватель и обязан познакомить студентов:

1. Главное в конспекте не объем, а содержание. В нем должны быть отражены основные принципиальные положения источника, то новое, что внес его автор, основные методологические положения работы. Умение излагать мысли автора сжато, кратко и собственными словами приходит с опытом и знаниями. Но их накоплению помогает соблюдение одного важного правила – не торопиться записывать при первом же чтении, вносить в конспект лишь то, что стало ясным.

2. Форма ведения конспекта может быть самой разнообразной, она может изменяться, совершенствоваться. Но начинаться конспект всегда должен с указания полного наименования работы, фамилии автора, года и места издания; цитаты берутся в кавычки с обязательной ссылкой на страницу книги.

3. Конспект не должен быть «слепым», безликим, состоящим из сплошного текста. Особо важные места, яркие примеры выделяются цветным подчеркиванием, взятием в рамочку, оттенением, пометками на полях специальными знаками, чтобы можно было быстро найти нужное положение. Дополнительные материалы из других источников можно давать на полях, где записываются свои суждения, мысли, появившиеся уже после составления конспекта.

## **ПОДГОТОВКА ДОКЛАДА**

Одной из форм текущего контроля является доклад, который представляет собой продукт самостоятельной работы студента.

Доклад - это публичное выступление по представлению полученных результатов решения определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной темы.

Как правило, в основу доклада ложится анализ литературы по проблеме. Он должен носить характер краткого, но в то же время глубоко аргументированного устного сообщения. В нем студент должен, по возможности, полно осветить различные точки зрения на проблему, выразить собственное мнение, сделать критический анализ теоретического и практического материала.

Подготовка доклада является обязательной для обучающихся, если доклад указан в перечне форм текущего контроля успеваемости в рабочей программе дисциплины.

Доклад должен быть рассчитан на 7-10 минут.

Обычно доклад сопровождается представлением презентации.

Презентация (от англ. «presentation» - представление) - это набор цветных слайдов на определенную тему, который хранится в файле специального формата с расширением PP.

Целью презентации - донести до целевой аудитории полноценную информацию об объекте презентации, изложенной в докладе, в удобной форме.

Перечень примерных тем докладов с презентацией представлен в рабочей программе дисциплины, он выдается обучающимся заблаговременно вместе с методическими указаниями по подготовке. Темы могут распределяться студентами самостоятельно (по желанию), а также закрепляться преподавателем дисциплины.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления.

Для этого, остановитесь на теме, которая вызывает у Вас большой интерес; определите цель выступления; подумайте, достаточно ли вы знаете по выбранной теме или проблеме и сможете ли найти необходимый материал;

- осуществить сбор материала к выступлению.

Начинайте подготовку к докладу заранее; обращайтесь к справочникам, энциклопедиям, научной литературе по данной проблеме; записывайте необходимую информацию на отдельных листах или тетради;

- организовать работу с литературой.

При подборе литературы по интересующей теме определить конкретную цель поиска: что известно по данной теме? что хотелось бы узнать? для чего нужна эта информация? как ее можно использовать в практической работе?

- во время изучения литературы следует: записывать вопросы, которые возникают по мере ознакомления с источником, а также ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;

- обработать материал.

Учитывайте подготовку и интересы слушателей; излагайте правдивую информацию; все мысли должны быть взаимосвязаны между собой.

При подготовке доклада с презентацией особо необходимо обратить внимание на следующее:

- подготовка доклада начинается с изучения источников, рекомендованных к соответствующему разделу дисциплины, а также

специальной литературы для докладчика, список которой можно получить у преподавателя;

- важно также ознакомиться с имеющимися по данной теме монографиями, учебными пособиями, научными информационными статьями, опубликованными в периодической печати.

Относительно небольшой объем текста доклада, лимит времени, отведенного для публичного выступления, обуславливает потребность в тщательном отборе материала, умелом выделении главных положений в содержании доклада, использовании наиболее доказательных фактов и убедительных примеров, исключении повторений и многословия.

Решить эти задачи помогает составление развернутого плана.

План доклада должен содержать следующие главные компоненты: краткое вступление, вопросы и их основные тезисы, заключение, список литературы.

После составления плана можно приступить к написанию текста. Во вступлении важно показать актуальность проблемы, ее практическую значимость. При изложении вопросов темы раскрываются ее основные положения. Материал содержания вопросов полезно располагать в таком порядке: тезис; доказательство тезиса; вывод и т. д.

Тезис - это главное основополагающее утверждение. Он обосновывается путем привлечения необходимых цитат, цифрового материала, ссылок на статьи. При изложении содержания вопросов особое внимание должно быть обращено на раскрытие причинно-следственных связей, логическую последовательность тезисов, а также на формулирование окончательных выводов. Выводы должны быть краткими, точными, достаточно аргументированными всем содержанием доклада.

В процессе подготовки доклада студент может получить консультацию у преподавателя, а в случае необходимости уточнить отдельные положения.

### *Выступление*

При подготовке к докладу перед аудиторией необходимо выбрать способ выступления:

- устное изложение с опорой на конспект (опорой могут также служить заранее подготовленные слайды);
- чтение подготовленного текста.

Чтение заранее написанного текста значительно уменьшает влияние выступления на аудиторию. Запоминание написанного текста заметно сковывает выступающего и привязывает к заранее составленному плану, не давая возможности откликаться на реакцию аудитории.

Короткие фразы легче воспринимаются на слух, чем длинные.

Необходимо избегать сложных предложений, причастных и деепричастных оборотов. Излагая сложный вопрос, нужно постараться передать информацию по частям.

Слова в речи надо произносить четко и понятно, не надо говорить слишком быстро или, наоборот, растягивать слова. Надо произнести четко

особенно ударную гласную, что оказывает наибольшее влияние на разборчивость речи.

Пауза в устной речи выполняет ту же роль, что знаки препинания в письменной. После сложных выводов или длинных предложений необходимо сделать паузу, чтобы слушатели могли вдуматься в сказанное или правильно понять сделанные выводы. Если выступающий хочет, чтобы его понимали, то не следует говорить без паузы дольше, чем пять с половиной секунд.

Особое место в выступлении занимает обращение к аудитории. Известно, что обращение к собеседнику по имени создает более доверительный контекст деловой беседы. При публичном выступлении также можно использовать подобные приемы. Так, косвенными обращениями могут служить такие выражения, как «Как Вам известно», «Уверен, что Вас это не оставит равнодушными». Выступающий показывает, что слушатели интересны ему, а это самый простой путь достижения взаимопонимания.

Во время выступления важно постоянно контролировать реакцию слушателей. Внимательность и наблюдательность в сочетании с опытом позволяют оратору уловить настроение публики. Возможно, рассмотрение некоторых вопросов придется сократить или вовсе отказаться от них.

После выступления нужно быть готовым к ответам на возникшие у аудитории вопросы.

Стоит обратить внимание на вербальные и невербальные составляющие общения. Небрежность в жестах недопустима. Жесты могут быть приглашающими, отрицающими, вопросительными, они могут подчеркнуть нюансы выступления.

### *Презентация*

Презентация наглядно сопровождает выступление.

Этапы работы над презентацией могут быть следующими:

- осмыслите тему, выделите вопросы, которые должны быть освещены в рамках данной темы;
- составьте тезисы собранного материала. Подумайте, какая часть информации может быть подкреплена или полностью заменена изображениями, какую информацию можно представить в виде схем;
- подберите иллюстративный материал к презентации: фотографии, рисунки, фрагменты художественных и документальных фильмов, материалы кинохроники, разработайте необходимые схемы;
- подготовленный материал систематизируйте и «упакуйте» в отдельные блоки, которые будут состоять из собственно текста (небольшого по объему), схем, графиков, таблиц и т.д.;
- создайте слайды презентации в соответствии с необходимыми требованиями;
- просмотрите презентацию, оцените ее наглядность, доступность, соответствие языковым нормам.

### *Требования к оформлению презентации*

Компьютерную презентацию, сопровождающую выступление докладчика, удобнее всего подготовить в программе MS Power Point.

Презентация как документ представляет собой последовательность сменяющих друг друга слайдов. Чаще всего демонстрация презентации проецируется на большом экране, реже – раздается собравшимся как печатный материал.

Количество слайдов должно быть пропорционально содержанию и продолжительности выступления (например, для 5-минутного выступления рекомендуется использовать не более 10 слайдов).

На первом слайде обязательно представляется тема выступления и сведения об авторах.

Следующие слайды можно подготовить, используя две различные стратегии их подготовки:

1-я стратегия: на слайды выносятся опорный конспект выступления и ключевые слова с тем, чтобы пользоваться ими как планом для выступления. В этом случае к слайдам предъявляются следующие требования:

- объем текста на слайде – не больше 7 строк;
- маркированный/нумерованный список содержит не более 7 элементов;
- отсутствуют знаки пунктуации в конце строк в маркированных и нумерованных списках;
- значимая информация выделяется с помощью цвета, кегля, эффектов анимации.

Особо внимательно необходимо проверить текст на отсутствие ошибок и опечаток. Основная ошибка при выборе данной стратегии состоит в том, что выступающие заменяют свою речь чтением текста со слайдов.

2-я стратегия: на слайды помещается фактический материал (таблицы, графики, фотографии и пр.), который является уместным и достаточным средством наглядности, помогает в раскрытии стержневой идеи выступления. В этом случае к слайдам предъявляются следующие требования:

- выбранные средства визуализации информации (таблицы, схемы, графики и т. д.) соответствуют содержанию;
- использованы иллюстрации хорошего качества (высокого разрешения), с четким изображением (как правило, никто из присутствующих не заинтересован вчитываться в текст на ваших слайдах и всматриваться в мелкие иллюстрации).

Максимальное количество графической информации на одном слайде – 2 рисунка (фотографии, схемы и т.д.) с текстовыми комментариями (не более 2 строк к каждому). Наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана.

Обычный слайд, без эффектов анимации, должен демонстрироваться на экране не менее 10 - 15 секунд. За меньшее время аудитория не успеет осознать содержание слайда.

Слайд с анимацией в среднем должен находиться на экране не меньше 40 – 60 секунд (без учета времени на случайно возникшее обсуждение). В связи с этим лучше настроить презентацию не на автоматический показ, а на смену слайдов самим докладчиком.

Особо тщательно необходимо отнестись к оформлению презентации. Для всех слайдов презентации по возможности необходимо использовать один и тот же шаблон оформления, кегль – для заголовков - не меньше 24 пунктов, для информации - не менее 18.

В презентациях не принято ставить переносы в словах.

Наилучшей цветовой гаммой для презентации являются контрастные цвета фона и текста (белый фон – черный текст; темно-синий фон – светло-желтый текст и т. д.).

Лучше не смешивать разные типы шрифтов в одной презентации.

Рекомендуется не злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже).

## **ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ**

Практико-ориентированные задания выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций. Это могут быть ситуации, требующие применения умений и навыков, специфичных для соответствующего профиля обучения (знания содержания предмета), ситуации, требующие организации деятельности, выбора её оптимальной структуры личностно-ориентированных ситуаций (нахождение нестандартного способа решения).

Кроме этого, они выступают средством формирования у студентов умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач. Они строятся на основе ситуаций, возникающих на различных уровнях осуществления практики и формулируются в виде производственных поручений (заданий).

Под практико-ориентированными заданиями понимают задачи из окружающей действительности, связанные с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни, в том числе с использованием элементов производственных процессов.



Цель практико-ориентированных заданий – приобретение умений и навыков практической деятельности по изучаемой дисциплине.

Задачи практико-ориентированных заданий:

- закрепление, углубление, расширение и детализация знаний студентов при решении конкретных задач;
- развитие познавательных способностей, самостоятельности мышления, творческой активности;
- овладение новыми методами и методиками изучения конкретной учебной дисциплины;
- обучение приемам решения практических задач;
- выработка способности логического осмысления полученных знаний для выполнения заданий;
- обеспечение рационального сочетания коллективной и индивидуальной форм обучения.

Важными отличительными особенностями практико-ориентированных задания от стандартных задач (предметных, межпредметных, прикладных) являются:

- значимость (познавательная, профессиональная, общекультурная, социальная) получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию обучающегося;
- условие задания сформулировано как сюжет, ситуация или проблема, для разрешения которой необходимо использовать знания из разных разделов основного предмета, из другого предмета или из жизни, на которые нет явного указания в тексте задания;
- информация и данные в задании могут быть представлены в различной форме (рисунок, таблица, схема, диаграмма, график и т.д.), что потребует распознавания объектов;
- указание (явное или неявное) области применения результата, полученного при решении задания.

Кроме выделенных четырех характеристик, практико-ориентированные задания имеют следующие:

1. по структуре эти задания – нестандартные, т.е. в структуре задания не все его компоненты полностью определены;
2. наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задания, что приводит к объемной формулировке условия;
3. наличие нескольких способов решения (различная степень рациональности), причем данные способы могут быть неизвестны учащимся, и их потребуется сконструировать.

При выполнении практико-ориентированных заданий следует руководствоваться следующими общими рекомендациями:

- для выполнения практико-ориентированного задания необходимо внимательно прочитать задание, повторить лекционный материал по соответствующей теме, изучить рекомендуемую литературу, в т.ч. дополнительную;

- выполнение практико-ориентированного задания включает постановку задачи, выбор способа решения задания, разработку алгоритма практических действий, программы, рекомендаций, сценария и т. п.;

- если практико-ориентированное задание выдается по вариантам, то получить номер варианта исходных данных у преподавателя; если нет вариантов, то нужно подобрать исходные данные самостоятельно, используя различные источники информации;

- для выполнения практико-ориентированного задания может использоваться метод малых групп. Работа в малых группах предполагает решение определенных образовательных задач в рамках небольших групп с последующим обсуждением полученных результатов. Этот метод развивает навыки сотрудничества, достижения компромиссного решения, аналитические способности.

Примером практико-ориентированного задания по дисциплине «История России» выступает **анализ исторического документа**.

Алгоритм анализа исторического документа:

1. Происхождение текста.

1.1. Кто написал этот текст?

1.2. Когда он был написан?

1.3. К какому виду источников он относится: письмо, дневник, официальный документ и т.п.?

2. Содержание текста.

Каково содержание текста? Сделайте обзор его структуры. Подчеркните наиболее важные слова, персоналии, события. Если вам не известны какие-то слова, поработайте со словарем.

3. Достоверна ли информация в тексте?

3.1. Свидетелем первой или второй очереди является автор текста? (Если автор присутствовал во время события, им описываемого, то он является первоочередным свидетелем).

3.2. Текст первичен или вторичен? (Первичный текст современен событию, вторичный текст берет информацию из различных первичных источников. Первичный текст может быть написан автором второй очереди, то есть созданным много позже самого события).

4. Раскройте значение источника и содержащейся в ней информации.

5. Дайте обобщающую оценку данному источнику.

- Когда, где и почему появился закон (сборник законов)?

- Кто автор законов?

- Чьи интересы защищает закон?

- Охарактеризуйте основные положения закона (ссылки на текст, цитирование).

- Сравните с предыдущими законами.

- Что изменилось после введения закона?

- Ваше отношение к этому законодательному акту (справедливость, необходимость и т.д.).

## ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ

Тесты – это вопросы или задания, предусматривающие конкретный, краткий, четкий ответ на имеющиеся эталоны ответов. При самостоятельной подготовке к тестированию студенту необходимо:

1. готовясь к тестированию, проработать информационный материал по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

2. четко выяснить все условия тестирования заранее. Студент должен знать, сколько тестов ему будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т. д.;

3. приступая к работе с тестами, внимательно и до конца нужно прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов; выбрать правильные (их может быть несколько); на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам;

- в процессе решения желательно применять несколько подходов в решении задания. Это позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант;

- не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, нужно переходить к другим тестовым заданиям; к трудному вопросу можно обратиться в конце;

- обязательно необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

## ПОДГОТОВКА ЭССЕ

**Эссе** - прозаическое сочинение небольшого объема и свободной композиции на частную тему, трактуемую субъективно и обычно неполно. (Словарь Ожегова)

Жанр эссе предполагает свободу творчества: позволяет автору в свободной форме излагать мысли, выражать свою точку зрения, субъективно оценивать, оригинально освещать материал; это размышление по поводу когда-то нами услышанного, прочитанного или пережитого, часто это разговор вслух, выражение эмоций и образность.

Уникальность этого жанра в том, что оно может быть написано на любую тему и в любом стиле. На первом плане эссе – личность автора, его мысли, чувства, отношение к миру. Однако необходимо найти оригинальную идею (даже на традиционном материале), нестандартный взгляд на какую-либо проблему. Для грамотного, интересного эссе необходимо соблюдение некоторых правил и рекомендаций.

### **Особенности эссе:**

- - наличие конкретной темы или вопроса;
- - личностный характер восприятия проблемы и её осмысления;
- - небольшой объём;
- - свободная композиция;
- - непринуждённость повествования;
- - внутреннее смысловое единство;
- - афористичность, эмоциональность речи.

### **Эссе должно иметь следующую структуру:**

1. Вступление (введение) определяет тему эссе и содержит определения основных встречающихся понятий.

2. Содержание (основная часть) - аргументированное изложение основных тезисов. Основная часть строится на основе аналитической работы, в том числе - на основе анализа фактов. Наиболее важные обществоведческие понятия, входящие в эссе, систематизируются, иллюстрируются примерами. Суждения, приведенные в эссе, должны быть доказательны.

3. Заключение - это окончательные выводы по теме, то, к чему пришел автор в результате рассуждений. Заключение суммирует основные идеи. Заключение может быть представлено в виде суммы суждений, которые оставляют поле для дальнейшей дискуссии.

### **Требования, предъявляемые к эссе:**

1. Объем эссе не должен превышать 1–2 страниц.

2. Эссе должно восприниматься как единое целое, идея должна быть ясной и понятной.

3. Необходимо писать коротко и ясно. Эссе не должно содержать ничего лишнего, должно включать только ту информацию, которая необходима для раскрытия вашей позиции, идеи.

4. Эссе должно иметь грамотное композиционное построение, быть логичным, четким по структуре.

5. Эссе должно показывать, что его автор знает и осмысленно использует теоретические понятия, термины, обобщения, мировоззренческие идеи.

6. Эссе должно содержать убедительную аргументацию для доказательства заявленной по проблеме позиции. Структура любого доказательства включает по меньшей мере три составляющие: тезис, аргументы, вывод или оценочные суждения.

- Тезис — это сужение, которое надо доказать.
- Аргументы — это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса.
- Вывод — это мнение, основанное на анализе фактов.
- Оценочные суждения — это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах.

### **Приветствуется использование:**

• Эпиграфа, который должен согласовываться с темой эссе (проблемой, заключенной в афоризме); дополнять, углублять лейтмотив (основную мысль), логику рассуждения вашего эссе. Пословиц, поговорок, афоризмов других авторов, также подкрепляющих вашу точку зрения, мнение, логику рассуждения.

• Мнений других мыслителей, ученых, общественных и политических деятелей.

- Риторические вопросы.
- Непринужденность изложения.

Подготовка и работа над написанием эссе:

- изучите теоретический материал;
- уясните особенности заявленной темы эссе;
- продумайте, в чем может заключаться актуальность заявленной темы;
- выделите ключевой тезис и определите свою позицию по отношению к нему;
- определите, какие теоретические понятия, научные теории, термины помогут вам раскрыть суть тезиса и собственной позиции;
- составьте тезисный план, сформулируйте возникшие у вас мысли и идеи;
- для каждого аргумента подберите примеры, факты, ситуации из жизни, личного опыта, литературных произведений;
- распределите подобранные аргументы в последовательности;
- придумайте вступление к рассуждению;
- изложите свою точку зрения в той последовательности, которую вы наметили.
- сформулируйте общий вывод работы.

При написании эссе:

- напишите эссе в черновом варианте, придерживаясь оптимальной структуры;
- проанализируйте содержание написанного;
- проверьте стиль и грамотность, композиционное построение эссе, логичность и последовательность изложенного;
- внесите необходимые изменения и напишите окончательный вариант.

**Требования к оформлению:**

- Титульный лист.
- Текст эссе.
- Формат листов-А4. Шрифт- Times New Roman, размер-14, расстояние между строк- интерлиньяж полуторный, абзацный отступ-1,25см., поля-30мм(слева), 20мм (снизу),20мм (сверху), 20мм (справа). Страницы нумеруются снизу по центру. Титульный лист считается, но не нумеруется.

**Критерии оценивания эссе:**

1. Самостоятельное проведение анализа проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария
2. Четкость и лаконичность изложения сути проблемы
3. Материал излагается логически последовательно

4. Аргументированность собственной позиции
5. Наличие выводов
6. Владение навыками письменной речи

## **ПОДГОТОВКА К ОПРОСУ**

- ***Письменный опрос***

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе.

- ***Устный опрос***

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С

незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала.
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание.

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу. Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы.



## ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

При подготовке к *зачету* по дисциплине «*История России*» обучающемуся рекомендуется:

1. повторить пройденный материал и ответить на вопросы, используя конспект и материалы лекций. Если по каким-либо вопросам у студента недостаточно информации в лекционных материалах, то необходимо получить информацию из раздаточных материалов и/или учебников (литературы), рекомендованных для изучения дисциплины «*История России*».

Целесообразно также дополнить конспект лекций наиболее существенными и важными тезисами для рассматриваемого вопроса;

2. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *зачете* особое внимание необходимо уделять схемам, рисункам, графикам и другим иллюстрациям, так как подобные графические материалы, как правило, в наглядной форме отражают главное содержание изучаемого вопроса;

3. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на *зачете* (в случаях, когда отсутствует иллюстративный материал) особое внимание необходимо обращать на наличие в тексте словосочетаний вида «во-первых», «во-вторых» и т.д., а также дефисов и перечислений (цифровых или буквенных), так как эти признаки, как правило, позволяют структурировать ответ на предложенное задание.

Подобную текстовую структуризацию материала слушатель может трансформировать в рисунки, схемы и т. п. для более краткого, наглядного и удобного восприятия (иллюстрации целесообразно отразить в конспекте лекций – это позволит оперативно и быстро найти, в случае необходимости, соответствующую информацию);

4. следует также обращать внимание при изучении материала для подготовки к *зачету* на словосочетания вида «таким образом», «подводя итог

сказанному» и т.п., так как это признаки выражения главных мыслей и выводов по изучаемому вопросу (пункту, разделу). В отдельных случаях выводы по теме (разделу, главе) позволяют полностью построить (восстановить, воссоздать) ответ на поставленный вопрос (задание), так как содержат в себе основные мысли и тезисы для ответа.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому

Комплексу

С.А. Упоров

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ  
Б1.О.03 РУССКИЙ ЯЗЫК И ДЕЛОВЫЕ КОММУНИКАЦИИ**

Направление подготовки  
*13.03.02 Электроэнергетика и электротехника*

Профиль  
*Электротехнические комплексы и системы  
горных и промышленных предприятий*

квалификация выпускника: **бакалавр**

формы обучения: **очная, заочная**

Автор: Карякина М. В., канд. филол. наук

Одобрены на заседании кафедры  
иностраных языков  
и деловой коммуникации

Зав. кафедрой

(подпись)

Юсупова Л. Г.

Протокол № 1 от 28.09.2021

Рассмотрены методической комиссией  
горно-механического факультета

Председатель

(подпись)

Осипов П. А.

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

Методические указания адресованы студентам, обучающимся по направлению подготовки «Электроэнергетика и электротехника», и призваны обеспечить эффективную самостоятельную работу по курсу «Русский язык и деловые коммуникации».

Форма контроля самостоятельной работы студентов: проверка на практическом занятии, опрос, контрольная работа, практико-ориентированное задание, деловая игра, зачет.

## ФОРМЫ И СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Подготовка к практическим занятиям заключается в изучении необходимого теоретического материала (см. нижеприведенные списки основной и дополнительной литературы) и выполнении вариативных индивидуальных или групповых заданий по изучаемым темам.

Основная литература по курсу:

1. *Гавриленко Р. И., Меленкова Е. С., Шалина И. В.* Русский язык и культура речи: учебное пособие. Екатеринбург: УГГУ, 2013. 85 с.
2. *Гавриленко Р. И.* Русский язык делового общения: учебно-методическое пособие. Екатеринбург: УГГУ, 2018. 100 с.
3. *Голуб И.Б.* Русская риторика и культура речи [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Голуб И.Б., Неклюдов В.Д.— Электрон. текстовые данные. — М.: Логос, 2012. — 328 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/9074.html>. — ЭБС «IPRbooks», по паролю.
4. *Меленкова Е. С.* Русский язык делового общения: учебное пособие. Екатеринбург: УГГУ, 2018. 80 с.

### Дополнительная литература по темам:

Тема	Литература
Современный русский язык	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>Русский язык и культура речи</i> [Электронный ресурс]: курс лекций для бакалавров всех направлений/ – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Вузовское образование, 2016. – 72 с. – Режим доступа: <a href="http://www.iprbookshop.ru/54478.html">http://www.iprbookshop.ru/54478.html</a>/ - ЭБС «IPRbooks», по паролю.</li> <li>- <i>Кронгауз М. А.</i> Русский язык на грани нервного срыва. – М.: Corpus, 2017.</li> <li>- <i>Чуковский К. И.</i> Живой как жизнь. – М.: Зербра Е, 2009.</li> <li>- Федеральный закон «О государственном языке Российской Федерации». – Режим доступа: <a href="http://rus-gos.spbu.ru/index.php/bills">http://rus-gos.spbu.ru/index.php/bills</a></li> </ul>
Культура речи. Нормы литературного языка	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>Карякина М. В.</i> Русский язык и культура речи. Подготовка к контрольному тестированию. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. – 71 с.</li> <li>- <i>Культура устной и письменной речи делового человека:</i> Справочник. Практикум. / Н. С. Водина и др. – М.: Флинта: Наука, 2012. – 320 с.</li> <li>Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю. Русский язык и культура речи / Л. А. Введенская, Л. Г. Павлова, Е. Ю. Кашаева. – 5-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», Феникс, 2010. – 488 с.</li> <li>- <i>Меленкова Е. С.</i> Культура речи и деловое общение: тестовые задания для студентов всех специальностей. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 78 с.</li> <li>- <i>Розенталь Д. Э.</i> Справочник по правописанию и литературной правке / Под ред. И. Б. Голуб. 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 368 с.</li> <li>- <i>Розенталь Д. Э.</i> Лексика и стилистика: Правила и упражнения / Д. Э. Розенталь. — М.: Мир и Образование, 2016. — 96 с. – Режим доступа: <a href="http://mio-books.ru/content/files/catalog1/_otryvok_Leks_i_stil.pdf">http://mio-books.ru/content/files/catalog1/_otryvok_Leks_i_stil.pdf</a></li> <li>- <i>Русский язык и культура речи. Семнадцать практических занятий</i> / Е. В. Ганапольская, Т. Ю. Волошинова, Н. В. Анисина, Ю. А. Ермолаева, Я. В. Лукина, Т. А. Потапенко, Л. В. Степанова. Под ред. Е. В. Ганапольской, А. В. Хохлова. – СПб.: Питер, 2005. – 336 с.</li> <li><i>Скворцов Л. И.</i> Большой толковый словарь правильной русской речи [Электронный ресурс]/ Скворцов Л. И.— Электрон. текстовые данные. —</li> </ul>

	М.: Мир и Образование, Оникс, 2009. — 1104 с.— Режим доступа: <a href="http://www.iprbookshop.ru/14555.html">http://www.iprbookshop.ru/14555.html</a> . — ЭБС «IPRbooks», по паролю
Стилистика. Научный и официально-деловой стиль	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>Аскаркина Н. А.</i> Технология подготовки научного текста: учебно-методическое пособие. 3-е изд., стер. – М.: Флинта: Наука, 2017. – 112 с.</li> <li>- <i>Карякина М. В.</i> Культура научной речи: учебное пособие / М. В. Карякина; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 131 с.</li> <li>- <i>Кожина М. Н.</i> Стилистика русского языка: учебник / М. Н. Кожина, Л. Р. Дускаева, В. А. Салимовский. – М.: Флинта: Наука, 2008 – 464 с.</li> <li>- <i>Колтунова М. В.</i> Язык и деловое общение. Нормы. Риторика. Этикет. – М., 2000.</li> <li>- <i>Меленкова Е. С.</i> Стилистика русского языка: учебное пособие. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. – 86 с.</li> </ul>
Нормы делового общения	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>Введенская Л. А., Павлова Л. Г.</i> Деловая риторика: учебное пособие для вузов / Л. А. Введенская, Л. Г. Павлова. – 5-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», Феникс, 2010. – 488 с.</li> <li>- <i>Гойхман О. Я., Надеина Т. М.</i> Речевая коммуникация. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 207с.</li> <li>- <i>Лавриненко В. Н.</i> Психология и этика делового общения. – Москва: Юрайт, 2012. – 592 с.</li> </ul>

*Самостоятельное изучение тем курса и повторение материала лекций* для студентов заочного отделения предполагает работу с вышеприведенной основной и дополнительной литературой по изучаемым темам (чтение, конспектирование, сопоставление с материалом лекций).

*Ответы на вопросы для самопроверки (самоконтроля)* подготавливаются студентами самостоятельно по теме «Современный русский язык». Материалом для подготовки служат конспекты лекций, основная и дополнительная литература. Опрос проводится на практическом занятии. Вопросы для опроса следующие:

1. Каково происхождение русского национального языка?
2. Каковы разновидности современного русского национального языка?
3. Что такое территориальные диалекты?
4. Что такое диалектизмы?
5. Что такое жаргон и какие виды жаргонов существуют?
6. Что такое жаргонизмы?
7. Что такое просторечие?
8. Каково современное состояние современного русского национального языка?
9. Каковы тенденции развития современного русского национального языка?
10. Что такое литературный язык и каковы его признаки?

По этой же тематике проводится тестирование. Если опрос является важнейшим средством развития мышления и речи и позволяет оценить знания и кругозор выступающих с ответом студентов, умение ими логически построить ответ, владение монологической речью и иные коммуникативные навыки, то тестирование позволяет преподавателю быстро и легко оценить уровень знаний всех обучающихся по всем вопросам темы.

*Подготовка к контрольной работе* по теме «Культура речи. Нормы литературного языка» проводится как аудиторно (на практических занятиях в ходе выполнения и проверки заданий), так и самостоятельно. Самостоятельная подготовка предполагает работу со словарями, справочниками, сборниками тестовых и практических заданий.

Практические задания содержатся в пособии Р. И. Гавриленко, Е. С. Меленковой и И. В. Шалиной «Русский язык и культура речи», а также в пособии Е. С. Меленковой «Русский язык делового общения».

Тестовые задания приводятся в пособиях Е. С. Меленковой «Русский язык и деловое общение: тестовые задания для студентов всех специальностей» (без ключей) и М. В. Карякиной «Русский язык и культура речи. Подготовка к итоговому тестированию» (с ключами).

При выполнении заданий необходимо пользоваться словарями и справочниками, как печатными, так и электронными.

Электронные словари	Печатные словари (любое издание)
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Скворцов Л. И. Большой толковый словарь правильной русской речи [Электронный ресурс]/ Режим доступа: <a href="http://www.iprbookshop.ru/14555.html">http://www.iprbookshop.ru/14555.html</a>. — ЭБС «IPRbooks», по паролю</li> <li>- Грамота (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: <a href="http://www.gramota.ru">http://www.gramota.ru</a> Культура письменной речи (сайт) [Электронный ресурс] – Режим доступа: <a href="http://www.grammar.ru">http://www.grammar.ru</a>.</li> <li>- Русский язык: энциклопедия русского языка (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: <a href="http://russkiyuzik.ru">http://russkiyuzik.ru</a>.</li> <li>- Стилистический энциклопедический словарь русского языка (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: <a href="http://stylistics.academic.ru">http://stylistics.academic.ru</a></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ожегов С. И., Шведова Н. Ю. Толковый словарь русского языка.</li> <li>- Розенталь Д. Э. Словарь трудностей русского языка.</li> <li>- Словарь правильности русской речи.</li> <li>- Словарь грамматических вариантов русского языка.</li> <li>- Словарь лексических трудностей.</li> <li>- Словари синонимов, паронимов, антонимов.</li> <li>- Орфоэпический словарь.</li> <li>- Орфографический словарь.</li> <li>- Розенталь Д. Э. Справочник по орфографии, пунктуации и литературной правке.</li> <li>- Управление в русском языке. Словарь-справочник.</li> <li>Грамматический словарь русского языка. Словоизменение</li> </ul>

*Выполнение самостоятельного письменного домашнего задания (практико-ориентированного задания)* осуществляется по вариантам. Каждое практико-ориентированное задание состоит из трех блоков, в которых проверяется наличие необходимых знаний, умений и формирование у студентов различных навыков. В первом блоке приводится задание по научному стилю речи, во втором и третьем – по официально-деловому стилю (составление и редактирование документов общепринятого образца). Варианты заданий приведены в комплекте оценочных материалов (КОМ).

*Подготовка к деловой игре* состоит в ознакомлении студентов с концепцией игры, чтении дополнительной литературы по риторике, психологии и этике делового общения, а также в записи предполагаемого хода деловой беседы, тренировке произнесения речи. Концепции различных вариантов деловых игр описаны в КОМ. Вариант игры выбирается преподавателем в зависимости от уровня подготовленности и других особенностей группы.

*Подготовка к зачету* предполагает тренинг выполнения тестовых заданий, который можно проводить на сайте [i-exam.ru](http://i-exam.ru) или с помощью пособий М. В. Карякиной и Е. С. Меленковой, содержащих такие задания. Кроме подготовки к тестированию важно уделить внимание практико-ориентированным заданиям. Студенты должны ознакомиться с образцом задания и его выполнения, а также выполнить тренировочные задания.

Образец практико-ориентированного задания: напишите заявление о предоставлении Вам отпуска за свой счет.

Образец выполнения 1:

Директору ООО «Икс»  
А. А. Иванову  
инженера Н. П. Петрова

заявление

Прошу предоставить мне с 12.03.2017 по 17.03.2017 внеочередной отпуск без сохранения заработной платы по семейным обстоятельствам.

10.03.2017



(Н. П. Петров)

Образец выполнения 2:

Директору ОАО «Рондо»  
Скворцову И. О.  
от Алексева М. А.,  
программиста

Заявление

Прошу предоставить мне неоплачиваемый отпуск с 22 по 26 января текущего года по семейным обстоятельствам.

19 января 2017 г.



Если в ходе подготовки к зачету у обучающихся возникают вопросы, они должны обратиться за консультационной помощью к преподавателю.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому  
Комплексу

  
С.А. Управов

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ  
РАБОТЕ СТУДЕНТОВ**

**Б1.О.06 РАЗВИТИЕ НАВЫКОВ КРИТИЧЕСКОГО  
МЫШЛЕНИЯ**

Направление подготовки

**13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**

профиль

**Электроэнергетика горных и промышленных предприятий**

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

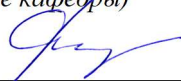
Автор: Гладкова И. В., доцент, канд. филос. н.

Одобрена на заседании кафедры

Философии и культурологии

(название кафедры)

Зав. кафедрой



(подпись)

Беляев В.П.

(Фамилия И.О.)

Протокол №1 от 01.09.2021

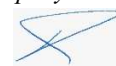
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией

Горно-механического факультета

(название факультета)

Председатель



(подпись)

Осипов П. А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург



## СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по работе с текстом лекций	5
2	Методические рекомендации по подготовке к опросу	8
3	Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)	9
4	Методические рекомендации по написанию эссе	11
5	Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям	14
6	Методические рекомендации по подготовке к дискуссии	15
7	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	17
	Заключение	20
	Список использованных источников	21

## ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

**Самостоятельная работа студента (СРС)** - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

**Самостоятельная работа студента** - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение информации и ее логическая переработка;

- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблеме;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельной работе, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

## 1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить опiski, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тестов по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

## 2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

### *Письменный опрос*

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

### *Устный опрос*

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С неизвестными терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии<sup>1</sup>.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: [http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii\\_dlya\\_studentov\\_21.pdf](http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf)

<sup>2</sup> Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: [http://priab.ru/images/metod\\_agro/Metod\\_Inostran\\_yazyk\\_35.03.04\\_Agro\\_15.01.2016.pdf](http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf)

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем времени на подготовку к устному опросу зависит от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

### 3. Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

*Доклад должен соответствовать следующим требованиям:*

- тема доклада должна быть согласована с преподавателем и соответствовать теме занятия;

- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;

- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны соответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;

- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)

2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.

3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

#### ***Общая структура доклада***

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

#### ***Вступление.***

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;



- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

**Основная часть.**

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки) Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

**Заключение.**

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

<i>Критерии оценки доклада, сообщения</i>	<i>Количество баллов</i>
Содержательность, информационная насыщенность доклада	1
Наличие аргументов	1
Наличие выводов	1
Наличие презентации доклада	1
Владение профессиональной лексикой	1
Итого:	5

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов

#### 4. Методические рекомендации по написанию эссе

*Эссе* - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

##### *Структура эссе*

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);
2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершенно необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

#### ***Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе***

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

*Тезис* - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

#### ***Требования к фактическим данным и другим источникам***

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедиться в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

### ***Как подготовить и написать эссе?***

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

*Планирование* - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

*Цель* должна определять действия.

*Идеи*, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

*Аналогии* - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

*Ассоциации* - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

*Предположения* - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

*Рассуждения* - формулировка и доказательство мнений.

*Аргументация* - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

*Суждение* - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

*Доводы* - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники*. Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

*Качество текста* складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

*Мысль* - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

*Внятность* - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

*Грамотность* отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

*Корректность* — это стиль написанного. Стиль определяется жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

## 5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогов обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

## 6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия*, где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

*Дискуссия* (от лат. discussio - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

*Дискуссия* обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обуславливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

*Дискуссия- диалог* чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

*Дискуссия - спор* используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,
- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;
- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;
- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;
- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

**Подготовка студентов к дискуссии:** если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

**В проведении дискуссии** выделяется несколько этапов.

**Этап 1-й, введение в дискуссию:** формулирование проблемы и целей дискуссии; определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

**Этап 2-й, обсуждение проблемы:** обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

**Этап 3-й, подведение итогов обсуждения:** выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

## 7. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

*Экзамен* - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы (проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неувоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь



на то, что это не попадет на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала, кратко записав это на листе бумаги, создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее и ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или в учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

- 1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;
- 2) добросовестное выполнение заданий;
- 3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;
- 4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;
- 5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;
- 6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;
- 7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html/>
2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml>
3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

директор по учебно-методическому

Комплексу

С.А. Упоров

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ  
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

**ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ**

Автор: Шулиманов Д. Ф.

Одобрена на заседании кафедры  
Физической культуры

(название кафедры)

Зав. кафедрой

(подпись)

Шулиманов Д. Ф.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 29.09.2021

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией  
Горно-механического факультета

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П. А.

(Фамилия И.О.)

Протокол №2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

## Содержание

Цели и задачи дисциплины .....	3
Место дисциплины в структуре основной образовательной программы .....	3
Требования к оформлению теста .....	3
Содержание теста.....	3
Содержание опроса.....	9
Выполнение работы над ошибками.....	11

### Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

### Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

### Требования к оформлению теста

Задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в тесте.

Выполненный тест необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если тест выполнен без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен, тест, вопросы для проведения опроса.

### Содержание теста

№ п/п	Вопросы	Варианты ответов
1	Физическая культура представляет собой:	А) учебный предмет в школе Б) выполнение физических упражнений В) процесс совершенствования возможностей человека Г) часть общей культуры общества
2	Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется:	А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращения, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности
3	Под физическим развитием понимается:	А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни Б) размеры мускулатуры, формы тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений



		Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом
4	Физическая культура ориентирована на совершенствование	А) физических и психических качеств людей Б) техники двигательных действий В) работоспособности человека Г) природных физических свойств человека
5	Отличительным признаком физической культуры является:	А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям Б) физическое совершенство В) выполнение физических упражнений Г) занятия в форме уроков
6	В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к:	А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества Б) общим принципам образования и воспитания В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания Г) принципам обучения
7	Физическими упражнениями называются:	А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания
8	Нагрузка физических упражнений характеризуется:	А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия Б) величиной их воздействия на организм В) временем и количеством повторений двигательных действий Г) напряжением отдельных мышечных групп
9	Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:	А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей В) утомлением, возникающим при их выполнении Г) частотой сердечных сокращений
10	Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка	А) мала и ее следует увеличить Б) переносится организмом относительно легко В) достаточно большая и ее можно повторить Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить
11	Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений	А) 120-130 уд/мин Б) 130-140 уд/мин В) 140-150 уд/мин Г) свыше 150 уд/мин
12	Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:	А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения.

		Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем физической работы за отведенный отрезок времени.
13	Что понимают под закаливанием:	А) купание в холодной воде и хождение босиком Б) приспособление организма к воздействию внешней среды В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми Г) укрепление здоровья
14	Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит:	А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении Г) после занятия надо принять холодный душ
15	Правильное дыхание характеризуется:	А) более продолжительным выдохом Б) более продолжительным вдохом В) вдохом через нос и выдохом через рот Г) равной продолжительностью вдоха и выдоха
16	При выполнении упражнений вдох не следует делать во время:	А) вращений и поворотов тела Б) наклонах туловища назад В) возвращение в исходное положение после наклона Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным, рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны
17	Что называется осанкой?	А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп В) привычная поза человека в вертикальном положении Г) силуэт человека
18	Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее:	А) затылком, ягодицами, пятками Б) лопатками, ягодицами, пятками В) затылком, спиной, пятками Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками
19	Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что:	А) он обеспечивает ритмичность работы организма Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений
20	Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддержать работоспособность в течение дня, потому что:	А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека Б) снимает утомление нервных клеток организма В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения Г) притупляется чувство общей усталости и повышает тонус организма

21	Систематические и грамотно организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так как	<p>А) хорошая циркуляция крови во время упражнений обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма</p> <p>Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии</p> <p>В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма</p> <p>Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям</p>
22	Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части?	<p>А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения</p> <p>Б) это обусловлено необходимостью управлять динамикой работоспособности занимающихся.</p> <p>В) выделение частей в уроке требует Министерство образования России</p> <p>Г) потому, что перед уроком, как правило, ставятся задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них</p>
23	Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные. 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3. Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу. 5. Ходьба с постепенным повышением частоты шагов. 6. Прыжки. 7. Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе.	<p>А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8</p> <p>Б) 7, 5, 8, 6, 2, 3, 2, 1, 4</p> <p>В) 3, 7, 5, 8, 1, 2, 6, 4</p> <p>Г) 3, 1, 2, 4, 7, 6, 8, 4</p>
24	Под силой как физическим качеством понимается:	<p>А) способность поднимать тяжелые предметы</p> <p>Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений</p> <p>В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений</p> <p>Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему.</p>
25	Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке. 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости. 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения.	<p>А) 1, 2, 5, 4, 3, 6</p> <p>Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5</p> <p>В) 2, 6, 4, 5, 3, 1</p> <p>Г) 2, 1, 3, 4, 5, 6</p>
26	Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств. Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2. Гибкость. 3. быстрота. 4. Сила.	<p>А) 1, 2, 3, 4</p> <p>Б) 2, 3, 1, 4</p> <p>В) 3, 2, 4, 1</p> <p>Г) 4, 2, 3, 1</p>
27	Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения	А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы

		<p>Б) упражнения, способствующие снижению массы тела</p> <p>В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки</p> <p>Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений</p>
28	И для увеличения мышечной массы, и для снижения веса тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется:	<p>А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходить к упражнениям, нагружающим другую группу мышц</p> <p>Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы</p> <p>В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений</p> <p>Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе</p>
29	Под быстротой как физическим качеством понимается:	<p>А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью</p> <p>Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени</p> <p>В) способность быстро набирать скорость</p> <p>Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой</p>
30	Для развития быстроты используют:	<p>А) подвижные и спортивные игры</p> <p>Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции</p> <p>В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений</p> <p>Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью</p>
31	Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время:	<p>А) подвижных и спортивных игр</p> <p>Б) челночного бега</p> <p>В) прыжков в высоту</p> <p>Г) метаний</p>
32	Под гибкостью как физическим качеством понимается:	<p>А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона</p> <p>Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений.</p> <p>В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев</p> <p>Г) эластичность мышц и связок</p>
33	Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии:	<p>А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений</p> <p>Б) выполняются 12-16 циклов движения</p> <p>В) упражнения выполняются до появления пота</p> <p>Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений</p>
34	Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнять перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную последовательность: 1. Дыхательные упражнения. 2. Легкий продолжительный бег. 3. Прыжковые	<p>А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7</p> <p>Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1</p> <p>В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6</p> <p>Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1</p>

	упражнения с отягощением и без них. 4. дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5. Повторный бег на короткие дистанции. 6. Ходьба. 7. Упражнения на частоту движений.	
35	При развитии гибкости следует стремиться	<p>А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах</p> <p>Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах</p> <p>В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленном суставах</p> <p>Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов</p>
36	Под выносливостью как физическим качеством понимается:	<p>А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки</p> <p>Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению</p> <p>В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь</p> <p>Г) способность сохранять заданные параметры работы</p>
37	Выносливость человека не зависит от:	<p>А) функциональных возможностей систем энергообеспечения</p> <p>Б) скорости двигательной реакции</p> <p>В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть</p> <p>Г) силы мышц</p>
38	При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются:	<p>А) максимальная активность систем энергообеспечения</p> <p>Б) умеренная интенсивность</p> <p>В) максимальная интенсивность</p> <p>Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата</p>
39	Техникой физических упражнений принято называть	<p>А) способ целесообразного решения двигательной задачи</p> <p>Б) способ организации движений при выполнении упражнений</p> <p>В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений</p> <p>Г) рациональную организацию двигательных действий</p>
40	При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники).	<p>А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия</p> <p>Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие</p> <p>В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи</p> <p>Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи</p>
41	В процессе обучения двигательным действиям используют методы целостного или расчлененного упражнения. Выбор метода зависит от	<p>А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы</p> <p>Б) сложности основы техники</p> <p>В) количества элементов, составляющих двигательное действие</p> <p>Г) предпочтения учителя</p>

42	Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения	А) основы техники Б) ведущего звена техники В) подводящих упражнений Г) исходного положения
43	Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к:	А) урочным формам занятий физическими упражнениями Б) «малым» неурочным формам В) «крупным» неурочным формам Г) соревновательным формам
44	Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым?	А) уроки физической культуры Б) внеклассная работа В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия Г) содержание и организация педагогической практики
45	Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля:	А) оперативному Б) текущему В) предварительному Г) итоговому

### Критерии оценивания теста

**Оценка за тест** определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 90 баллов.

### Результат теста

*Тест оценивается на «зачтено», «не зачтено»:*

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

## ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ОПРОСА

1. Определение понятий в области физической культуры
2. Понятие «здоровье» и основные его компоненты
3. Факторы, определяющие здоровье человека.
4. Образ жизни и его составляющие.
5. Разумное чередование труда и отдыха, как компонент ЗОЖ.
6. Рациональное питание и ЗОЖ.
7. Отказ от вредных привычек и соблюдение правил личной и общественной гигиены.
8. Двигательная активность — как компонент ЗОЖ.
9. Выполнение мероприятий по закаливанию организма.
10. Физическое самовоспитание и самосовершенствование как необходимое условие реализации мероприятий ЗОЖ.
11. Врачебный контроль как обязательная процедура для занимающихся физической культурой.
12. Самоконтроль — необходимая форма контроля человека за физическим состоянием.
13. Методика самоконтроля физического развития.
14. Самостоятельное измерение артериального давления и частоты сердечных сокращений.
15. Проведение функциональных проб для оценки деятельности сердечно-сосудистой системы.
16. Проведение функциональных проб для оценки деятельности дыхательной системы.
17. Самоконтроль уровня развития физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости, силы и выносливости
18. Ведение дневника самоконтроля.
19. Цель и задачи физического воспитания в вузе.
20. Специфические функции физической культуры.
21. Социальная роль и значение спорта.
22. Этапы становления физической культуры личности студента.
23. Понятия физическая культура, физическое воспитание, физическое развитие, физическое совершенство.

24. Реабилитационная физическая культура, виды, краткая характеристика.
25. Разделы учебной программы дисциплины «Физическая культура».
26. Комплектование учебных отделений студентов для организации и проведения занятий по физическому воспитанию.
27. Преимущества спортивно-ориентированной программы дисциплины «Физическая культура» для студентов.
28. Особенности комплектования студентов с различным характером заболеваний в специальном учебном отделении.
29. Зачетные требования по учебной дисциплине «Физическая культура».
30. Формирование двигательного навыка.
31. Устойчивость организма к воздействию неблагоприятных факторов.
32. Мотивация и направленность самостоятельных занятий.
33. Утренняя гигиеническая гимнастика.
34. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
35. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
36. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
37. Особенности самостоятельных занятий женщин.
38. Мотивация и направленность самостоятельных занятий. Утренняя гигиеническая гимнастика.
39. Физические упражнения в течение учебного дня: физкультминутки, физкультпаузы.
40. Самостоятельные тренировочные занятия: структура, требования к организации и проведению.
41. Мотивация выбора видов спорта или систем физических упражнений.
42. Самостоятельные занятия оздоровительным бегом.
43. Самостоятельные занятия атлетической гимнастикой.
44. Особенности самостоятельных занятий женщин.
45. Роль физической культуры в профессиональной деятельности бакалавра и специалиста.
46. Производственная физическая культура, ее цели и задачи.
47. Методические основы производственной физической культуры.
48. Производственная физическая культура в рабочее время.
49. Физическая культура и спорт в свободное время.
50. Профилактика профессиональных заболеваний и травматизма средствами физической культуры.
51. Понятие ППФП, её цель, задачи. Прикладные знания, умения и навыки.
52. Прикладные психические качества.
53. Прикладные специальные качества.
54. Факторы, определяющие содержание ППФП: формы труда, условия труда.
55. Факторы, определяющие содержание ППФП: характер труда, режим труда и отдыха.
56. Дополнительные факторы, определяющие содержание ППФП.
57. Средства ППФП.
58. Организация и формы ППФП в вузе.
59. Понятия общей и специальной физической подготовки.
60. Отличия понятий спортивная подготовка и спортивная тренировка.
61. Стороны подготовки спортсмена.
62. Средства спортивной подготовки.
63. Структура отдельного тренировочного занятия.
64. Роль подготовительной части занятия в тренировочном процессе.
65. Понятие «физическая нагрузка», эффект ее воздействия на организм.
66. Внешние признаки утомления.
67. Виды и параметры физических нагрузок.
68. Интенсивность физических нагрузок.
69. Психофизиологическая характеристика умственной деятельности.
70. Работоспособность: понятие, факторы, периоды
71. Физические упражнения в течение учебного дня для поддержания работоспособности.
72. Бег как самое эффективное средство восстановления и повышения работоспособности.
73. Плавание и работоспособность.
74. Методические принципы физического воспитания, сущность и значение.
75. Принципы сознательности и активности, наглядности в процессе физического воспитания.
76. Принципы доступности и индивидуализации, систематичности и динамичности.
77. Средства физической культуры.
78. Общепедагогические методы физического воспитания.
79. Методы обучения технике двигательного действия.
80. Этапы обучения двигательного действия.
81. Методы развития физических качеств: равномерный, повторный, интервальный.
82. Метод круговой тренировки, игровой и соревновательный методы.
83. Сила как физическое качество, общая характеристика силовых упражнений.
84. Методы развития силы.
85. Выносливость — виды выносливости, особенности развития выносливости.

86. Развитие физических качеств: быстроты, гибкости, ловкости.
87. Понятие «спорт». Его принципиальное отличие от других видов занятий физическими упражнениями.
88. Массовый спорт: понятие, цель, задачи.
89. Спорт высших достижений: понятие, цель, задачи.
90. Студенческий спорт, его организационные особенности.
91. Студенческие спортивные соревнования.
92. Студенческие спортивные организации.
93. Всероссийский физкультурно-спортивный комплекс «ГТО» (Готов к труду и обороне).

### **Выполнение работы над ошибками**

При получении проверенного теста необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данного теста. Тесты, тесты являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Директор по учебно-методическому

Комплексу

С.А. Упров

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ  
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

**ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ  
И СПОРТУ**

Авторы: Шулиманов Д.Ф., Жданкина Е.Ф.

Соавторы: Харламов А.И., Никуленок Ф.С., Андреев А.Л., Бугаев И.Ю.

Одобрена на заседании кафедры  
Физической культуры

*(название кафедры)*

Зав. кафедрой

*(подпись)*

Шулиманов Д. Ф.

*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 1 от 29.09.2021

*(Дата)*

Рассмотрена методической комиссией  
Горно-механического факультета

*(название факультета)*

Председатель

*(подпись)*

Осипов П. А.

*(Фамилия И.О.)*

Протокол №2 от 12.10.2021

*(Дата)*

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	3
Глава 1. ХОДЬБА, БЕГ.....	5
1.1. Физическая подготовка студента-легкоатлета.....	5
1.2. Сердечно-сосудистая и сердечно-респираторная системы.....	6
Глава 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕХНИКИ ДВИЖЕНИЙ: ФАЗЫ, СТРУКТУРЫ, СИЛЫ ДВИЖЕНИЙ.....	8
2.1. Основы техники спортивной ходьбы.....	10
2.2. Основы техники бега.....	13
Глава 3. ВИДЫ УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ ОСНОВНЫХ МЫШЕЧНЫХ ГРУПП.....	18
3.1. Упражнения для верхней части туловища.....	18
3.2. Упражнения для средней части тела.....	42
3.3. Упражнения для мышц верхней части ног.....	53
3.4. Упражнения для мышц голени и стопы.....	64
3.5. Упражнения для восстановления мышечных групп.....	74
Глава 4. ОБЩАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА.....	84
Глава 5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К НОРМАТИВАМ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВЛЕННОСТИ.....	87
Глава 6. АКТУАЛЬНОСТЬ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕНИЯ УРОВНЯ ГОТОВНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ЗАЧЕТНЫМ ТРЕБОВАНИЯМ, НА ОСНОВЕ УПРАВЛЯЕМОЙ АДАПТАЦИИ К СМЕНЕ ВИДОВ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ.....	97
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	101

## ВВЕДЕНИЕ

Современные темпы развития цивилизации улучшают жизнь человечества, но в то же время снижают его двигательную активность, что в совокупности с негативной экологией наносит существенный вред организму человека, особенно в условиях удаленного обучения. Увеличилось число заболеваний, снижается активность иммунной системы, многие болезни, которыми болели в основном люди зрелого возраста, «помолодели» и как следствие – сокращение продолжительности жизни человека. Снижение двигательной активности – это один из многих негативных факторов, препятствующих нормальной плодотворной жизнедеятельности человека.

Сохранение и укрепление здоровья студентов, формирование у них потребности в физическом совершенствовании и здоровом образе жизни являются одной из основных задач образовательных учреждений всех типов. Процесс физического воспитания в вузе, как и весь учебный процесс, регламентирован и обеспечен документами федерального уровня (приказ Министерства образования Российской Федерации, примерная учебная программа, государственный образовательный стандарт). Этим созданы предпосылки для укрепления здоровья студентов, повышения качества физического воспитания в вузах. Для эффективной постановки физического воспитания, в образовательных учреждениях страны требуются, в том числе, современные программы физического воспитания с использованием новейших технологий, форм и методов физкультурно-спортивной работы в условиях дистанционного обучения.

Легкая атлетика – наиболее массовый вид спорта, способствующий всестороннему физическому развитию человека, так как объединяет распространенные и жизненно важные движения (ходьба, бег и др.). Регулярные занятия легкоатлетическими упражнениями развивают силу, быстроту, выносливость и другие качества, необходимые человеку в повседневной жизни.

В системе физического воспитания легкая атлетика занимает одно из главных мест благодаря разнообразию, доступности, а также ее прикладному значению. Различные виды ходьбы и бега входят составной частью в каждое занятие физической культуры образовательных учреждений всех ступеней и тренировочный процесс многих других видов спорта. В то же время легкая атлетика является научно-педагогической дисциплиной и имеет свои методы и приемы обучения. Она наряду с другими базовыми физкультурно-спортивными дисциплинами обеспечивает профессиональную подготовку на факультетах физической культуры в вузах.

Дисциплина включает:

- формирование комплекса знаний, умений и навыков в области легкой атлетики;
- освоение профессиональных умений педагога физической культуры в процессе обучения легкоатлетическим двигательным действиям;
- приобретение умений и навыков научно-методической деятельности.

Таким образом, в построении учебного процесса по дисциплине «физическая культура» может быть использована современная инновационная технология его проведения, ориентированная на состояние здоровья занимающихся, обеспечивающая более индивидуализированный подход к его построению и эффективность реализации в условиях удаленного обучения.

## Глава 1. Ходьба, бег

Легкая атлетика является одним из популярных видов спорта в мире. Практически все виды спорта так или иначе используют упражнения из легкой атлетики для подготовки спортсменов.

Легкоатлетические упражнения широко используются в детских дошкольных учреждениях, начиная с раннего возраста, в школах, средних и высших учебных заведениях. Легкоатлетические упражнения повышают деятельность всех систем организма, являются одним из эффективных факторов профилактики различных заболеваний. Легко дозируемые упражнения могут использоваться как для развития физических качеств спортсменов высокого класса, так и для развития подрастающего поколения, для людей с ослабленным здоровьем, пожилого возраста, в период реабилитации после перенесенных травм и просто для поддержания нормальной жизнедеятельности человеческого организма.

Доступность, простота упражнений, незначительные затраты позволяют заниматься всевозможными видами легкой атлетики независимо от проживания: в сельской местности или в городской. Легкую атлетику можно характеризовать как:

- средство восстановления и реабилитации организма;
- средство воспитания и развития подрастающего поколения.

Совершенствование беговой подготовки определено многими факторами. Занятия легкой атлетикой приносят пользу сердечно-сосудистой и респираторной системам, что ведет к повышению беговых показателей [1, 2]. Но при неправильных тренировках (слишком длинная дистанция в чрезмерно быстром темпе) в результате больших нагрузок на костно-мышечную систему можно нанести вред организму, в ряде случаев и продуманные тренировки могут усиливать мышечный дисбаланс и анатомические дефекты. Введение силовых тренировок с использованием тренажеров или предметов применяемых в быту в общий план улучшения беговой подготовки повышает эффективность бега путем усиления бегового шага, который становится более твердым и широким, что влияет на достижения спортивных результатов [3, 4].

### 1.1. Физическая подготовка студента-легкоатлета

В результате занятий легкой атлетикой, в частности ходьбой и бегом, происходят своеобразные морфологические и функциональные изменения в организме студента, определяющие состояние его тренированности, которое принято связывать преимущественно с адаптационными перестройками биологического характера, отражающими возможности различных функциональных систем и механизмов, а также уровень его физической подготовленности. В связи с этим немаловажное место в занятиях

легкой атлетикой отводится физической подготовке, общей и специальной. Высокий уровень развития быстроты, силы, скоростно-силовых качеств, выносливости, гибкости, координации движений в огромной мере предопределяет достижение высоких результатов в избранном виде легкой атлетики.

В каждом виде легкой атлетики существуют физические качества, которые отвечают определенным факторам, оптимально влияющим на спортивный результат в избранном виде. Например, для спринтерского бега наиболее информативны тесты, оценивающие быстроту реакции на старте, способность к ускорению, максимальную скорость бега, скоростную выносливость, техническое мастерство бегуна; у барьеристов к вышеперечисленным факторам добавляются показатели темпоритмовой структуры преодоления барьеров.

В беге на средние и длинные дистанции для оценки подготовленности учитываются показатели скоростной и специальной выносливости, способность удерживать заданную скорость.

## 1.2. Сердечно-сосудистая и сердечно-респираторная системы

Сердечно-сосудистая система – система органов, которые обеспечивают циркуляцию крови и лимфы. Она включает сердце, кровь и кровеносные сосуды (вены и артерии). Поступающая из сердца кровь движется по артериям и возвращается в сердце по венам (рис. 1).

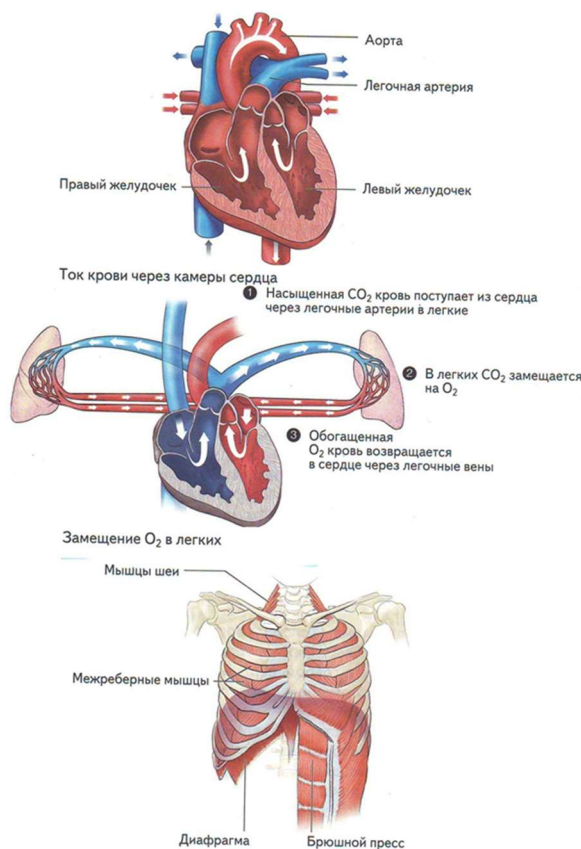


Рис. 1. Мышцы, участвующие в дыхании

Сердечно-респираторная система объединяет сердце и легкие. Воздух поступает через нос и рот. Диафрагма и другие мышцы нагнетают его в легкие, где кислород, содержащийся в воздухе, смешивается с кровью (см. рис. 1). Взаимосвязь двух систем осуществляется, когда сердце прокачивает кровь в легкие через легочные артерии. Там она смешивается с кислородом, содержащимся в воздухе, который вдыхаем. Обогащенная кислородом кровь вновь доставляется к сердцу по легочным венам. Затем через артерии кровь, наполненная красными кровяными клетками, обогащенными кислородом, прокачивается к мышцам (см. рис. 1), обеспечивающим движение [4].

Чем лучше развиты сердечно-сосудистая и сердечно-респираторная системы, тем больший объем крови циркулирует в организме. Повышение объема циркулирующей крови увеличивает количество обогащенных кислородом красных клеток крови, питающих мышцы, а также повышает объем плазмы, необходимой для производства энергии в процессе гликолиза.

В улучшении беговых показателей участвуют также и другие факторы, такие как степень нейромышечной подготовки, мышечная выносливость, сила и гибкость. Укрепляя сердечно-сосудистую и сердечно-респираторную системы, эти факторы существенно улучшают беговые показатели.

**Ходьба** – самая естественная нагрузка. Тренировочный эффект определяется расстоянием и учащением пульса. Чтобы иметь удовлетворительную тренированность (по Куперу), нужно ходить не меньше часа и покрывать расстояние почти 6,5 км. Надо очень быстро и напряженно идти. Стоит замедлить шаг до 5 км, нужно уже проходить 10 км каждый день. Поэтому ходьба как единственный метод тренировки хороша в качестве вводного курса, незаменима для восстановления сил после болезней.

**Бег трусцой** не значит, лучше настоящего бега, чем быстрее, тем больше уровень тренированности, потому что он достигается мощностью. Существует нормальный бег, не быстрый и не медленный, со скоростью 9-10 км/ч. Пробегать 2 км ежедневно за 12 мин – этого для минимума достаточно, никаких разминок не требуется, никаких дополнительных, плановых калорий для занимающегося физкультурой не нужно.

Дыхание имеет большое значение, как в беге, так и в ходьбе; если дыхание сбилось, необходимо снизить темп и восстановить его. Закончилось время или дистанция – нужно немного пройтись шагом и дышать как дышится. Излишек углекислоты в крови как раз способствует расширению сосудов, и кислородный голод скорее исчезнет.

Хорошо приучить себя дышать носом во время бега, это не просто и придет только со временем. Дыхание носом хотя и труднее, кажется менее эффективным, но зато

тренирует диафрагму, приучает дыхательный центр к излишкам углекислоты. Зимой защищает трахею и бронхи от прямого попадания холодного воздуха.

**Бег на месте** – хороший способ общей тренировки, хотя плохо дозируется, так как легко сделать подскоки облегченными: достаточно поднять стопу на 15 см вместо 20, и треть нагрузки пропала. «Трусца на месте» – плохой заменитель настоящей трусцы. Но не нужно преувеличивать недостатки, так как есть хороший метод контроля – частота пульса.

Самое простое правило: частота пульса должна удваиваться по сравнению с покоем, частота пульса менее 120 ударов в 1 мин свидетельствует о том, что бег на месте неэффективен и нужно прибавить темп. Важно выработать свой собственный темп, обеспечивающий необходимую мощность, и постепенно доводить время до заданного предела, правила дыхания остаются те же [1].

**Самоконтроль** – немаловажно следить за пульсом. После остановки нужно подсчитать пульс за 10 или 15 с, чтобы узнать как реагирует сердце на заданный темп бега. Не следует допускать частоту пульса более 140 ударов в 1 мин. При различных заболеваниях сердечно-сосудистой системы легкой степени достаточно и 120-130 и даже 100 ударов в 1 мин. Очень важна постепенность наращивания во всем, и скорости и расстояний, но ее нужно дополнить правилами контроля пульса.

Одежда. Не нужно одеваться тепло, наоборот, как можно легче: быстрее будете бегать, если холод подгоняет. Бегать можно в любую погоду, если одеться соответственно. Особенно неприятны ветер и дождь, но если промокнете, то за 10-20 мин не простудитесь, но незакаленному лучше побережесь.

Стандартная последовательность беговых тренировок начинается с базового (вводного) периода (в данных условиях проведения занятий применяется бег на месте), а силовые упражнения выполняются с небольшим отягощением и большим количеством повторений. Силовые упражнения выполняются с увеличением веса отягощений. Финальная фаза определяется коротким периодом высокоинтенсивной ( $V_{O2max}$ ) беговой тренировки в комплексе с поддерживающей силовой тренировкой и плановым отдыхом [3, 5].

## **Глава 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕХНИКИ ДВИЖЕНИЙ: ФАЗЫ, СТРУКТУРЫ, СИЛЫ ДВИЖЕНИЙ**

Любая двигательная деятельность человека состоит из определенных двигательных действий, которые, в свою очередь, состоят из конкретных движений. В биомеханике различают два вида движений:



1) перемещение всей биосистемы относительно точки отсчета или других каких-либо точек (например, перемещение бегуна относительно старта или финиша);

2) деформация тела, т.е. изменение положений звеньев тела относительно друг друга или общего центра массы (сгибание руки, ноги и т.д.) [3, 6].

Человек может выполнять множество разнообразных движений, которые будут не похожи у разных людей, никто в точности не сумеет скопировать одно и то же движение человека, даже сам индивидуум. Это в первую очередь зависит от строения суставов, расположения мышц и мышечных групп, активности центральной нервной системы и многих других факторов. Все разнообразные движения человека объединяются одним основным понятием «техника», техника движений бывает врожденной и приобретенной.

Самое простое определение термина «техника движений» – это система определенных движений, целенаправленно решающая двигательную задачу [3]. Все движения подчинены определенной системе: есть простые движения, например сгибание руки в локтевом суставе; но в основном – сложные движения – действия, которые складываются из ряда различных движений, что и определяет состав техники движений. Для того чтобы получить систему движений, необходимо создать определенные связи между отдельными движениями, выявить их влияние друг на друга, что и определяет структуру техники движений.

Техника движений может быть естественной и спортивной. Если человек выполняет привычные движения в обыденной жизни: идет на работу, делает утреннюю пробежку – это естественная техника движений, но для победы в соревнованиях, победы над соперником, используется спортивная техника движений, которая требует проявления максимальных возможностей человеческого организма.

Технику движений классифицируют как произвольную и вынужденную, ограниченную и свободную, индивидуальную и идеальную, рациональную и нерациональную. Эта классификация условная, так как техника всех видов легкой атлетики содержит несколько таких параметров. Целостная техника легкоатлетических видов всегда включает в себя несколько таких разделений. Отдельные действия могут быть более локализованы, например отталкивание – вынужденное действие для техники движения ног, а техника движения рук может быть произвольной; движения рук в беге – это также произвольная техника. Свободная техника в легкоатлетических видах не наблюдается, так как она ограничена правилами соревнований и целями спортсмена [3, 7, 8].

Индивидуальная техника предполагает, что вся техника движений, выполняемая человеком, строго индивидуальна и зависит от анатомических, физиологических и психологических особенностей индивидуума. Студенты, пришедшие изучать технику

какого-либо движения, поначалу обладают нерациональной техникой, но впоследствии, при глубоком изучении и формировании устойчивого двигательного навыка, их нерациональная техника движений постепенно перейдет в рациональную. Даже у высококвалифицированных спортсменов рациональная техника может ухудшиться, т.е. появляются черты нерациональной техники (лишние, не экономичные движения), определяется это воздействием на студента психических, физиологических, ситуационных и других факторов. Изменения в технике движений зависят от психологических особенностей студента, сложности техники движений, устойчивости двигательного навыка.

## 2.1. Основы техники спортивной ходьбы

**Ходьба** – естественный способ передвижения человека. Спортивная ходьба отличается от простой ходьбы более высокой скоростью передвижения, ограничением техники передвижения правилами соревнований и другими техническими моментами.

Техника спортивной ходьбы имеет циклический характер, т.е. определенный цикл повторяется многократно на протяжении всей дистанции и, в отличие от других циклических видов легкой атлетики, жестко ограничен правилами соревнований. Эти ограничения существенно повлияли на становление техники спортивной ходьбы. Во-первых, в спортивной ходьбе не должно быть фазы полета, т.е. всегда должен быть контакт с опорой. Во-вторых, исходя из первого ограничения, опорная нога в момент вертикали должна быть выпрямлена в коленном суставе (несколько лет назад сделали добавление к этому ограничению – опорная нога должна быть выпрямлена в коленном суставе с момента постановки ноги на опору). Отличие спортивной ходьбы от естественной (бытовой) по внешним данным заключается в том, что в естественной ходьбе пешеход может сгибать ногу в коленном суставе, амортизируя постановку ноги, а в спортивной ходьбе спортсмен передвигается на прямых ногах.

Основу техники спортивной ходьбы составляет один цикл действия, который состоит из двойного шага, шага левой ноги и шага правой ноги. Цикл содержит: а) два периода одиночной опоры; б) два периода двойной опоры; в) два периода переноса маховой ноги [3].

Период одиночной опоры одной ноги совпадает с периодом переноса другой ноги. Период двойной опоры очень кратковременен, порой его можно и не увидеть. Период одиночной опоры более длителен и делится на две фазы:

1) фаза жесткой передней опоры; 2) фаза отталкивания. Период переноса тоже имеет две фазы: 1) фаза заднего шага; 2) фаза переднего шага. Эти фазы присутствуют как в периоде переноса или опоры для левой ноги, так и для правой ноги.

Фазы разделяются моментами, т.е. такими мгновенными положениями, после которых происходят изменения движений. Если моменты являются границами изменения движений в одном или нескольких звеньях, то позы в данных моментах – это описание положений звеньев тела относительно общего центра масс (ОЦМ) или друг друга, т.е. позы дают визуальную картину смены движений.

Фаза передней жесткой опоры правой ноги начинается с момента постановки ее на опору. Нога, выпрямленная в коленном суставе, ставится с пятки. Эта фаза продолжается до момента вертикали, когда ОЦМ находится над точкой (над стопой правой ноги) опоры.

С момента вертикали до момента отрыва правой ноги от грунта длится фаза отталкивания. Период одиночной опоры правой ноги заканчивается и начинается период переноса правой ноги, который имеет две фазы: 1) фаза заднего шага, которая начинается с момента отрыва ноги от опоры до момента вертикали (момент вертикали в переносе ноги определяется по положению бедра – продольная ось бедра должна быть перпендикулярна площади поверхности опоры, т.е. горизонтали); 2) фаза переднего шага – с момента вертикали до момента постановки ноги на опору. Потом следует кратковременный период двойной опоры. Когда идет период одиночной опоры правой ноги, левая нога находится в периоде переноса. То же самое повторяется с левой ногой. Цикл закончился, начинается новый цикл, и все повторяется (рис. 2).

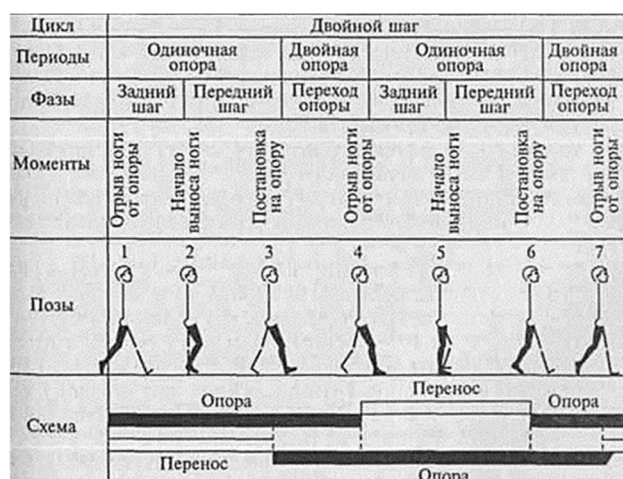


Рис. 2. Периоды, фазы, моменты в спортивной ходьбе

Период двойной опоры очень кратковременен, но он имеет большое значение в технике спортивной ходьбы. По нему определяется соответствие техники правилам

соревнований. Если период двойной опоры отсутствует, значит, спортсмен не идет, а бежит, за что его дисквалифицируют [3, 6, 7].

Частота шагов у высококвалифицированных ходоков колеблется от 190 до 230 шагов в минуту. Длина шага колеблется от 95 до 130 см и зависит от длины ног спортсмена и развиваемых мышечных усилий. Движения рук и ног, поперечных осей плеч и таза – перекрестны, т.е. левая рука движется вперед, когда вперед движется правая нога, и наоборот. Позвоночник и таз совершают сложные встречные движения. В конце фазы отталкивания наклон передней поверхности таза несколько увеличивается, а к моменту вертикали, в период переноса этой ноги, – уменьшается. Такие колебания таза в переднезаднем направлении помогают эффективнее отвести назад бедро ноги, отталкивающейся от опоры. Так же изменяется наклон поперечной оси таза: во время переноса она опускается в сторону маховой (переносимой) ноги, а во время двойной опоры опять выравнивается. Такое опускание таза в сторону маховой ноги связано с движением маятника, т.е. нога, как маятник, стремится от оси вращения под действием центробежной силы, это помогает мышцам, отводящим бедро, лучше расслабиться (см. рис. 2).

Позвоночник также изгибается в сторону маховой ноги в период ее переноса. В целом туловище совершает ряд сложных, почти одновременных движений в каждом шаге: незначительно сгибается и разгибается, происходят боковые наклоны и скручивание туловища.

Перекрестные движения рук и ног, плеч и таза, а также другие движения туловища помогают сохранить равновесие тела, нейтрализуют полный боковой разворот тела (в отличие от того, когда ходок идет иноходью, т.е. движения не перекрестные), создают оптимальные условия для постановки ног, эффективное отталкивание и рациональный перенос маховой ноги.

Движения рук в спортивной ходьбе помогают увеличивать частоту шагов, поэтому мышцы верхнеплечевого пояса усиленно работают. Особенно на это надо обращать внимание к концу дистанции при наступлении утомления. Движения рук осуществляются следующим образом: руки согнуты в локтевых суставах под углом  $90^\circ$  к направлению движения ходока; пальцы рук полусжаты; мышцы плеч расслаблены.

Работа мышц во время взаимодействия их на опору через звенья тела является движущей силой при ходьбе. Выполняя отталкивание и перенос ног в оптимальном сочетании, все тело получает ускорение в направлении от места опоры. Силы реакции опоры во время отталкивания придают скорость движения телу, а перенос маховой ноги, вследствие инерционных сил, придает ускорение телу ходока. Одновременное движение

маховой ногой вперед и отталкивание толчковой ногой в целом составляют отталкивание от опоры.

Все движения звеньев тела осуществляются с ускорением, вследствие чего возникают инерционные силы отдельных звеньев, одни из которых участвуют в придании скорости всего тела, другие нейтрализуют отрицательные инерционные силы (движения рук).

Движения всех звеньев тела (их центров масс) происходят по криволинейной траектории, а перемещение тела и его ускорение осуществляются в линейном направлении, т.е. не существует какой-либо реальной движущей силы, создающей движение по линейной траектории. Суть всех перемещений в ходьбе – это сумма равнодействующих сил, направленных по криволинейной траектории, и сил, направленных под углом к перемещению тела и опоры.

Движущие инерционные и мышечные силы воздействуют через стопу (стопы) на опору. Исходя из третьего закона механики возникают противодействующие им силы – силы реакции опоры, без которых изменение движения ОЦМ невозможно.

Под силой отталкивания понимают воздействие опоры на тело спортсмена, которое возникает в результате действия сил давления на опору. Отталкивание – это не результат чистой работы мышц, а результат взаимодействия мышечных усилий и инерционных сил на опору. Чем опора жестче, тем величина отталкивания (силы реакции опоры) больше.

## **2.2. Основы техники бега**

Виды легкоатлетического бега делятся на гладкий бег, бег с препятствиями, бег по пересеченной местности (кросс) и имеют общие основы.

Бег, как и ходьба, относится к циклическим движениям, где цикл движения включает двойной шаг. Вместо периода двойной опоры в ходьбе в беге имеется период полета. В беге можно выделить: а) период одиночной опоры; б) период полета; в) период переноса маховой ноги, который совпадает с периодом опоры [3, 4].

Быстрота, амплитуда движений, проявление больших мышечных усилий в беге, чем в ходьбе, – эти факторы зависят от скорости бега (чем выше скорость, тем выше значения перечисленных факторов).

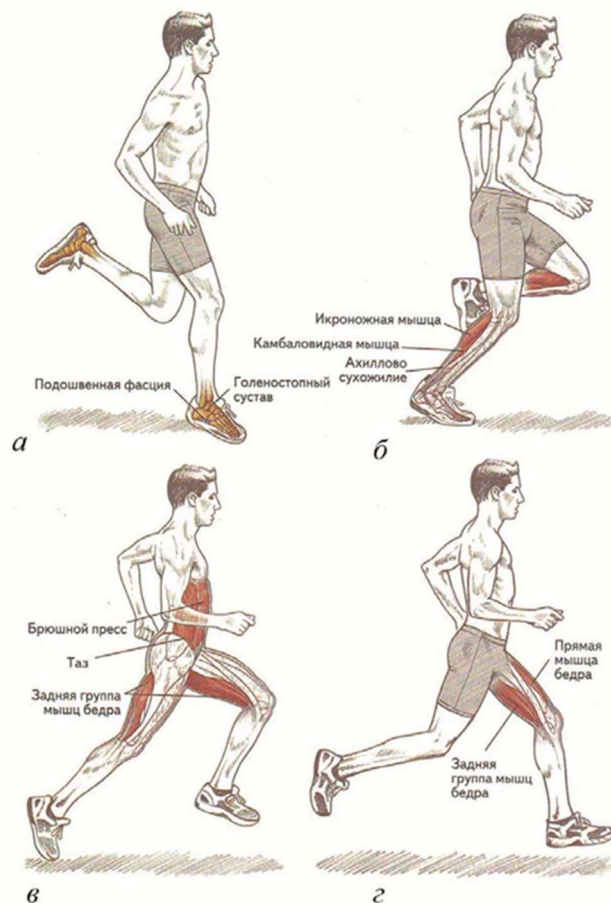


Рис. 3. Цикл бегового шага: *а* – первоначальный контакт; *б* – фаза опоры; *в* – отрыв опорной ноги; *г* – фаза переноса маховой ноги вперед

Период переноса маховой ноги (левой) и период опоры толчковой ноги (правой) совпадают по времени, затем наступает период полета, после этого период переноса маховой ноги (правой) и период опоры толчковой ноги (левой), затем опять период полета (см. рис. 3).

В беге, как и в ходьбе, руки и ноги выполняют согласованные перекрестные движения. Встречные перекрестные движения осей таза и плеч позволяют сохранить равновесие и противодействуют боковому развороту тела бегуна.

В периоде опоры в беге, так же как и в ходьбе, две фазы: 1) фаза амортизации; 2) фаза отталкивания. Фаза амортизации начинается с момента постановки ноги на опору и длится до момента вертикали, когда проекция ОЦМ находится над точкой опоры. В отличие от ходьбы в этой фазе происходит значительное снижение ОЦМ за счет разгибания в голеностопном суставе, сгибания в коленном суставе и наклона поперечной оси таза в сторону маховой ноги. Одновременно с этим происходит растягивание упругих компонентов (связки, сухожилия, фасции), участвующих в последующем отталкивании. За мгновение до соприкосновения с опорой (15-25 миллисекунд) мышцы, участвующие в фазе

амортизации, уже становятся электрически активными, т.е. импульсы возбуждения приходят к мышце заранее, до опоры, и растягиваются напряженные мышцы. С момента вертикали до момента отрыва толчковой ноги от опоры длится фаза отталкивания. Она начинается с распрямления толчковой ноги в тазобедренном и коленном суставах, завершается сгибанием в голеностопном суставе. С начала фазы амортизации увеличивается сила давления на опору, которая продолжает увеличиваться и после проведения вертикали до определенного момента за счет мышечных усилий, которые разгибают тазобедренный и коленный суставы. Сила реакции опоры также увеличивается, как и сила давления на опору, только они действуют диаметрально противоположно друг другу, телу студента при беге и его ОЦМ придается определенная скорость. В конце фазы отталкивания силы давления и реакции опоры уменьшаются (примерно после выпрямления ноги в коленном суставе), и мышцы, участвующие в сгибании голеностопного сустава, выполняют скоростную работу с меньшими усилиями, но с большей скоростью. В частности: сначала ягодичные мышцы более сильные, но менее скоростные, придают начальную скорость движению, затем мышцы передней поверхности бедра менее сильные, но более скоростные придают ускорение телу, и в конце действуют более скоростные, но относительно слабые мышцы (икроножные). Сила и скорость проявления мышечных усилий обратно пропорциональны, нельзя одновременно увеличить силу и скорость мышечных усилий.

В периоде одиночной опоры маховая нога также участвует в придании скорости телу бегуна. С момента постановки ноги на опору до момента вертикали маховая нога за счет инерционных сил увеличивает силу давления на опору. С момента вертикали до момента отрыва опорной ноги от опоры инерция массы маховой ноги помогает быстрее выпрямить толчковую ногу в фазе отталкивания и тем самым увеличить скорость (принцип маятника). Время и скорость отталкивания во многом зависят от быстроты переноса маховой ноги вперед с момента постановки толчковой ноги на опору.

Период полета начинается с момента отрыва толчковой ноги от опоры до момента постановки маховой ноги на опору. Выделяют две фазы: 1) фаза подъема ОЦМ до наивысшей точки траектории ОЦМ; 2) фаза опускания ОЦМ до касания маховой ноги опоры и превращения ее в толчковую ногу. Такое деление периода полета на две фазы необходимо для того, чтобы понять, какое участие принимает сила тяжести в изменении скорости движения ОЦМ по траектории. В период полета скорость движения не увеличивается, а наоборот, чем больше этот период, тем больше происходит потерь в скорости. Период полета характеризует длину бегового шага.

В конце фазы отталкивания ОЦМ получает определенную начальную скорость вылета, которая несколько гасится, так как движение ОЦМ происходит вверх-вперед до высшей точки траектории, затем происходит небольшое увеличение за счет силы тяжести. Сила тяжести в периоде полета тела бегуна выполняет двоякую функцию, сначала она снижает скорость движения ОЦМ, а затем, после высшей точки траектории, увеличивает ее (принцип метронома). В другие моменты сила тяжести не оказывает влияния на изменение скорости движения ОЦМ. Если бег выполняется не на ровной местности, а в гору или под гору, то тогда сила тяжести будет оказывать влияние на изменение скорости движения: при беге в гору скорость снижается, при беге под гору скорость движения увеличивается.

В периоде переноса ноги с момента постановки ноги на опору в фазе амортизации происходит снижение скорости движения ОЦМ за счет тормозящей силы, которая возникает всегда, и задача бегуна снизить ее воздействие. С одной стороны, тормозящая сила и инерционные силы тяжести после фазы полета в фазе амортизации негативно влияют на скорость движения, с другой стороны – в это время создаются предпосылки для эффективного отталкивания.

Скорость тела бегуна можно увеличить исключительно при взаимодействии с опорой, но для того, чтобы увеличить скорость бега, необходимо как можно чаще контактировать с опорой во время отталкивания. Нет тормозящих сил, постоянный контакт с опорой, и только за счет сил трения создается скорость движения. В период полета после фазы отталкивания мышцы, участвующие в нем, расслабляются и получают кратковременный отдых. Невозможно, чтобы мышцы все время находились в возбужденном состоянии, даже при беге на короткие дистанции. Мышечные судороги – это постоянное возбуждение мышц, которое несет в себе негативные последствия, как для мышц, так и для нервной системы. Умение бегуна рационально чередовать мышечную работу и мышечное расслабление имеет большое значение в беге на любые дистанции, и не только в беге, но и при выполнении любой физической деятельности. Рациональное чередование работы и отдыха мышц характеризует межмышечную координацию спортсмена. Период полета (или длина бегового шага) должен быть оптимальным и будет зависеть от физических качеств человека, непосредственно от силы ног, длины ног, подвижности в тазобедренных суставах и индивидуальной рациональной техники бега.

Скорость бега зависит как от длины шага, так и от частоты шагов. Оптимальное соотношение этих параметров характеризует ритм бега и рациональность техники бегуна. Во-первых, чтобы увеличить скорость бега, необходимо работать над уменьшением времени опоры, т.е. при той же силе отталкивания уменьшить время отталкивания. Так как период опоры и период переноса связаны друг с другом, то уменьшение времени опоры



вызовет и уменьшение времени переноса, и наоборот, т.е. быстрое сведение бедер и быстрый вынос бедра маховой ноги вперед уменьшат время переноса, что поможет быстрому выполнению отталкивания за меньшее время. Быстрый «съем» толчковой ноги с опоры после отталкивания также убыстряет перенос ее вперед. Ощущение такое, как будто убираем ногу с раскаленного песка, чтобы не обжечься. Во-вторых, увеличение скорости бега происходит за счет уменьшения времени полета: 1) снижение вертикального колебания ОЦМ, приближение кривизны траектории к горизонтали; 2) активная постановка толчковой ноги в последней части периода полета, т.е. не ждать опоры, а активно идти на сближение с ней. В то же время такая активная постановка ноги может способствовать ударному воздействию на тело бегуна в фазе амортизации – это негативный фактор. Поэтому нога должна ставиться быстро и в то же время мягко, пружинисто, за счет увеличения силы тяги мышц, противодействующей снижению ОЦМ.

Техника движений рук в беге зависит от скорости бега. На коротких дистанциях, где задача бегуна развить максимальную скорость, амплитуда движений рук наибольшая, скорость движения рук совпадает с частотой беговых шагов. Частота движений рук и ног взаимосвязана между собой, чтобы увеличить частоту беговых шагов, надо увеличить частоту движений рук. Руки, согнутые в локтевых суставах под углом  $90^\circ$ , движутся вперед и несколько вовнутрь, затем назад и несколько кнаружи. В беге на короткие дистанции движения рук приближаются к направлению движения бегуна. С уменьшением скорости бега амплитуда движений рук уменьшается, также несколько меняется и направление. При выносе руки вперед она больше приближается к срединной плоскости, а при движении назад больше отводится кнаружи [3, 4].

Наклон туловища также зависит от скорости бега. На коротких дистанциях при максимальной скорости наклон тела вперед наибольший, при беге на длинные дистанции наклон тела минимальный (до  $5^\circ$ ). Необходимо помнить, что чрезмерный наклон туловища вперед, с одной стороны, помогает отталкиванию, но с другой – затрудняет вынос ноги вперед, уменьшая длину шага. Наклон туловища должен быть оптимальным и будет зависеть от скорости бега, дистанции и частей дистанции (стартовый разгон – бег с наклоном, с постепенным выпрямлением туловища; бег по дистанции – наклон оптимальный; финиширование – последние шаги выполняются с большим наклоном, чем при беге по дистанции). При анализе техники движения ног рассматривают отдельно движения каждого звена нижних конечностей. Траектории движения центров масс бедра, голени и стопы имеют сложную форму. Если движение центра массы (ЦМ) бедра можно рассматривать как движение простого маятника, то траектории движения ЦМ голени и ЦМ стопы представляют собой сложные эллипсовидные формы. Нога похожа на маятник,

состоящий из трех последовательно соединенных маятников (бедро, голень, стопа). Частота колебаний маятника зависит от его длины, а при значительных отклонениях, например в ходьбе или беге, она будет зависеть от амплитуды движения ног, чем короче маятник, тем чаще он будет двигаться.

Траектория движения ОЦМ в беге напоминает траекторию движения ОЦМ в ходьбе, но размах колебаний ОЦМ в первом случае гораздо выше и зависит от скорости бега: чем выше скорость бега, тем размах колебаний больше. Наивысшее положение ОЦМ наблюдается в период полета, низшее – в фазе амортизации, ближе к моменту вертикали. В этом положении происходит наибольшее сгибание в суставах опорной ноги и опускание таза. Помимо вертикальных колебаний ОЦМ имеются и поперечные колебания в сторону опорной ноги, так как она отклоняется кнаружи. Таким образом, колебания ОЦМ происходят как в вертикальном, так и в поперечном направлениях, создавая тем самым сложную траекторию движения ОЦМ.

### Глава 3. ВИДЫ УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ ОСНОВНЫХ МЫШЕЧНЫХ ГРУПП

#### 3.1. Упражнения для верхней части туловища

Двенадцать грудных позвонков расположены друг над другом и соединены связками (рис. 4). Грудной отдел позвоночника может наклоняться вперед и назад, ограниченно двигаться в стороны и вращаться на определенный угол. К грудным позвонкам при помощи суставов прикрепляются ребра. В передних отделах они соединяются в единый жесткий каркас при помощи грудины, формируя грудную клетку.

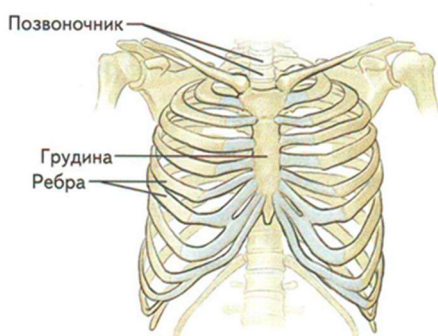


Рис. 4. Костные структуры корпуса: ребра, грудина, позвоночник

Задняя поверхность позвонков поддерживается мышцей, выпрямляющей позвоночник, которая проходит по всей его длине, а ребра удерживаются с помощью межреберных мышц. Без дополнительной структурной поддержки ребра потеряли бы устойчивость, поэтому помощь в поддержании их положения оказывают также трапецевидная мышца, широчайшая мышца спины, ромбовидные, круглые мышцы, большая и малая грудные мышцы, а также мышцы, стабилизирующие плечо (см. рис. 5). В

основании этой конструкции лежит диафрагма, окружающая нижние ребра, дополнительную стабильность придают прямая мышца живота, наружные косые мышцы живота и передние зубчатые мышцы [4].

Для бега организму требуется гораздо больше кислорода, чем для пассивной жизни. Диафрагма производит действие, аналогичное действию кузнечных мехов; когда она сокращается, чтобы нагнетать воздух в легкие, межреберные мышцы расслабляются, чтобы затем сократиться на фазе выдоха, в течение которой диафрагма, в свою очередь, расслабляется и втягивается в грудную клетку. С помощью этих движений (втягивание и отпускание) легкие наполняются воздухом и опустошаются, восполняя потребность бегуна в кислороде.

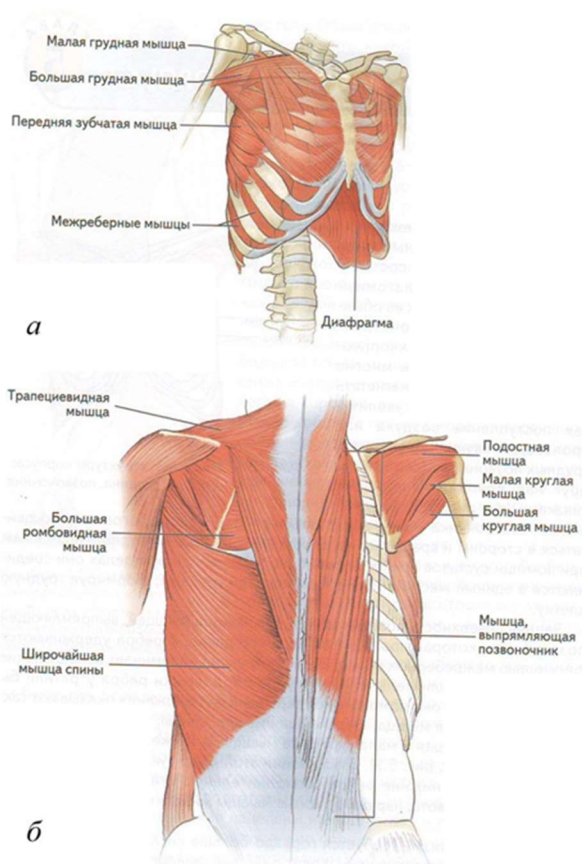


Рис. 5. Верхняя часть корпуса: *а* – вид спереди; *б* – вид сзади

Мышцы грудной клетки участвуют не только в механизмах дыхания, они также играют хотя и ограниченную, но важную роль в обеспечении перемещения вперед. Когда с каждым шагом бедра перемещаются вперед, тазобедренный отдел немного поворачивается – сначала в одну сторону, затем в другую. Вместе с ним поворачивается и позвоночник, что может вызывать нестабильность в области живота и грудной клетки, если не стабилизировать это движение. Поэтому небольшое напряжение и расслабление мускулатуры грудной клетки помогает не только удерживать тело в вертикальном

положении, но и корректирует изменения, обусловленные движением бегуна вперед при скорости бега до 32 километров в час.

Мышцы, прикрепленные к плечевой кости и окружающие плечевой сустав, в частности грудные мышцы и круглые мышцы, также пассивно двигаются при махах рук, сопровождающих каждый шаг. Если они активно сокращаются, то помогают участвовать в движении верхним частям рук и противостоять тянущему усилию дельтовидных мышц (рис. 6).

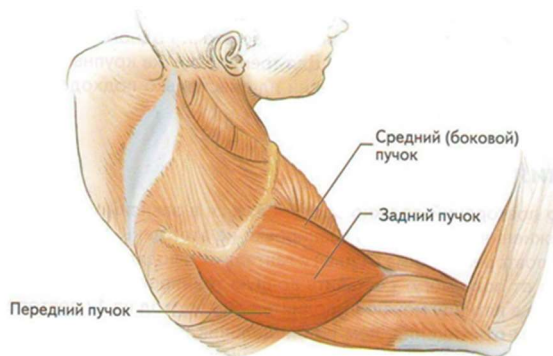


Рис. 6. Дельтовидные мышцы

Для бега значимость мышц, участвующих в работе, заключается в понимании принципа «слабого звена»: эффективность спортсмена зависит не от силы, которую он способен развить, а от мышц, которые устают первыми. Если мышцы грудной клетки недостаточно тренированы и быстро устают, эффективность бега снижается. Если мышцы груди ослаблены, ухудшается не только дыхательная деятельность, но и поддержка позвоночника, в этом случае уменьшается участие рук в движении, что приводит к неизбежному замедлению темпа бега.

Качество бега всегда будет ограничено самой слабой частью тела. Если сильные ноги, но легкие не могут доставить кислород для этих ног, можно развить только ту скорость, которая ограничена степенью подготовленности легких, а не ту, на которую были бы способны ноги при иных обстоятельствах. Чтобы избежать этого дисбаланса, диафрагма и все поддерживающие мышцы должны иметь такую же степень тренированности, что и нижние конечности. В результате физических упражнений эти мышцы устают точно так же, как и другие, поэтому их следует тренировать наравне с другими группами мышц, участвующими в упражнении.

Вес отягощения подбирается для каждого упражнения, обеспечивающий средний уровень сопротивления нагрузке, позволяющий правильно выполнять силовое упражнение и все повторения, входящие в подход. По мере развития силы и адаптации организма к текущей нагрузке вес отягощения увеличивается, но не настолько, чтобы нарушалась

техника выполнения упражнения, даже на последних повторениях подхода. Подбор веса отягощения зависит и от того, какая часть тела тренируется.

Например, грудные мышцы достаточно велики, поэтому они могут выдерживать большие нагрузки. Трицепсы, состоящие из трех гораздо меньших мышц, устают относительно быстро, когда упражнение нацелено непосредственно на их проработку. Вместе с тем, поскольку трицепсы выполняют вспомогательную роль во многих упражнениях для верхней части тела, в ходе их выполнения они устают еще быстрее, чем во время тренировки для собственно трицепсов. Для одного занятия достаточно одного упражнения, прорабатывающего именно трицепсы. Для тренировки крупных грудных мышц потребуется несколько упражнений или несколько подходов одного упражнения.

Количество повторений должно варьироваться в зависимости от целей силового упражнения и целей всей тренировки на этот день. Например, два подхода из 20 повторений жима от плеч с гантелями и подход из 30 повторений отжимания от пола могут составить полную тренировку грудных мышц в начале недели, в конце недели можно выполнить один подход из 12 повторений с большим весом отягощения, чем в понедельник, затем два подхода из 10 повторений жима лежа со штангой или с палкой подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на наклонной скамье и три подхода из 15 повторений отжимания от пола. Необходимо помнить: чем выше вес отягощения, тем меньше количество повторений и наоборот.

Дыхание: выдохать, с силой выполняя прямое движение с отягощением, и вдохать, выполняя обратное движение или удерживая напряжение, создаваемое отягощением. Каждое упражнение следует выполнять плавно. Движения контролируются в ходе всего упражнения. Они тесно взаимосвязаны с ритмом дыхания. Общее правило: вдох – 4 секунды (обратная фаза движения), выдох – 2 секунды (прямая фаза движения).

В формулировке «работа + отдых = результат» требуются небольшие уточнения, чтобы обеспечить стабильный прирост силы, работа должна изменяться со временем количественно (тренировочный объем) и качественно (типы упражнений). Для каждого участка тела подобраны разнообразные упражнения, используя которые возможно создать многочисленные варианты тренировочных программ, направленные на укрепление мышц, суставов и сухожилий, участвующих в беге. Меняя упражнения, количество подходов и повторений, порядок упражнений, бегуны могут создавать тренировки применительно к своим потребностям и имеющемуся времени. Ни одна тренировка не продлится дольше 30 минут, а две или три тренировки в неделю могут существенно улучшить беговые показатели, укрепив части тела, используемые в тренировочных и соревновательных забегах. С помощью правильно спланированных силовых тренировок можно укрепить свое

тело, устранить мышечный дисбаланс, который ухудшает качество бегового шага и является причиной различных травм, и улучшить дыхание, что позволит повысить беговые показатели [4].

### 3.1. Упражнения для верхней части туловища

И.п. – лежа на спине, согнув ноги в коленях, прижав ступни к скамье, гантели в обеих руках на уровне груди (рис. 7).

1-3 – гантели вверх, выпрямить руки; 4 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.

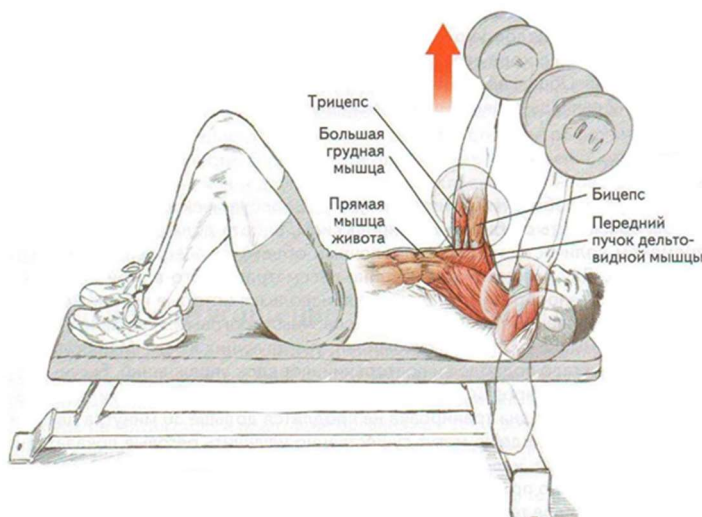


Рис. 7. Жим, лежа с гантелями

**Методические указания:** при выполнении упражнения сохранять естественный изгиб позвоночника так, чтобы поясница не касалась поверхности скамьи.

#### Мышцы, участвующие в работе

*Основные:* большая грудная мышца, трицепс, передний пучок дельтовидной мышцы.

*Дополнительные:* бицепс, прямая мышца живота.

#### Варианты

<p><i>а</i> вариант. Этот вариант упражнения прорабатывает грудные мышцы, особенно их грудные головки.</p>	<p><i>б</i> вариант. В этом упражнении использование мяча позволяет активнее задействовать брюшной пресс для стабилизации корпуса.</p>
--	--

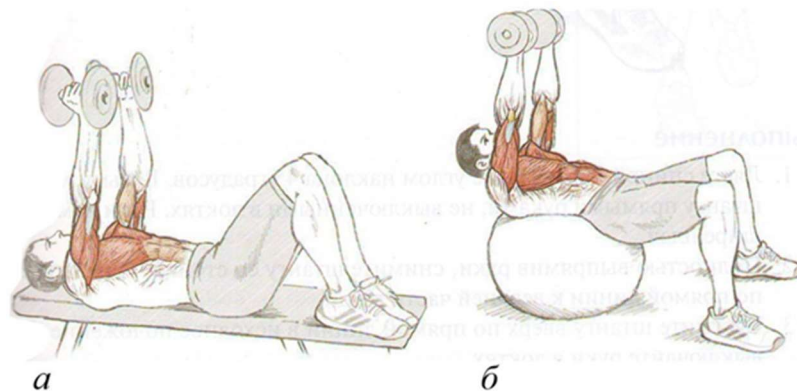


Рис. 8. *а* – жим лежа с гантелями; *б* – жим лежа с гантелями с поворотом на мяче

### **Значимость мышц для бега**

Грудные мышцы в ходе упражнений испытывают такую же нагрузку, как и все другие, поэтому их укрепление с помощью простых упражнений, таких как жим лежа с гантелями, приносит существенную пользу. Это упражнение задействует грудные мышцы интенсивнее, чем жим лежа со штангой, потому что возникает необходимость стабилизировать корпус, так как гантели поднимаются и опускаются независимо каждой рукой. Чем сильнее грудные мышцы и брюшной пресс, тем лучше осанка бегуна на длинные дистанции на завершающих стадиях забега. Упражнение способствует повышению эффективности дыхания и укрепляет сердечно-сосудистую систему. Чем лучше осанка спортсмена, тем эффективнее беговой шаг, что позволяет не тратить энергию на лишние движения, причиной которых является плохая техника бега.

### **Безопасность при выполнении**

Выполняя жим с гантелями на мяче, вес гантелей следует уменьшить, потому что положение тела на мяче менее стабильно по сравнению со скамьей. Освоив упражнение, вес можно снова увеличить.

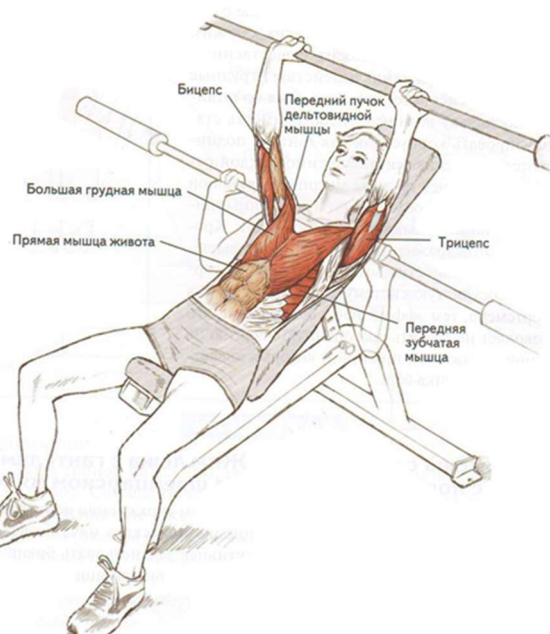


Рис. 9. Жим, лежа со штангой или с палкой подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на наклонной скамье

И.п. – лежа на скамейке с углом наклона  $45^\circ$ , руки шире плеч со штангой (рис. 9). Вместо штанги можно использовать палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой.

1 – опустить штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на наклонной скамье к верхней части груди; 2 – штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой вверх, и.п.

Выполнить 2 подхода по 8-10 раз.

**Методические указания:** упражнение выполнять в медленном темпе.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* большая грудная мышца, трицепс, передний пучок дельтовидной мышцы, передняя зубчатая мышца

*Дополнительные:* бицепс, прямая мышца живота.

### **Значимость мышц для бега**

Жим лежа со штангой или с палкой подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на наклонной скамье задействует те же мышцы, что и жим лежа с гантелями. Также дополнительно задействуются передние зубчатые мышцы. Использование разных вариантов для одной группы мышц стимулирует увеличение объема мышц этой области и разнообразит тренировки. Так как подразумевается, что силовые упражнения повышают эффективность беговых тренировок, выполнение новых упражнений помогает сохранять интерес к занятиям.

И.п. – лежа на скамье на спине, ноги согнуты в коленях, ступни прижаты к скамье, руки с гантелями вверх и на  $5-10^\circ$  согнуты в локтях (рис. 10).

1-3 – руки медленно в стороны; 4 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.



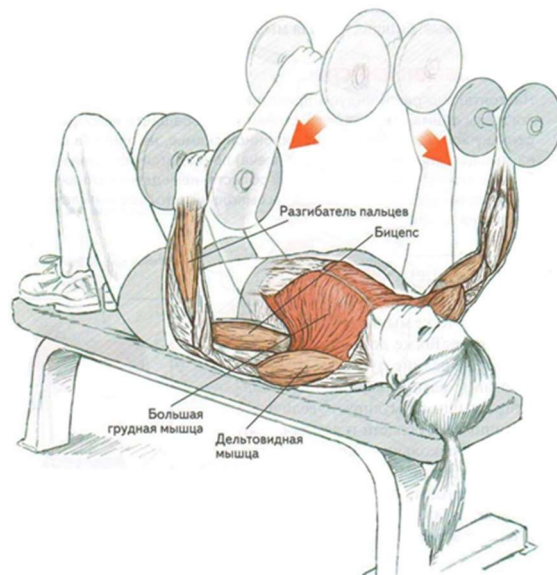


Рис. 10. Разведение рук с гантелями лежа

**Методические указания:** сохранять естественный изгиб позвоночника, чтобы поясница не касалась поверхности скамьи. В и.п. расстояние между гантелями 5-7 см, удерживать гантели в обеих руках, ладони обращены друг к другу.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* большая грудная мышца.

*Дополнительные:* бицепс, дельтовидная мышца, разгибатель пальцев.

#### **Безопасность при выполнении**

Обратить внимание на то, что в исходном положении руки выпрямлены, а не разведены. Поднимать гантели из положения с разведенными руками может быть сложно, особенно если использовать гантели слишком большого веса. В этом случае в неудобной позиции оказываются дельтовидные мышцы и бицепсы. Во избежание травм не следует опускать руки ниже уровня поверхности скамьи.

Возвращая гантели в и.п., не выталкивать их ладонями и не слишком подключать дельтовидные мышцы. Движение должно совершаться преимущественно за счет грудных мышц.

#### **Значимость мышц для бега**

Представленные упражнения укрепляют грудные мышцы. Тем не менее преимущество разведения рук в положении лежа с гантелями состоит в том, что вместе с выполнением упражнения мышцы растягиваются, особенно во время обратной фазы движения, при опускании гантелей. Это позволяет растягивать межреберные мышцы, улучшая дыхательную функцию. Чем лучше растянуты мышцы груди, тем легче вдыхать кислород.



Рис. 11. Отжимание от пола

И.п. – упор лежа, руки согнуты немного шире плеч, ладони под плечевыми суставами (рис. 11).

1 – отжаться от пола одним движением, полностью выпрямить руки – выдох; 2 – и.п. – вдох, согнуть руки в локтях.

Выполнить 30 раз.

**Методические указания:** удерживать тело так, чтобы голова была немного выше ног. В нижней точке грудь параллельна полу и почти касается его.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* большая грудная мышца, трицепс, передний пучок дельтовидной мышцы.

*Дополнительные:* бицепс, широчайшая мышца спины, прямая мышца живота.

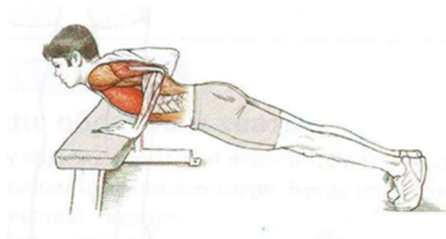


Рис. 12. Наклонное отжимание

#### **Безопасность при выполнении**

Не следует ускорять движение, поскольку при выполнении наклонного отжимания работают мышцы вращающей манжеты плеча, которые при ускорении движения могут травмироваться.

Отжимание с обратным наклоном переносит акцент на верхнюю часть спины (рис. 13). Использование мяча требует лучшей стабилизации корпуса, поэтому данное упражнение активно задействует вспомогательные мышцы.

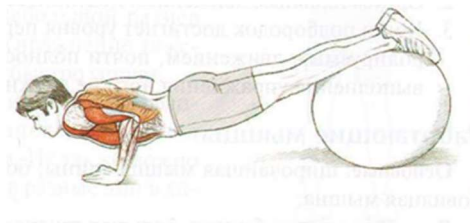


Рис. 13. Отжимание с мячом

**Методические указания:** при выполнении отжимания следить за тем, чтобы корпус не провисал. Держать тело в фиксированном положении, если это не получается, нужно взять мяч меньшего диаметра.

### **Значимость мышц для бега**

Отжимание относится к числу самых простых силовых упражнений и является очень эффективным упражнением для укрепления верхней части тела. Для его выполнения не нужны ни тренажеры, ни отягощения (кроме веса собственного тела). Упражнение выполняется одним движением. Базовое упражнение простое, его варианты (наклонное отжимание и отжимание с мячом) немного сложнее. Отжимание прорабатывает мышцы верхней части тела и брюшной пресс бегуна, в результате чего улучшается осанка. Техника отжимания схожа с положением, в котором находится корпус во время бега, что способствует формированию правильной осанки. В течение одного занятия можно выполнять несколько подходов отжимания. Подобно любым другим силовым упражнениям, эти упражнения не следует выполнять изо дня в день, так как организм нуждается в отдыхе, который позволит восстановиться мышечным волокнам, получившим нагрузку во время отжиманий.

Наклонное отжимание – переносит акцент на верхнюю часть груди и плечи. Можно выполнить большее число повторений этого отжимания, чем основного его варианта, поэтому данное упражнение можно использовать для начала занятий, когда сложно выполнять обычное отжимание.

### **Упражнения для верхней части спины**

И.п. – вис на перекладине хватом сверху (рис. 14).

1 – движение вверх, до подбородка; 2 – и.п.

Выполнить 10-12 раз.

**Методические указания:** в ходе выполнения упражнения ноги не должны касаться земли, движение вверх выполнять без рывков.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* широчайшая мышца спины, большая круглая мышца, ромбовидная мышца.

*Дополнительные:* бицепс, большая грудная мышца.

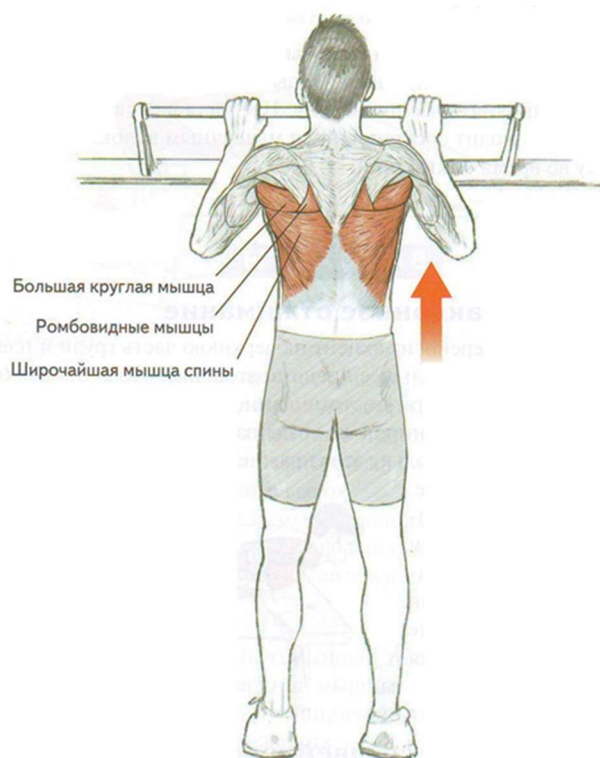


Рис. 14. Подтягивания на перекладине хватом сверху

#### **Значимость мышц для бега**

Подтягивание – упражнение, противоположное отжиманию от пола и дополняющее его. Для начинающих осваивать упражнение можно использовать подставку, чтобы выполнить первое повторение и подтянуться столько раз, сколько это возможно сделать уверенно. Подтягиваться можно хватом сверху и снизу, не извиваться и не делать рывков. Упражнение позволяет эффективно развивать силу и укреплять мышцы верхней части спины.

И.п. – вис на перекладине хватом снизу (см. рис. 15).

1 – движение вверх, до подбородка; 2 – и.п.

Выполнить 10 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения ноги не должны касаться земли.

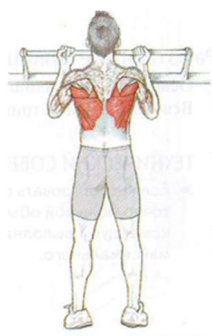


Рис. 15. Подтягивание хватом снизу

## Мышцы, участвующие в работе

Подтягивание хватом снизу позволяет задействовать бицепсы эффективнее, чем подтягивание прямым хватом. Учитывая сравнительно небольшой размер бицепсов, выполнять это упражнение тяжелее, потому что эти мышцы быстро устают.

Оба варианта упражнения можно чередовать во время напряженной тренировки мышц верхней части спины. Их также можно выполнять по отдельности в разные дни в ходе обычного занятия.

## Значимость мышц для бега

Тяга вниз, прорабатывающая мышцы верхней части спины, не является стандартным движением, совершаемым при беге. Упражнение повышает беговые показатели путем укрепления соответствующих мышц (широчайшей мышцы спины и круглых мышц), которые стабилизируют грудную клетку, улучшая дыхание и осанку. Укрепление мышц верхней части спины помогает уравновесить мышцы груди, развитые соответствующими упражнениями, создается баланс мышц корпуса, которые позволяют сохранять осанку во время длительного бега. Упражнение следует ввести в начальном периоде занятий.



Рис. 16. Тяга к животу одной рукой в наклоне

И.п. – поставить колено правой ноги на скамью, упор в скамью ладонью правой руки, левая рука с гантелью находится ниже уровня поверхности скамьи (см. рис. 16).

1 – рука вверх до угла  $90^\circ$  в локтевом суставе; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15-20 раз.

**Методические указания:** движение руки вверх за счет мышц верхней части спины и плеч. Упражнение напоминает движение, совершаемое при работе пилой.

## Мышцы, участвующие в работе

*Основные:* широчайшая мышца спины, большая круглая мышца, передний пучок дельтовидной мышцы, бицепс, трапециевидная мышца.

*Дополнительные:* мышца, выпрямляющая позвоночник, прямая мышца живота, наружная косая мышца живота, внутренняя косая мышца живота.

### **Значимость мышц для бега**

Упражнение несложное, в выполнении позволяет прорабатывать сразу несколько мышц. Можно использовать отягощение большого веса (после того как освоена правильная техника выполнения упражнения). Укрепление дельтовидной и трапециевидной мышц поможет студенту правильно держать голову и руки. Если эти мышцы обладают достаточной силой, они значительно улучшат работу рук во время забегов на короткие дистанции, помогут преодолевать усталость во время продолжительных забегов и соблюдать технику во время бега по пересеченной местности.

Важным элементом этого упражнения является изолирование мышц верхней части спины и плеч. Для стабилизации корпуса также используется и брюшной пресс, основная нагрузка должна приходиться на широчайшие мышцы спины, трапециевидные, дельтовидные мышцы и бицепсы.

И.п. – стоя в наклоне в руках штанга, ноги на ширине плеч (см. рис. 17). Вместо штанги можно использовать палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой.

1 – штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой к поясу; 2 – и.п.

Выполнить 8-10 раз.

**Методические указания:** использовать вес, сопоставимый технически правильному выполнению упражнения.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* широчайшая мышца спины, трапециевидная мышца.

*Дополнительные:* трицепс, дельтовидная мышца.

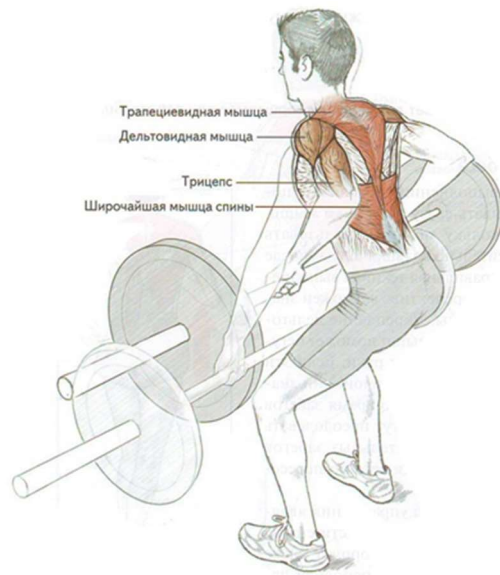


Рис. 17. Тяга штанги или палки с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой к поясу

### **Значимость мышц для бега**

У бегунов очень часто наблюдается мышечный дисбаланс, особенно между четырьмя мышцами квадрицепса, между четырехглавой мышцей и задней группой мышц бедра, а также между правой и левой ногой. Мышечный дисбаланс верхней части тела в ходе силовой подготовки студентов часто игнорируется. Все же в действительности дисбаланс между «толкающими» мышцами груди и «тянущими» мышцами верхней части спины оказывает большое влияние на технику бегового шага, потому что угол наклона корпуса вперед меняет силу и угол подъема колена, который выполняется за счет четырехглавых мышц во время фазы переноса маховой ноги. Недостаточный угол подъема колена, обусловленный сильным наклоном корпуса вперед, снижает скорость бега, особенно на коротких дистанциях.

Небольшой угол подъема колена можно компенсировать увеличением частоты шага, но при неправильном положении тела возможно негативное воздействие на беговые показатели. Таким образом, мышечная система студента в значительной мере определяет беговые показатели, и может показаться, что она играет второстепенную роль в физической подготовке. В частности, укрепив избранную крупную группу мышц (например, грудные мышцы с помощью «толкательных» упражнений), необходимо также укрепить и мышцы-антагонисты (в данном случае мышцы верхней части спины).

### **Безопасность при выполнении**

Выполняя это упражнение, особенно с отягощением высокого веса, необходимо сохранять естественный изгиб поясницы, не округлять спину.

## Тяга штанги к поясу широким хватом

(вместо штанги можно использовать палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой)

Широкий хват позволяет проработать мышцы под другим углом. В данном случае работает та же основная группа мышц, но студенты, обладающие более длинными верхними конечностями, предпочитают именно этот вариант упражнения. Необходимо сохранять естественный изгиб поясницы.

### Упражнения для рук и плеч

Для равномерного бегового движения необходимы руки. Каждая рука не только помогает удерживать равновесие, но и способствует движению вперед, играя роль противовеса, когда противоположная нога отрывается от земли. Высокий подъем колена сопровождается усиленной работой рук на протяжении первых нескольких десятков шагов, после чего руки продолжают интенсивно работать до конца забега [3, 4, 9].

Бегуны на длинные дистанции не станут тратить энергию, работая руками в манере спринтера, так как для них основным приоритетом является экономия усилий, они держат руки свободно, обычно согнув их под углом  $90^\circ$  и расслабив кисти. У спринтеров кисти рук напряжены. Работа рук имеет большое значение для успеха, хотя техника этой работы отличается в зависимости от типа бега.

Рука крепится к корпусу посредством плечевых суставов. Это неглубокие шаровидные суставы, входящие в суставную впадину лопатки. Плечевые суставы позволяют осуществлять движения в максимальном диапазоне, близком к  $360^\circ$ . Эта конструкция имеет высокую эффективность, хотя недостатком такой подвижности является нестабильность сустава, что делает его подверженным травмам. Связки, фиксирующие сустав, должны быть достаточно эластичными, чтобы не препятствовать движению, поэтому стабильность сустава зависит от силы удерживающих его мышц.

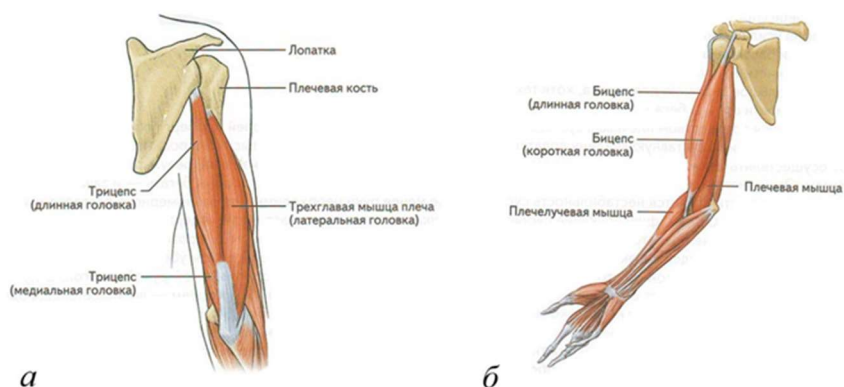


Рис. 18. Верхняя часть руки: а – вид сзади; б – вид спереди



Третий закон Ньютона гласит: сила действия равна силе противодействия. Если мышца-агонист сокращается и тянет плечо в одном направлении, то мышца-антагонист (или несколько мышц-антагонистов) должна удлиниться, чтобы позволить этому движению осуществиться. Сильные мышцы с хорошим тонусом могут нарушить целостность сустава, если противоположные мышцы (антагонисты) слабы, что особенно актуально для плечевого сустава [4].

Головка плечевой кости заключена в хрящевое кольцо сустава, которое является частью лопатки. Студенту следует знать, какие мышцы удерживают головку плечевой кости в стабильном положении (см. рис. 18) и какие из них следует укреплять, чтобы улучшить технику бега.

Движение ног во время совершения больших шагов требует соответствующих больших махов руками вперед и назад, позволяющих уравновесить перемещение нижних конечностей. В спринте движение рук и плеч играет особо значимую роль, и часто можно наблюдать, как спортсмен, проигравший забег, после соревнования совершает характерные движения, указывающие на закрепощенность плеч. Крепкие плечи не только увеличивают силу бегуна, но и улучшают его равновесие. Усталые руки и закрепощенные плечи ухудшают качество маховых движений руками, укорачивают беговой шаг и приводят к бесполезному увеличению расхода энергии. Выносливость верхних конечностей результат силовых упражнений [4, 9].

Дельтовидные мышцы, которые крепятся к ключице с одной стороны и к лопатке – с другой, покрывают весь плечевой сустав. Дельтовидные мышцы также соединены с плечевой костью. Сокращаясь, они оттягивают руку в сторону, то есть позволяют отводить ее, они противодействуют силе земного притяжения. Под дельтовидными мышцами находится сложная мышечная структура, позволяющая осуществлять движение рукой в нескольких плоскостях. Для бегуна, у которого угол движения рук обычно не превышает  $45^\circ$  с минимальным диапазоном движения в стороны, это особого значения не имеет. В плечевом суставе руку удерживает сложная мышечная структура: надостная мышца охватывает головку плечевой кости; подостная, подлопаточная мышца, большая и малая круглые мышцы формируют вращающую манжету плеча, которая стабилизирует плечевой сустав. Ниже плечевого сустава (в области верхней части руки) расположены бицепс, трицепс и плечевая мышца. Их основная функция – приведение в движение локтевого сустава, но некоторые мышечные пучки крепятся также к плечевому суставу, обеспечивая ему большую стабильность [4, 10].

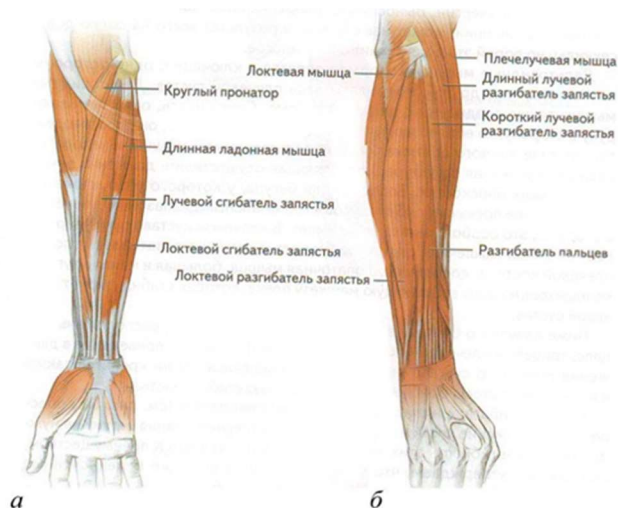


Рис. 19. Предплечье: *а* – вид спереди; *б* – вид сзади

Мышцы-сгибатели и мышцы-разгибатели предплечья (рис. 19) обеспечивают движение кисти и пальцев. Эволюция определила использование рук во время бега в двух аспектах: во-первых, для стабилизации тела, а во-вторых, для удержания тела в вертикальном положении при движении каждой ноги. Сильные верхние конечности не только помогают развить полную мощность движения во время спринта, но и позволяют плечам расслабиться. Когда плечи напряжены, скорость бега неизбежно падает.

Необходимо знать, что если руки не будут включены в процесс бега, то не будет полной отдачи. Когда руки устают, уменьшаются длина и частота шага, в результате чего бегун замедляет движение.

**Методические указания:** держать спину ровно, выполняя упражнения для бицепсов. Не раскачиваться, чтобы помочь движению. Выбрать вес, который не препятствует плавному движению, относительно легкое отягощение. Локти держать ближе к корпусу, зафиксировать положение. Движение должно совершаться за счет бицепсов, а не плеч [4].

Бегуны, выбирая упражнения для рук, отдадут предпочтение упражнениям для бицепсов, но для сбалансированного развития необходимо прорабатывать также и трицепсы. Упражнения для этих групп мышц следует выполнять с относительно небольшим весом, потому что бегунам на длинные дистанции необходимо поддерживать ритмичную работу рук на заключительных стадиях забегов, а не совершать мощные махи руками, как спринтерам, им следует выполнять большое число повторений (18-24) для повышения мышечной выносливости. Для бегунов на средние дистанции и спринтеров достаточно 8-12 повторений с большим весом отягощения.



Рис. 20. Попеременный подъем гантели на бицепс стоя

И.п. – стойка, ноги на ширине плеч, немного согнуты в коленях, руки с гантелями вниз (рис. 20).

1 – правая рука с гантелью тыльной стороной к плечу; 2 – и.п.; 3 – левая рука с гантелью тыльной стороной к плечу; 4 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 12-15 раз.

**Методические указания:** во время выполнения упражнения не раскачиваться, верхняя часть руки зафиксирована в локте, проходя отметку 90°, верхняя часть руки не должна двигаться вместе с ней. Стоя боком к зеркалу, проследить за тем, чтобы локоть был зафиксирован (основная нагрузка должна приходиться на бицепс).

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* бицепс, плечевая мышца, передний пучок дельтовидной мышцы.

*Дополнительные:* плечелучевая мышца, лучевой сгибатель запястья.

#### **Безопасность при выполнении**

Упражнение может вызвать проблемы, если попытаться выполнять его с отягощением слишком большого веса. Оптимальный вес должен быть достаточно велик, чтобы обеспечить должную нагрузку для всех повторений, но при этом не вызывать нарушения формы выполнения упражнения. Не поднимать гантель с помощью мышц верхней части спины. Движение выполняется только за счет бицепсов.

#### **Значимость мышц для бега**

Развитие силы мышц не равнозначно приращению мышечной массы. Упражнение для бицепсов, выполняемое с правильно подобранным весом отягощения и большим количеством повторений в комплексе с напряженной беговой программой, обеспечит повышение функциональной силовой выносливости без прироста мышечной массы. Цель студента в беге на длинные дистанции состоит в том, чтобы обеспечить надежный

противовес движениям ног, поэтому во время длительного тренировочного или соревновательного забега бицепсы уставать не должны. В данном случае высшим приоритетом является силовая выносливость, выполнение 12-18 повторений и многочисленных подходов попеременного подъема гантели на бицепс стоя.

Подъем штанги или палки с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на бицепс можно выполнять прямым, средним, узким и широким хватом. Узкий хват активнее других задействует двуглавые мышцы плеч. Широкий хват подключает передние пучки дельтовидных мышц. Можно использовать все три варианта хвата (см. рис. 21). Полная тренировка для бицепсов может состоять из одного этого упражнения – по подходу с каждым хватом.

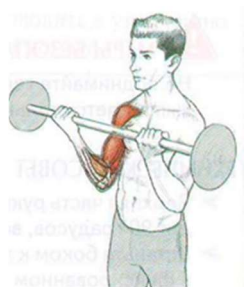


Рис. 21. Подъем штанги на бицепс разнохватом



Рис. 22. Попеременный «молоток» стоя

И.п. – стоя, ноги на ширине плеч, руки вниз с гантелями (рис. 22).

1 – гантель к плечу; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15 раз на каждую руку.

**Методические указания:** верхняя часть руки должна быть зафиксирована, она не должна двигаться вместе с ней, когда гантель проходит 90°.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* бицепс, плечевая мышца.

*Дополнительные:* мышцы-разгибатели предплечья.

#### **Безопасность при выполнении**

Не поднимать гантель за счет мышц верхней части спины. Движение выполняется только с помощью бицепсов. Стоя боком к зеркалу, проследить за тем, чтобы локоть оставался в фиксированном положении (основная нагрузка должна приходиться на бицепс).

#### **Значимость мышц для бега**

Выполнение этого упражнения напоминает подъем на бицепс – меняется только положение кисти руки. «Молоток» развивает преимущественно силу бицепса, в меньшей степени – плечевой мышцы. Выполняя данное упражнение в конце тренировки бицепса, можно довести эту группу мышц до окончательного утомления. «Молоток» повышает гибкость локтевого сустава, так как нагрузка распределяется по всему диапазону движения.

Нередко бегуны жалуются на боли в области бицепсов после коротких забегов. Поскольку в этом случае требуется более активная работа рук, на мышцы верхней части рук приходится большая нагрузка. Выполняя упражнения для бицепсов, можно предотвратить наступление усталости во время забегов, а также сократить время отдыха между повторениями силовых упражнений.

#### **«Молоток» двумя руками сидя**

И.п. – сидя на скамье, ступни прижаты к полу, спина ровная, руки с гантелями вниз, ладони обращены друг к другу.

1 – «молоток» одновременно двумя руками; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15 раз.

**Методические указания:** упражнение требует координации обеих рук и может приводить к утомлению мышц быстрее, чем вариант с попеременным подъемом рук.

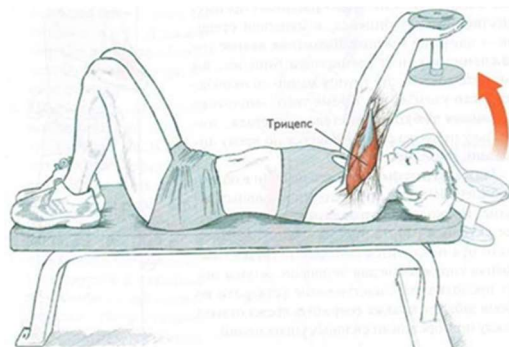


Рис. 23. Экстензия на трицепс с гантелью лежа

И.п. – лежа на спине, на скамье, ступни плотно прижаты к скамье, в руках согнутых под углом 90° гантели (рис. 23).

1 – руки с гантелями вверх; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10-12 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения удерживать гантели, туловище неподвижно.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* трицепс.

#### **Безопасность при выполнении**

Начинать выполнять упражнение, держа гантель в выпрямленных руках над головой. В этом случае первым движением станет обратная фаза упражнения – опускание гантели за голову.

#### **Значимость мышц для бега**

Экстензия на трицепс, направлена на укрепление трицепсов (мышц-антагонистов для бицепсов), что создает сбалансированную и хорошо развитую мускулатуру верхней части руки. Мышцы предплечья используются в качестве вспомогательных. Движение осуществляется только в локтевых суставах и производится исключительно за счет трицепсов.

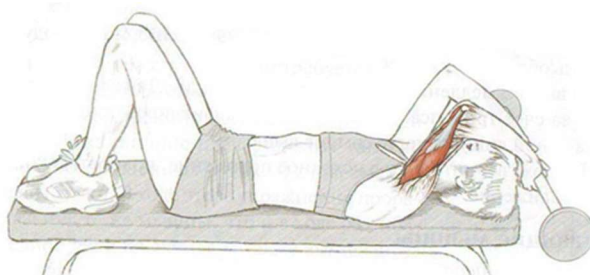


Рис. 24. Экстензия на трицепс со штангой или с палкой подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой на наклонной скамье лежа

И.п. – лежа на спине, на скамье, ступни плотно прижаты к скамье, в руках согнутых под углом 90° штанга (рис. 24). Вместо штанги можно использовать палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой.

1 – руки вверх; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения удерживать штангу, туловище неподвижно.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* трицепс.

### **Безопасность при выполнении**

Начинать выполнять упражнение, держа гантель в выпрямленных руках над головой. В этом случае первым движением станет обратная фаза упражнения – опускание гантели за голову.



Рис. 25. Разгибание руки с гантелью на скамье

И.п. – стоя, упор левым коленом на скамью, правой рукой упор в скамью и правую ногу поставить на пол (см. рис. 25). Держать ровно спину и голову. Рука с гантелью согнута в локте под углом примерно 90°, ладонь обращена к бедру.

1 – разогнуть руку – выдох; 2 – и.п. – вдох.

Выполнить 2 подхода по 15 раз на каждую руку.

**Методические указания:** держать локоть в фиксированном положении на одной линии с корпусом, не менять положение локтя во время выполнения упражнения. Прижать локоть к туловищу и зафиксировать положение, не опускать плечо, чтобы помочь движению.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* трицепс.

*Дополнительные:* надостная мышца, подостная мышца, дельтовидная мышца, большая грудная мышца.

### **Значимость мышц для бега**

Разгибание руки с гантелью задействует главным образом трицепс, но также подключает надостную и подостную мышцы, так как начальная фаза маха рукой в беге начинается от плеча, укрепление мышц плеч и плечевого пояса посредством этого упражнения помогает предотвратить утомление рук и ухудшение осанки, что является причинами снижения беговых показателей в связи с нерациональными тратами энергии.



Рис. 26. Разгибание обеих рук с гантелями

И.п. – стоя в полунаклоне, ноги на ширине плеч, гантели в руках внизу (см. рис. 26).

1 – одновременно разогнуть руки; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15 раз.

**Методические указания:** упражнение прорабатывает те же мышцы, что и в ходе разгибания одной руки на скамье, а также активизируются брюшной пресс и мышцы поясницы, чтобы стабилизировать корпус.

И.п. – стоя, хватом снизу держать штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой, ноги немного уже ширины плеч. Угол между верхней частью рук и предплечьями примерно 75°.

1 – руки вниз – выдох (локти не меняют исходного положения); 2 – и.п. – вдох.

Выполнить 2 подхода по 15 раз.

**Методические указания:** локти приближены к бокам, их положение остается зафиксированным в ходе всего упражнения.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* трицепс, мышцы-разгибатели предплечья.

### **Значимость мышц для бега**

При выполнении упражнения «тяга вниз» прорабатываются прежде всего трицепсы, но поскольку используется обратный хват, то дополнительно развиваются также и мышцы предплечий. Упражнение отлично подходит в качестве переходного от упражнений преимущественно на трицепс к упражнениям для предплечий. Трицепсы и мышцы-разгибатели предплечий в ходе этого упражнения быстро утомляются, они устают во время



забегов на длинные дистанции, где активная работа рук является дополнительным средством увеличения скорости бега.



Рис. 27. Подъем на предплечье и обратный подъем на предплечье

### Выполнение подъема на предплечье

И.п. – сидя в полунаклоне на скамье с опорой на предплечья, в руках штанга хватом снизу, кисти и запястья выходят за край скамьи (рис. 27). Вместо штанги можно использовать палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой.

1 – штанга вверх; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.

**Методические указания:** подъем штанги или палки с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой до полного выпрямления на кистях рук, выполняя движение за счет мышц предплечий.

### Выполнение обратного подъема на предплечье

И.п. – сидя в полунаклоне на скамье с опорой на предплечья, в руках штанга или палка с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой хватом сверху, кисти и запястья выходят за край скамьи (см. рис. 27).

1 – штанга или палка с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой вверх (до полного выпрямления на кистях рук, выполняя движение за счет мышц предплечий); 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.

**Методические указания:** сосредоточиться на полном растягивании мышц, быстрым движением штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой не опускать. При неудобном положении – положить предплечья на переднюю поверхность бедер.

### Мышцы, участвующие в работе

*Основные:* мышцы-сгибатели предплечий, мышцы-разгибатели предплечий.

### **Значимость мышц для бега**

На начальном этапе силовой подготовки мышцы-сгибатели и мышцы-разгибатели предплечья укрепляются в ходе других, неспецифических упражнений. В дальнейшем можно начать использовать подъем на предплечье и обратный подъем на предплечье для особой проработки этих мышц. Каждое предплечье удерживается под углом примерно 90° к верхней части руки, выступая в качестве противовеса действию противоположной ноги. За длительное время бега неизбежно наступает усталость мышц, запуская цепь биомеханических изменений, приводящих к нарушению осанки и излишним затратам энергии. Выполняя силовые упражнения для рук, наступление этой реакции можно смягчить или вообще предотвратить, что равноценно экономии энергии и лучшим беговым результатам.

### **3.2. Упражнения для средней части тела**

Главная задача костей, составляющих таз женщины, заключается в создании защитной структуры для развивающегося утробного плода. Мужчинам эта функция не нужна. У них более узкие бедра формируют платформу, соединяющую ноги с остальными частями тела. Таз мужчин эволюционно формировался для обеспечения движения [4, 10].

Таз составляют шесть костей: две подвздошные, две седалищные и две лобковые кости (см. рис. 28). И хотя эти кости прочно соединяются друг с другом без видимых промежутков, подвздошные кости соединяются с крестцом посредством крестцово-подвздошных суставов, и в данной области может наблюдаться значительная степень подвижности. Это становится очевидным во время родов, когда гормональные изменения вызывают ослабление связок, удерживающих суставы, что приводит к частичному вывиху. Выше крестца расположено пять позвонков поясничного отдела, которые играют важную роль в поддержании стабильности всей скелетной структуры. Каждая лобковая кость соединяется с лобковым симфизом. Это прочное фиброзное соединение может быть подвержено повреждениям в результате хронической перетренированности, так как оно формирует опорную точку и точку приложения максимальной силы.

С каждой стороны подвздошной кости имеется вертлужная впадина, формирующая шаровидный тазобедренный сустав. Такая форма сустава эволюционно сложилась для того, чтобы совместить максимальную стабильность с максимально возможным диапазоном движения. Подобным образом устроен и менее глубокий плечевой сустав, который в большей степени подвержен вывихам под нагрузкой. Головка бедренной кости лежит в округлом углублении тазобедренного сустава, диапазон движения которого ограничен этим углублением, а также плотностью и эластичностью окружающих его мышц и сухожилий.

Если таз уподобить циферблату часов, то два крестцово-подвздошных сустава располагаются в небольшом отдалении друг от друга в позиции 11 и 13 часов; тазобедренные суставы – в позиции 4 и 8 часов; лобковый симфиз – в позиции 6 часов. Если один из этих суставов смещается, другой также должен изменить свое положение, чтобы компенсировать перемещение. Это приобретает большое значение при беге, при котором таз поворачивается из стороны в сторону, воздействуя на все структуры таза.

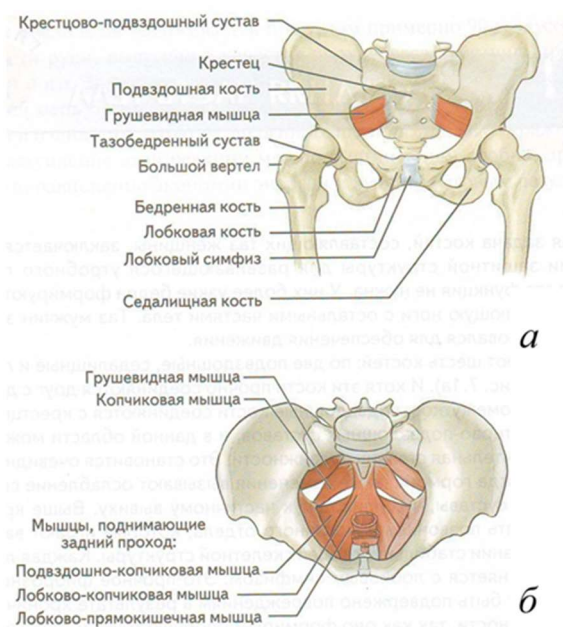


Рис. 28. Кости и мышцы таза: *а* – костные структуры; *б* – мышцы таза

Тазовое дно формируют мышцы, поднимающие задний проход (см. рис. 29), которые, собственно, и выполняют указанную функцию. Помимо этого, они являются опорой для внутренних органов. Ослабление мышц, поднимающих задний проход, может привести к недержанию, поэтому их нужно укреплять и поддерживать в тонусе. Бег повышает давление в брюшном отделе, и любое ослабление мышц может вызвать нежелательные физические симптомы.

Другие мышцы тазового дна выполняют двойную функцию – стабилизируют ноги и приводят их в движение в тазобедренных суставах. Стабильность дополнительно обеспечивается некоторыми крупными сухожилиями, которые относительно слабо растягиваются, тем не менее позволяя совершать движения в достаточно большом диапазоне. Подвздошно- поясничные мышцы, отходящие от поясничного отдела позвоночника и внутренней части крестца и проходящие через таз, формируют мягкие стенки для внутренних органов с внутренней стороны бедренной кости ниже тазобедренного сустава. Выше поясничного отдела позвоночника располагаются их антагонисты – мышцы, выпрямляющие позвоночник, которые стабилизируют его извне.

Подвздошно-поясничные мышцы являются мощными сгибателями бедер, подтягивающими бедра (ногу выше колена) к животу.

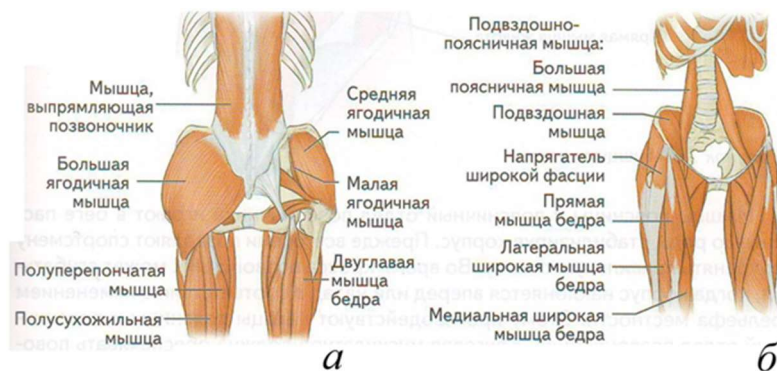


Рис. 29. Мышцы средней части тела и бедра: *а* – вид сзади; *б* – вид спереди

Ягодицы сформированы тремя слоями ягодичных мышц, отходящих вниз от спины под углом  $45^\circ$  к крестцу. Сокращение наружного слоя – большой ягодичной мышцы, выпрямляет и поворачивает тазобедренный сустав наружу. Большая ягодичная мышца переходит в напрягатель широкой фасции. Расположенные под большой ягодичной мышцей средняя и малая ягодичные мышцы отходят от вершины бедренной кости в области большого вертела. Их задача – отведение бедра наружу. Тазобедренный сустав в этом случае работает как центр шарнира.

Студенты, испытывающие боли в области поясницы, часто страдают синдромом грушевидной мышцы. Грушевидная мышца располагается параллельно средней ягодичной мышце, а боль появляется, скорее всего, по причине близости к седалищному нерву, который раздражает грушевидная мышца. Она стабилизирует тазобедренный сустав и позволяет отводить бедро.

Так как тазобедренный сустав подвижен, несколько мышечных групп должны уравновешивать действие мышц, расположенных в области таза. Эти мышцы в основном отводят бедро назад, в сторону и поворачивают его наружу. Противоположные мышцы – мышцы верхней части ноги, зачастую выполняют сразу несколько функций. Задняя группа мышц бедра (полуперепончатая мышца, полусухожильная мышца и двуглавая мышца бедра) берет начало от лобковой кости и идет вниз по бедру с обратной стороны коленного сустава, выступая в качестве его сгибателя (см. рис. 29). Функция этих мышц заключается в отведении бедра назад. Функцией, противоположной отведению, является приведение. Три приводящие мышцы (большая, длинная и короткая) вместе с тонкой и гребенчатой мышцами позволяют нам сводить бедра. Эти мышцы берут начало от лобковой кости и проходят по внутренней стороне бедра. Подобно подвздошно-поясничным мышцам четырехглавые и портняжные мышцы также отводят бедро и, сокращаясь, сгибают его.

Процесс бега требует повторяющихся движений, поэтому мышечный дисбаланс может приводить к воспалению суставной сумки.

В отличие от груди, живот не имеет костной структуры, выполняющей функцию стабилизации. Высота по вертикали задается и поддерживается поясничным отделом позвоночника. Функцию стабилизации выполняют органы брюшной полости, прилагающие противоположно направленное давление на мышечную стенку, состоящую из прямой мышцы живота, которая отходит от основания грудной клетки, проходит по центру и соединяется с лобковым симфизом и лобковой костью (см. рис. 30).

С боковых сторон диагонально расположены наружные и внутренние косые мышцы и поперечная мышца живота, выполняющие три функции: повороты корпуса, сгибание туловища вперед и защиту внутренних органов брюшной полости. Во время бега мышцы поочередно растягиваются и сокращаются по мере того, как таз движется не только из стороны в сторону, но также поворачивается, поднимается и опускается относительно окружающих его частей тела. Эти мышцы вместе с ребрами и диафрагмой участвуют в дыхании, когда оно становится учащенным, что особенно заметно, когда спортсмен начинает часто и тяжело дышать. Таким образом, мышцы выполняют несколько функций одновременно, они действуют эффективнее, если достаточно развиты.

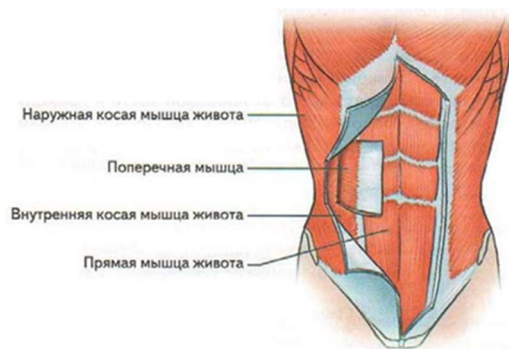


Рис. 30. Мышцы живота

Мышцы поясницы и поясничный отдел позвоночника мало задействованы, стабилизируя корпус, позволяя спортсмену сохранять правильную осанку. Во время бега позвоночник может сгибаться, когда корпус наклоняется вперед или назад в соответствии с изменением рельефа местности, но этому противодействуют мышцы поясницы и поясничный отдел позвоночника. Круговая мускулатура обеспечивает повороты корпуса, наклон тела при прохождении поворотов и движении по любому склону, отсюда – мышцы должны сокращаться и растягиваться, чтобы поддерживать стабильность корпуса и тела в целом. Такие сложные движения должны сосуществовать в сочетании со всеми другими вариантами положения тела, которые оно принимает, когда ноги двигаются и легкие дышат. Потенциальная сила мышц, особенно окружающих поясничный отдел позвоночника,

должна рассматриваться как значимый фактор для каждого бегуна, поскольку слабость этих мышц неизменно скажется на других областях [4].

**Рекомендации для проведения занятий:** при выполнении упражнений с весом собственного тела следует делать несколько подходов с большим количеством повторений. Необходимо их выполнять в медленном темпе, при отсутствии дополнительного отягощения сосредоточиться следует на максимально точном выполнении движений.

Большое количество повторений позволяет эффективно развивать мышечную выносливость, в чем заинтересованы бегуны на длинные дистанции. Вместе с тем увеличить силу, позволяющую повысить скорость бега, можно, только используя на занятиях отягощения большого веса.

Упражнения для средней части тела следует выполнять на всех стадиях занятий, т.к. во многих случаях используется только вес собственного тела без дополнительных отягощений, их можно выполнять 3-4 раза в неделю.

#### **Упражнения для мышц поясницы и ягодиц**

И.п. – упор лежа (см. рис. 31). 1 – корпус вверх; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по десять раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения подъем корпуса зафиксировать на 10-15 с.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* мышца, выпрямляющая позвоночник; большая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* задняя группа мышц бедра, прямая мышца живота, наружная косая мышца живота, внутренняя косая мышца живота.



Рис. 31. Экстензия спины с отжиманием от пола

#### **Значимость мышц для бега**

Экстензия спины с отжиманием от пола помогает укрепить мышцы и связки спины, непосредственно мышцу, выпрямляющую позвоночник, которая является антагонистом прямой мышцы живота. Упражнение как укрепляет, так и растягивает поддерживающие

мышцы крестцового и поясничного отделов позвоночника, помогая правильно поворачивать таз и уменьшая угол его наклона вперед (если выполняется слишком большое количество упражнений для укрепления брюшного пресса, что может приводить к дисбалансу между брюшным прессом и мышцами поясницы). Упражнение не следует путать со стандартным отжиманием от пола.

В укреплении мышц средней части тела основное внимание зачастую уделяется брюшному прессу, а мышцам поясницы и ягодиц отводится меньше времени. Тем не менее без сильных мышц ягодиц и уверенной поддержки поясницы задняя группа мышц бедра не может генерировать достаточно силы, даже если сама по себе она хорошо развита. Поскольку мышцы сильны лишь настолько, насколько позволяет самое слабое звено в кинетической цепи.

Для бегового шага большое значение имеет правильное движение таза. Смещение таза, обусловленное мышечным дисбалансом между брюшным прессом и мышцами поясницы, может привести к травмам, которые снизят беговые показатели даже при условии хорошей подготовки сердечно-сосудистой системы.

И.п. – лежа на животе на полу, руки вперед, ноги вместе (рис. 32).

1 – одновременно поднять левую руку и правую ногу на 7-10 см; 2 – и.п.; 3 – одновременно поднять правую руку и левую ногу; 4 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10 раз.



Рис. 32. Попеременный подъем рук и ног

**Методические указания:** при выполнении упражнения в поднятом положении руки и ноги зафиксировать на 10-15 с.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* мышца, выпрямляющая позвоночник; большая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* задняя группа мышц бедра, прямая мышца живота, наружная косая мышца живота, внутренняя косая мышца живота.

#### **Значимость мышц для бега**

Цель упражнения – укрепить и растянуть мышцы поясницы, ягодиц и, в меньшей степени, брюшного пресса, чтобы сохранить правильный наклон таза во время бега.

Смещение таза запускает цепную реакцию смещения других частей тела, что негативно сказывается на технике бега и приводит к дополнительному расходу энергии. Мышцы спины, ягодиц и брюшной пресс работают одновременно, но также уравнивают друг друга, чтобы сгенерировать силы для выполнения упражнения. Это напоминает механизм работы мышц средней части тела во время бега. Поскольку таз поворачивается в разных направлениях, средняя часть тела должна динамично стабилизироваться, отвечая на изменения беговой поверхности, повороты и неверные шаги (рис. 33).

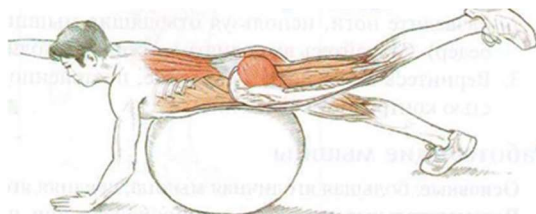


Рис. 33. Гиперэкстензия поясницы на мяче

Использование мяча изменяет динамику гиперэкстензии поясницы, если использовать только одну руку (а при достаточной тренированности можно обходиться и без рук), можно развивать проприоцепцию (координацию расположения тела в пространстве). Также можно научиться удерживать равновесие на мяче, если освоить технику выполнения упражнения и укрепить мышцы средней части тела, чтобы они активизировались по мере необходимости. Бегуны склонны пренебрегать упражнениями, развивающими проприоцепцию, поскольку их польза не очевидна. В действительности хорошая проприорецепция улучшает технику, создавая более плавный стиль бега.

### Упражнения для брюшного пресса и таза

И.п. – лежа на спине, ноги согнуты в коленях, ступни прижаты к полу, руки за головой (рис. 34).

1 – поднимать корпус вверх, отрывая по одному позвонку от пола и одновременно прижимая к нему ягодицы; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 25-30 раз.

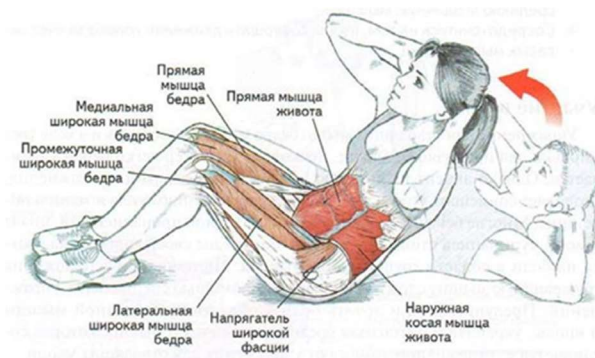


Рис. 34. Подъем корпуса на полу



**Методические указания:** при выполнении упражнения в верхней точке корпус должен составлять с полом угол  $45^\circ$ . Можно работать в паре с партнером, для удержания стоп, что облегчает упражнение и позволяет выполнить большее количество повторений.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* прямая мышца живота, наружная косая мышца живота.

*Дополнительные:* напрягатель широкой фасции, четырехглавая мышца.

### **Безопасность при выполнении**

Не смыкать ладони за головой, а просто завести их за затылок, иначе можно растянуть мышцы шеи, помогая подъему корпуса движением рук.



Рис. 35. Подъем корпуса с поворотом

И.п. – лежа на спине, ноги согнуты в коленях, ступни прижаты к полу, руки за головой (рис. 35).

1 – корпус вверх с поворотом; 2 – и.п.

Выполнить 12 раз в каждую сторону.

**Методические указания:** при выполнении упражнения можно на каждое повторение менять стороны, но при этом обязательно касаться локтем колена противоположной ноги.

### **Значимость мышц для бега**

Брюшной пресс и мышцы поясницы являются антагонистами и уравновешивают друг друга, так же как четырехглавые мышцы и задняя группа мышц бедра. Для того чтобы избежать мышечного дисбаланса и травм, упражнения для брюшного пресса необходимо выполнять после силовых упражнений для мышц поясницы. Не следует выполнять подъем корпуса с максимальной скоростью, движение должно быть относительно быстрым, опускать корпус следует медленно, контролируя работу брюшного пресса.

Упражнение помогает прорабатывать главным образом прямую мышцу живота, которая управляет сокращением брюшного отдела. Так как все упражнения для брюшного пресса задействуют эту мышцу, серию упражнений можно начать с подъема корпуса, достаточно одного подхода до утомления.

Большое значение для бегового шага имеет правильное движение таза. Смещение этой области, обусловленное мышечным дисбалансом между брюшным прессом и мышцами поясницы, может привести к травмам, которые снизят беговые показатели даже при хорошей подготовке сердечно-сосудистой системы.

И.п. – вис на перекладине хватом сверху (рис. 36).

1 – колени к груди; 2 – и.п.

Выполнить 10 раз.



Рис. 36. Подъем ног в висте

**Методические указания:** при выполнении упражнения по сгибанию ног корпус не должен раскачиваться. Упражнение чрезмерно нагружает плечи; при травме плеча необходимо ограничить число повторений.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* прямая мышца живота, наружная косая мышца живота, подвздошно-поясничная мышца.

*Дополнительные:* широчайшая мышца спины, передняя зубчатая мышца.

Стандартный подъем ног в висте задействует наружные и внутренние косые мышцы живота, но добавление при подъеме поворота ног увеличивает роль мышц, которые отвечают за поворот и наклоны корпуса в стороны (рис. 38). Косые мышцы живота позволяют корпусу наклоняться в стороны, тем самым давая возможность приспособляться к беговой поверхности, а также они вместе с диафрагмой и ребрами участвуют в дыхании.



Рис. 37. Подъем ног с поворотом в вися

### Значимость мышц для бега

Мышцы-сгибатели бедра, в частности подвздошно-поясничная мышца, очень устают за время долгого забега по одной и той же поверхности. Укрепив их, спортсмены могут отсрочить наступление утомления. Кроме того, во время бега по пересеченной местности, когда приходится помногу поднимать ноги, слабые мышцы устанут быстрее и бегуну труднее станет твердо держаться на ногах.

И.п. – стоя, ноги на ширине плеч, правая рука с гантелью внизу, левая рука согнута в локте и заведена за голову (см. рис. 38).

1 – наклон вправо; 2 – и.п.

Выполнить 12 раз правой рукой, затем переложить гантель в левую руку и повторить упражнение.

**Методические указания:** при выполнении упражнения наклон корпуса выполнять в медленном темпе.



Рис. 38. Наклоны в стороны с гантелью

### Мышцы, участвующие в работе

*Основные:* наружная косая мышца живота.

*Дополнительные:* прямая мышца живота, квадратная мышца поясницы.

### **Значимость мышц для бега**

Целью упражнения является гармоничное развитие мышц живота. Большинство упражнений сосредоточены на проработке прямой мышцы живота. Наклоны в стороны, выполняемые в упражнении, позволяют укрепить наружные косые мышцы живота, которые прорабатываются в ходе подъема ног с поворотом в висе. Укрепление наружных косых мышц живота дает возможность минимизировать наклоны корпуса из стороны в сторону в конце скоростного забега или ускорения во время тренировки скорости, т.к. мелкие мышцы живота устают быстрее, чем крупные (прямая мышца живота); имеет смысл выполнять упражнения, направленные на проработку мелких мышц, чтобы они поддерживали свою относительную силу.

Практическое применение упражнения состоит в исключении раскачивания корпуса из стороны в сторону во время бега. Раскачивание может быть обусловлено различной постановкой ног в связи с неровностью беговой поверхности, но более распространенной причиной этой проблемы является слабость мышц живота, особенно косых. Неспособность мышц живота удерживать корпус в вертикальном положении приводит к раскачиванию таза из стороны в сторону.

И.п. – лежа на спине, руки вверх за голову, левая нога согнута в колене, а правая (прямая) вверх от пола примерно на 15 см (рис. 39).

1 – руки вперед-вверх, поднять корпус, одновременно поднять прямую правую ногу;

2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10-12 раз.



Рис. 39. Подъем корпуса и ноги

**Методические указания:** корпус поднимать с подбородка и груди, дотронуться руками прямой поднятой ноги в верхней точке.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* прямая мышца живота, поперечная мышца живота, подвздошно-поясничная мышца.

*Дополнительные:* задняя группа мышц бедра, большая ягодичная мышца. Использование медицинского мяча позволяет интенсивнее проработать мышцы живота, т.к. используется дополнительное отягощение (рис. 40). Медицинский мяч удерживается на расстоянии вытянутых рук от мышц живота, поэтому даже легкий 1-3-килограммовый мяч (в зависимости от физической подготовки) ощущается как достаточно тяжелый по причине удаления от точки опоры (т.е. от мышц живота). Необходимо в ходе упражнения учитывать дополнительное отягощение, что помогает развивать координацию движений – умение, которое невозможно развить в результате простого бега.

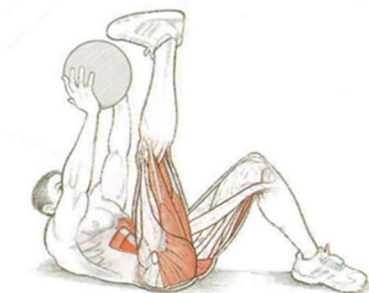


Рис. 40. Подъем корпуса и ноги с медицинским мячом

### **Значимость мышц для бега**

Упражнение динамичное быстро утомляет мышцы живота и подвздошно-поясничные мышцы, т.к. в подъеме корпуса и ноги сочетается движение верхней и нижней части тела. Упражнение следует выполнять до полной усталости подъема корпуса и ноги, а также вариант с медицинским мячом, особенно если их выполнять в конце силовой тренировки, для тренировки мышц живота вполне достаточно.

### **3.3. Упражнения для мышц ног**

Мышцы нижней части туловища и верхней части ног участвуют в совершении одних и тех же движений. Так, некоторые мышцы таза помогают движению и стабилизации ног – и наоборот. То же относится и к мышцам верхней части ноги, соединяющим тазобедренный и коленный суставы и соответственно влияющим на их движения и устойчивость. Верхняя часть ноги (рис. 41), или бедренная кость соединяется с лобковой и седалищной костями посредством тазобедренного сустава. Коленный сустав схож по функции со шкивом [4, 10].

Надколенник (коленная чашечка) перемещается по углублению в нижнем окончании бедренной кости, направляя действие выпрямляющих сил четырехглавой мышцы в области колена.

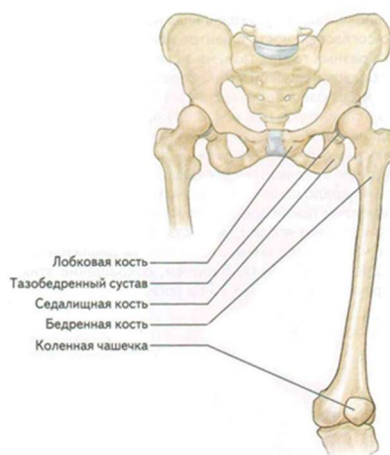


Рис. 41. Костные структуры верхней части ноги

Четырехглавая мышца бедра (см. рис. 42, *a*) имеет четыре головки: прямая мышца бедра, латеральная широкая мышца бедра, медиальная широкая мышца бедра и промежуточная широкая мышца бедра. Одной головкой она начинается от подвздошной кости и тремя – от бедренной и одним общим сухожилием крепится к большеберцовой кости, охватывая надколенник. Сокращение этой крупнейшей группы мышц позволяет выпрямлять коленный сустав и подтягивать колено к груди.

Особенную значимость это имеет для спринтера, которому сокращение четырехглавых мышц бедер позволяет увеличить длину шага. И все же высокий подъем колена приводит к излишнему расходу энергии в забегах на длинные дистанции, для которых специфичен незначительный диапазон движения тазобедренных и коленных суставов. Отсюда во время бега четырехглавые мышцы выполняют две функции, цель обеих – увеличение длины бегового шага. Если нога полностью выпрямлена в колене и четырехглавые мышцы максимально напряжены, то увеличивается не только длина шага, но и фаза переноса маховой ноги, что позволяет уже сгенерированному ускорению продвинуть тело дальше вперед.

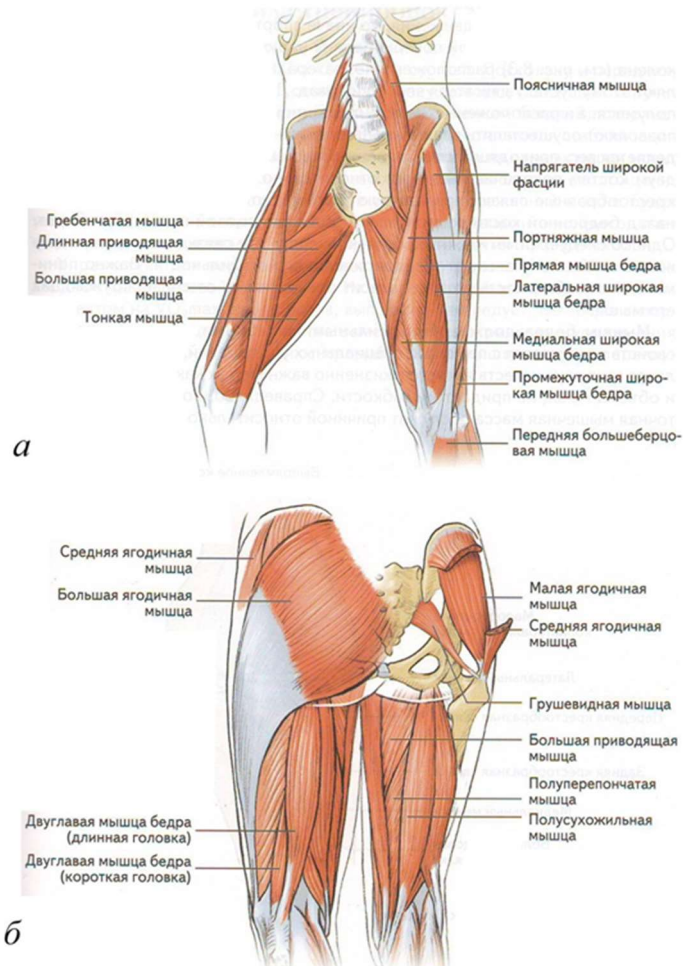


Рис. 42. Верхняя часть ноги: *а* – вид спереди; *б* – вид сзади

Таким образом, все это можно отнести и к задней группе мышц бедра (см. рис. 42, *б*), проходящей через оба сустава (коленный и тазобедренный), но входящие в нее мышцы действуют противоположным образом, чтобы выпрямить ногу в тазобедренном суставе и согнуть ее в коленном суставе. Полуперепончатая, полусухожильная и двуглавая мышцы бедра имеют определенную согласованность в центре единого мышечного массива. Они расположены в разных точках таза, но за коленом расходятся и крепятся к тыльной части большеберцовой и малоберцовой костей. Сокращение мышц задней группы бедра позволяет отвести ногу назад; движение в особенности выражено у спринтеров. Бегуну на длинные дистанции увеличение диапазона сгибания колена не нужно, так как мышцы задней группы в этом случае отвечают за движения в области бедра.

Можно условно разделить заднюю группу мышц бедра на верхнюю и нижнюю половины, хотя верхняя часть мышц является разгибателем тазобедренного сустава, нижняя часть сгибает коленный сустав и ограничивает его подвижность. У бегуна на длинные дистанции задняя группа мышц бедра имеет ограниченный диапазон движения в

коленном и тазобедренном суставах, сокращение этих мышц весьма сильное даже при малых углах сгибания ноги.

Необычно, что колено должно иметь возможность совершать скручивающие движения, но иначе спортсмен не сможет поворачивать и бежать по неровной поверхности. С наружной и внутренней стороны колена (см. рис. 43) расположены коллатеральные связки, которые позволяют этому суставу двигаться вперед и назад. Два мениска, имеющие форму полумесяца и расположенные между бедренной и большеберцовой костями, позволяют осуществлять вращательные движения в суставе, по ним распределяется вес, приходящийся на коленный сустав. Также они позволяют бедренной и большеберцовой костям поворачиваться друг относительно друга. Передняя и задняя крестообразные связки препятствуют чрезмерному движению вперед или назад бедренной кости относительно большеберцовой кости и наоборот. Однако следует отметить, что в первую очередь эти связки направляют движение колена и участвуют в поддержании его стабильности. Важно понимать, что стабильность колена зависит прежде всего от силы окружающих его мышц.

Мышцы бедра должны быть сильными и гибкими, и каждое из этих свойств развивается с помощью специальных упражнений. Поддержание баланса этих двух качеств является жизненно важным, т.к. увеличение силы и объема мышц не придает им гибкости. Справедливо и обратное: недостаточная мышечная масса послужит причиной относительной слабости.



Рис. 43. Коленные связки и ткани

### Рекомендации для проведения занятий

При выполнении следующих упражнений для верхней части ног очень большое значение имеет защита коленного сустава. Так как и передняя, и задняя группа мышц бедра крепятся к колену, которое совершает скручивающие движения, чтобы адаптироваться к изменениям беговой поверхности, поворотам, бегу вверх и вниз, постоянно осуществляется стабилизация и релаксация этого сустава. Упражнения, такие как выпад, сначала могут показаться трудными, поэтому начинать их выполнение следует с отягощением



небольшого веса, который по мере освоения упражнений можно будет увеличивать. Упражнения на тренажерах помогают защитить колени за счет фиксированного диапазона движения, но это снижает их эффективность.

Упражнения для верхней части ног полезно включать в программу на вводной фазе силовой подготовки. Во время завершающей фазы возможно ввести в качестве замены плиометрические упражнения, которые позволяют прорабатывать мышцы ног, не перегружая их.

### **Упражнения для приводящих мышц**

И.п. – сидя на стуле, ноги сжимают мяч.

1 – свести ноги (используя приводящие мышцы бедер); 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15 раз.

**Методические указания:** стопы не используются при выполнении движений.

Акцент делать на сведении ног с помощью медиальных широких мышц бедер.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* длинная приводящая мышца, короткая приводящая мышца, тонкая мышца.

*Дополнительные:* медиальная широкая мышца бедра.

### **Значимость мышц для бега**

Упражнение на сведение ног можно использовать и в качестве части силовой программы, и в качестве реабилитационной программы, когда необходимо укрепить вспомогательные мышцы без лишней нагрузки на коленные суставы. Многие проблемы с коленями обусловлены дисбалансом между мышцами, образующими четырехглавую мышцу, в связи с чем может происходить смещение коленной чашечки в движении. Упражнение на сведение ног укрепляет приводящие мышцы бедер, а также попутно развивает медиальные широкие мышцы бедер, предупреждая чрезмерное смещение коленной чашечки. Укрепление приводящих мышц бедра и четырехглавой мышцы способствует мощному выпрямлению ноги в толчковой фазе бегового шага.

### **Упражнения для четырехглавых мышц бедра**

И.п. – сидя на стуле, колени находятся на одной линии с точкой опоры удержания груза, спина прямая, руками держаться за края стула.

1 – ноги вверх (до выпрямления); 2 – ноги вниз – медленно, и.п.

Выполнить 2 подхода по 15-18 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения выпрямлять ноги, не выключая их в коленях.

Не раскачиваться, чтобы помочь движению. В случае травмы колена экстензия ног по короткой дуге является замечательной заменой стандартной экстензии ног на тренажере. Единственный недостаток состоит в том, что это упражнение не действует на весь диапазон движения, но когда боль в коленном суставе пройдет, можно будет перейти к стандартной экстензии ног с полным диапазоном движения.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* четырехглавая мышца бедра.

*Дополнительные:* напрягатель широкой фасции, портняжная мышца.

### **Значимость мышц для бега**

Экстензия ног – замечательное упражнение, поскольку оно достаточно простое в выполнении и позволяет эффективно укрепить четырехглавые мышцы. Данное упражнение равномерно прорабатывает всю четырехглавую мышцу и способствует правильному перемещению коленной чашечки. Бегуны, перенесшие травму колена, при полном выпрямлении ног могут испытывать нежелательную нагрузку на коленную чашечку. Снизить ее и при этом развить четырехглавые мышцы позволит выполнение экстензии ног по короткой дуге (последние 15-20° траектории движения). Это упражнение, эффективно развивающее силу, необходимо включить в программу вводной тренировки.

### **Упражнения для задней группы мышц бедра**

И.п. – лежа на животе на гимнастическом коврикe, голову держать ровно, вокруг голеностопа резиновая лента, привязанная к опоре.

1 – согнуть ноги в коленях; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 10-15 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения акцент делать на задней группе мышц бедра

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* задняя группа мышц бедра.

*Дополнительные:* большая ягодичная мышца, малая ягодичная мышца, икроножная мышца.

### **Безопасность при выполнении**

Распространенные ошибки при выполнении этого упражнения: пытаться помочь движению руками; слишком быстро опускать ноги; завершая движение, приводить ноги к ягодицам.

### **Значимость мышц для бега**

В этом упражнении выполняется движение, противоположное экстензии ног на тренажере и дополняющее его. Оно направлено на укрепление задней группы мышц бедра,

что позволяет сбалансировать переднюю группу мышц бедра. Задняя группа мышц бедра активизируется во время восстановительной фазы бегового цикла, когда нога сгибается в колене, поднимая голень к ягодице. Задняя группа мышц бедра не настолько сильна, как передняя, поэтому ее следует постоянно укреплять, чтобы избежать дисбаланса. У бегунов на длинные дистанции редко бывают растяжения и разрывы мышц задней группы, но для них характерно закрепощение этой группы мышц, обусловленное проблемами с поясницей. Кроме того, причиной многих травм колена может являться ослабление задней группы мышц бедра.

Единственным недостатком упражнения является то обстоятельство, что оно укрепляет только заднюю группу мышц бедра, оставляя без внимания ягодицы, которые работают совместно с этой группой мышц в цикле бегового шага. Это действительно так, тем не менее, если включать упражнение во вводную тренировку, когда акцент делается на общем развитии силовых качеств, а не на функциональной работе, проблема невелика. Ягодичные мышцы могут попутно прорабатываться и в ходе других упражнений.

И.п. – стоя, ноги на ширине плеч, в каждой руке по гантели (см. рис. 44).

1 – шаг вперед левой ногой так, чтобы бедро оказалось параллельно полу, а голень образовала угол  $90^\circ$  с бедром, правая нога помогает удерживать равновесие; 2 – и.п.

Выполнить 15 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** отталкиваться той ногой, которой делается шаг вперед.



Рис. 44. Выпад с гантелями

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* четырехглавая мышца бедра, задняя группа мышц бедра, большая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* прямая мышца живота, наружная косая мышца живота.

### **Безопасность при выполнении**

Выполняя упражнение, не давать колену выходить за вертикальную линию, проходящую через носок ведущей ноги. Можно травмировать колено, которое оказывается в неустойчивом положении при выполнении этого трудного анаэробного упражнения.

### **Выпад с длинным шагом**

Делая длинный шаг, создаются условия, при которых большая и средняя ягодичные мышцы укрепляются активнее, чем при обычном шаге. Также растягиваются подвздошно-поясничная мышца и прямая мышца бедра задней ноги.

#### **Значимость мышц для бега**

В ходе выполнения выпада укрепляются все мышцы средней части тела, задняя и передняя группы мышц бедра. Вместо гантелей можно использовать штангу, но удержание ее на плечах приводит руки в неестественное для бегуна положение. Студентам при выполнении упражнения обычно удобнее держать руки опущенными.

Упражнение замечательно подходит для второй, силовой, фазы занятий. Выпад относится к числу функциональных упражнений и с добавленным весом гантелей может эффективно развивать силу.

### **Наклоны вперед с согнутыми ногами**

И.п. – стоя, на плечах штанга или палка с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой с легким весом, ноги на ширине плеч (см. рис. 45).

1 – наклон вперед от поясницы – вдох; 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 8-10 раз.

**Методические указания:** во время движения ягодицы отводятся назад.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* задняя группа мышц бедра, большая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* икроножная мышца, наружная косая мышца живота, внутренняя косая мышца живота.

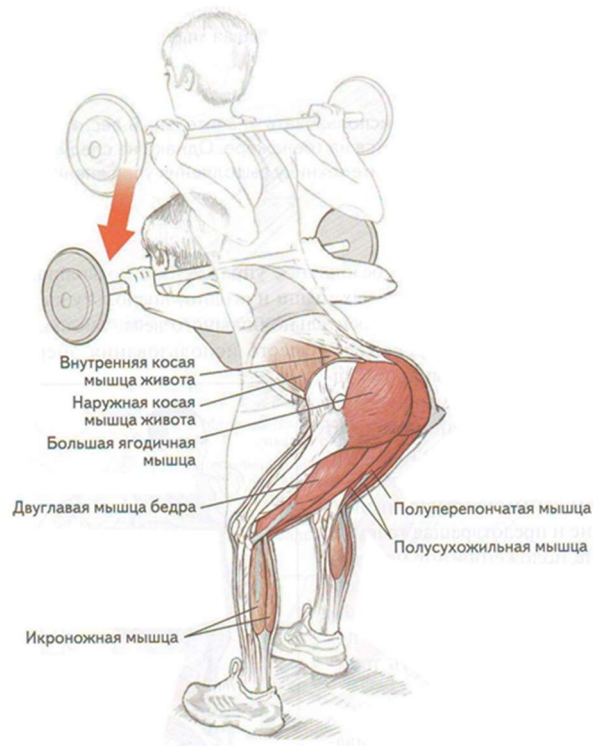


Рис. 45. Наклоны вперед с согнутыми ногами

### **Значимость мышц для бега**

Наклоны вперед с согнутыми ногами – простое, но очень эффективное упражнение. Наряду с укреплением задней группы мышц бедра и ягодиц, оно позволяет также растягивать мышцы, повышая эластичность соединительных тканей между мышцами и костями поясницы и таза. Эта кинетическая цепь также влияет на состояние коленей, поскольку сильная поясница в меньшей степени растягивает заднюю группу мышц бедра, что, в свою очередь, позволяет свободно перемещаться коленной чашечке.

Наклоны вперед можно выполнять и с прямыми ногами (см. рис. 46), но студентам, имеющим хронически закрепощенную заднюю группу мышц бедра, следует выполнять упражнение с согнутыми ногами, т.к. акцент делается на развитии гибкости этих мышц. Когда будет достигнута необходимая степень гибкости, можно переходить к выполнению наклонов с прямыми ногами.



Рис. 46. Наклоны вперед с прямыми ногами

## Римская становая тяга

И.п. – стоя, ноги на ширине плеч, слегка согнутые в коленях, носки разведены, в руках гантели хватом сверху (рис. 47).

1 – наклон вперед (от поясницы); 2 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 8-10 раз.

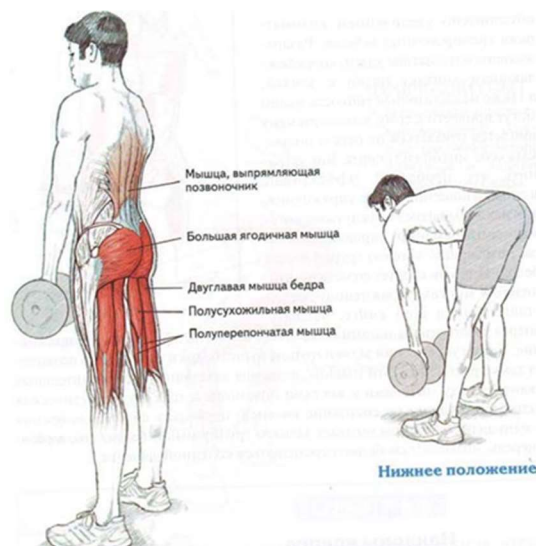


Рис. 47. Римская становая тяга

**Методические указания:** при выполнении упражнения гантели не должны касаться пола. Сохранять естественный изгиб поясницы, не наклоняться слишком низко.

### Мышцы, участвующие в работе

*Основные:* задняя группа мышц бедра, большая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* мышца, выпрямляющая позвоночник.

### Значимость мышц для бега

Это интенсивное упражнение делает акцент на мышцах верхней части ног, особенно задней группы мышц бедра и мышцах ягодиц. Упражнение в высшей мере функционально, поскольку в ходе его мышцы прорабатываются примерно так же, как во время бега, – во всяком случае, более функционально, чем сгибание ног на тренажере. Баланс между двумя крупными группами мышц (передней и задней группами мышц бедра) является ключевым для выпрямления ноги и толчка во время бега. Чтобы обеспечить непрерывность тренировок и избежать травм, следует ввести в тренировочную программу такие упражнения, как римская становая тяга. Упражнения помогают одновременно укрепить и растянуть заднюю группу мышц бедра.

Принимая во внимание требования, которые налагает скоростной бег на заднюю группу мышц бедра, быстро переключающиеся волокна этих мышц лучше

прорабатываются с помощью высокоинтенсивных упражнений, таких как римская становая тяга с гантелями.

### Присядания

И.п. – стоя, под штангой на стойке или палкой с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой, ноги на ширине плеч, носки разведены (см. рис. 48).

1 – снять штангу или палку с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой со стойки и выпрямиться; 2-3 – присед, опустив корпус и бедра; 4 – и.п.

Выполнить 8-10 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения гриф должен лечь на дельтовидные и трапециевидные мышцы (не на шею).

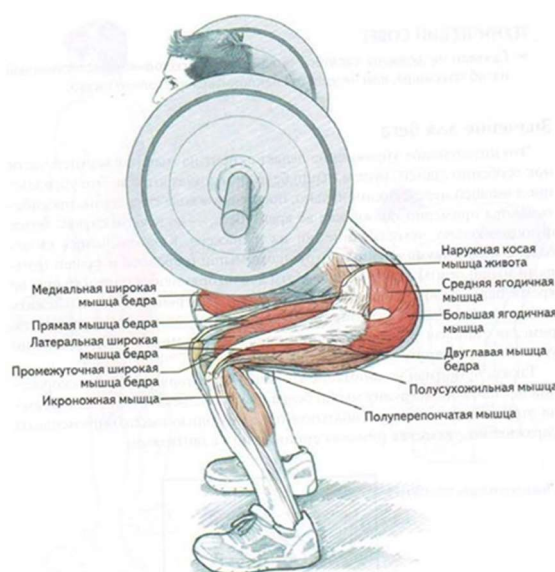


Рис. 48. Приседание

### Мышцы, участвующие в работе

*Основные:* четырехглавая мышца бедра, большая ягодичная мышца, средняя ягодичная мышца, малая ягодичная мышца.

*Дополнительные:* задняя группа мышц бедра, наружная косая мышца живота, икроножная мышца.

### Значимость мышц для бега

В ходе приседания укрепляются преимущественно четырехглавые мышцы бедер, но т.к. в упражнении участвуют и стабилизирующие мышцы, то прорабатываются и мышцы средней части тела, задняя группа мышц бедер и мышцы голени.

Можно использовать достаточно большой вес отягощения, хотя это необязательно сделает упражнение эффективным. Приседание следует включить в одну тренировку со становой тягой с гантелями или наклонами вперед, чтобы создать баланс между передней и задней группами мышц бедра.

Приседание развивает взрывные качества, поскольку оно сосредоточено на крупных группах мышц. Поэтому его логичнее использовать студентам, которые тренируются для участия в забегах на короткие или средние дистанции.

Упражнение можно включать вводную тренировку для всех студентов, поскольку оно делает акцент на общем развитии силовых качеств, а не на функциональной работе. Акцент на стабилизирующих мышцах средней части тела будет полезен спортсменам на любой фазе тренировочного цикла.

### **Приседание на одной ноге с гантелями**

И.п. – стоя примерно в метре от скамьи, держа в каждой руке по гантели (рис. 49). Положить тыльную сторону стопы правой ноги на скамью позади себя.



Рис. 49. Приседание на одной ноге с гантелями

1 – присед на левой ноге до угла  $90^\circ$  в коленном суставе, а колено правой ноги почти касается пола; 2 – и.п., используя четырехглавые мышцы бедра.

Повторить 12 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** не освоив технику выполнения упражнения, вес гантелей не увеличивать. Упражнение помогает развить приводящие мышцы бедра.

### **3.4. Упражнения для мышц голени и стопы**

Любая структура, способная пройти тест на долговечность, имеет мощное, надежное и предпочтительно широкое основание. Идеальным примером устойчивой конструкции является пирамида, но тело человека имеет далеко не пирамидальную форму. Сохранять вертикальное положение человеку помогают лишь две устойчивые нижние конечности, усиленные относительно большими стопами, что представляет собой довольно узкое основание.

Большеберцовая кость (рис. 50) является основной костью в пределах нижней части ноги, несущей вес тела.





Рис. 50. Костные структуры и мягкие ткани голени и стопы

Она дополняется более тонкой малоберцовой костью, расположенной с наружной стороны голеностопного сустава. Мышцы, прикрепленные к этим костям, управляют движением голеностопного сустава, плюсны и фаланг пальцев стопы. Голеностопный сустав двигается почти исключительно вперед и назад, но семь костей, составляющих предплюсну, расположены так, что стопа может совершать вращательные движения в плюснефаланговом и подтаранном суставах. Это позволяет каждой стопе поворачиваться наружу и внутрь, чтобы адаптироваться к беговой поверхности [3, 4].

С землей контактируют только три кости ступни. Пятку образует пяточная кость, которая с первой и пятой головками плюсны образует треугольник. Между этим подобием треножника расположен комплекс, состоящий из таранной, кубовидной, ладьевидной и трех клиновидных костей, которые расположены друг напротив друга так, что могут подниматься, образуя арку по длине каждой стопы совместно с пятью костями предплюсны. Они не только меняют положение стопы, чтобы приспособиться к поверхности под ногами, но и позволяют ей совершать движения в стороны. Кости предплюсны формируют верхнюю часть свода стопы и обеспечивают движения стопы наружу или внутрь. Это движение позволяет при беге или ходьбе использовать или внутреннюю, или наружную сторону стопы.

Сила голени, позволяющая осуществлять толчок, обеспечивается двумя мышцами, относящимися к задней группе (рис. 51). Глубокая камбаловидная мышца, соединяясь с икроножной, формирует ахиллово сухожилие, которое крепится к пяточной кости. Сокращение этих мышц обеспечивает разгибание стопы, а более глубокий слой мышц – ее сгибание. К числу этих глубоких мышц относятся длинный сгибатель пальцев, длинный сгибатель большого пальца стопы и задняя большеберцовая мышца.

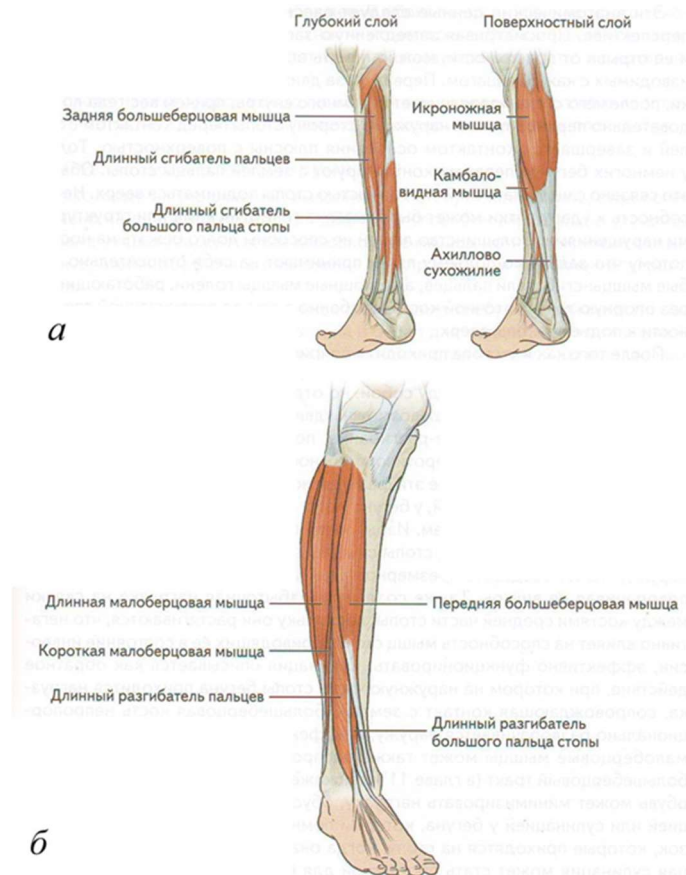


Рис. 51. Голень и стопа: *а* – вид сзади; *б* – вид спереди

Передняя группа мышц голени расположена между малоберцовой и большеберцовой костями. Она окружена относительно жесткой фиброзной оболочкой, заключающей в себе переднюю большеберцовую мышцу, длинный разгибатель пальцев и длинный разгибатель большого пальца стопы. Эти мышцы проходят через фронтальную часть голеностопного сустава и крепятся к костям плюсны, предплюсны и пальцев, позволяя поднимать стопу вверх. Им не приходится генерировать столько силы, сколько задней группе мышц голени, поэтому они менее развиты. Дополнительную латеральную устойчивость голеностопного сустава и тыльной части ноги обеспечивают малоберцовые мышцы, которые берут начало от малоберцовой кости и проходят по латеральной стороне голеностопного сустава, заканчиваясь с наружной стороны костей плюсны.

Очень большую силу генерирует ахиллово сухожилие. Его травма сопровождается сильной болью, поскольку эти ткани обильно снабжены нервными окончаниями. Травмированное ахиллово сухожилие очень долго заживает по причине плохого снабжения кровью. Примерно то же самое можно сказать и о подошвенной фасции, которая берет начало от пяточной кости и крепится к основанию костей плюсны. Она представляет собой жесткую полосу фиброзной ткани, самая слабая точка которой расположена у пятки. Если стопу рассматривать в двух измерениях изнутри, то можно увидеть, что подошвенная

фасция представляет собой горизонтальное основание треугольника, образованного костями плюсны и предплюсны.

Эти анатомические данные следует рассматривать в функциональной перспективе. Просматривая замедленную запись контакта стопы с землей и ее отрыва от поверхности, можно понять особенности движений, воспроизводимых с каждым шагом. Первая фаза движения называется ударом пятки, после чего стопа поворачивается немного внутрь, причем вес тела последовательно переносится на наружную сторону стопы перед контактом с землей и завершается контактом основания плюсны с поверхностью. Только у немногих бегунов первыми контактируют с землей пальцы стопы. Обычно это связано с недостаточной способностью стопы подниматься вверх. Неспособность к удару пятки может быть вызвана генетическими или структурными нарушениями. Большинство людей не способны долго бежать на носках, потому что задачу по подъему пятки принимают на себя относительно слабые мышцы-сгибатели пальцев, а не мощные мышцы голени, работающие через опорную точку пяточной кости, особенно в случае ограниченной способности к подъему стопы вверх.

После того как вся стопа приходит в соприкосновение с землей, движение продолжается в обратной последовательности: отрыв пятки, перекал по наружной стороне плюсны, толчок носком стопы. Во время этой фазы движения все мышцы сокращаются или расширяются в постоянном ритме, хотя и не одновременно.

Существует три связанных между собой, но отдельных движения. В подтаранном и голеностопном суставах возможны движения в трех плоскостях: отведение-приведение, сгибание-разгибание, поворот стопы наружу и внутрь. Супинация описывается как противоположное движение. Стопа каждой ноги с каждым шагом проходит все эти фазы движения. Когда пронация или супинация становится избыточной, у бегуна могут возникнуть проблемы, которые приведут к болям или травмам. Избыточная пронация, когда нога контактирует с землей плоско, а свод стопы смещается внутрь и пальцы обращаются наружу, может создавать чрезмерное давление на большеберцовую кость, поворачивая ее внутрь. Также создается избыточная нагрузка на связки между костями средней части стопы, поскольку они растягиваются, что негативно влияет на способность мышц стопы, приводящих ее в состояние инверсии, эффективно функционировать. Супинация описывается как обратное действие, при котором на наружную часть стопы бегуна приходится нагрузка, способствующая контакту с землей. Большеберцовая кость непропорционально разворачивается наружу, и эффект дополнительной нагрузки на малоберцовые мышцы может также распространяться и на подвздошно-большеберцовый

тракт. Из-за нагрузок, которые приходится на стопу, когда она слишком подвижна, избыточная супинация может стать проблемой для бегуна на длинные дистанции.

Еще одна анатомическая особенность – высокий ригидный свод стопы, как с избыточной супинацией, так и без нее, и уплощенный свод стопы, как с избыточной пронацией, так и без нее. В обоих этих случаях недостаток гибкости с высокой степенью вероятности может приводить к механическим недостаткам, которые не позволят бегунам развивать скорость, на которую они в потенциале способны.

Исходя из этого, пронация описывается как отведение, разгибание и поворот стопы внутрь, то есть как движение, совершаемое в трех плоскостях.

### **Рекомендации для проведения занятий**

Некоторые из упражнений, выполняемых стоя, можно делать, стоя попеременно на одной ноге. Этот тип движения способен значительно укрепить целевые мышцы, задействовав все основные мышцы ноги, в том числе самые слабые, чтобы обеспечить равновесие при правильном выполнении упражнения.

Упражнения, которые требуют устойчивости, задействуют мышцы средней части тела и бедер для поддержания правильной формы. Выполнение упражнений в положении стоя на одной ноге позволяет задействовать эти специфические мышцы, а также развить силу мышц средней части тела или, при большем количестве повторений, выносливость.

### **Упражнения для голени и ахиллова сухожилия**

И.п. – стоя на степ-платформе носком правой ноги, согнуть левую ногу в колене под углом 90°, руки с гантелями вниз (см. рис. 52).

1 – подъем на носке правой ноги; 2 – и.п.

Выполнить 15 раз на правую ногу, затем сменить ногу.

**Методические указания:** при выполнении упражнения удерживать стойку за счет напряжения брюшного пресса, ногу в колене полностью не выпрямлять.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* икроножная мышца, камбаловидная мышца.



Рис. 52. Подъем на носке правой ноги

*Дополнительные:* передняя большеберцовая мышца, короткая малоберцовая мышца, длинный сгибатель пальцев.

#### **Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* ахиллово сухожилие.

#### **Безопасность при выполнении**

Количество повторений ограничивается появлением характерных мышечных болей, сигнализирующих об усталости. Но до усталости следует работать только в том случае, если вы выполняете всего один подход. В среднем достаточно выполнить 1-3 подхода. Вес гантелей меняет эффект тренировки.

#### **Значимость мышц для бега**

Подъем на носке одной ноги должен стать основным упражнением программы силовой подготовки любого бегуна. Это многофункциональное упражнение легко выполнять, к тому же оно требует минимального снаряжения. Основной его целью является развитие силы, что позволяет предупреждать травмы. Оно также может использоваться для реабилитации после травм ахиллова сухожилия и мышц голени. Упражнение не следует выполнять, если бегун все еще переживает первоначальные последствия травмы, но после некоторого периода восстановления, ориентируясь на самочувствие или объективные данные, полученные с помощью МРТ, можно приступать к тренировке.

Привнесение эксцентрической (негативной) компоненты (удлинение мышцы) повышает значимость этого упражнения, направленного на укрепление ахиллова сухожилия и мышц голени. Эксцентрические движения очень эффективны, если мышцы сокращаются эксцентрически, они могут выдержать большую нагрузку. Существует предположение, утверждающее, что движения, сопровождающиеся эксцентрическими

сокращениями, развивают быстро переключающиеся мышечные волокна, поэтому благодаря им хорошо укрепляются мышцы.

И.п. – стоя на платформе, на плечах палка с подвешенными на ней пластиковыми бутылками с водой, ноги немного согнуты в коленях, верхняя часть тела прямая, брюшной пресс стабилизирует корпус.

1 – подъем на носках; 2 – и.п., полная растяжка задней группы мышц голени.

Повторить 10-12 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения акцент делать на задней группе мышц голени.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* икроножная мышца, камбаловидная мышца.

*Дополнительные:* передняя большеберцовая мышца, короткая малоберцовая мышца.

### **Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* ахиллово сухожилие.

### **Значимость мышц для бега**

Подъем на носках является еще одним упражнением, позволяющим укреплять комплекс задней группы мышц голени и ахиллово сухожилие. Акцент делается на икроножной мышце, которая составляет большую часть мышечного комплекса голени, однако упражнение задействует также и мелкие мышцы. Упражнение следует выполнять вместе с подъемом на носке одной ноги, чтобы эффективно проработать заднюю группу мышц голени. Его также можно делать независимо от других упражнений, когда задачей тренировки является выполнение по одному упражнению для каждой части тела.

Ахиллово сухожилие и мышцы голени принимают на себя основную часть амортизации удара при контакте пятки с беговой поверхностью. Если спортсмен использует не обычные кроссовки, а облегченные беговые туфли на низком каблуке, удар становится еще сильнее. Чтобы минимизировать ударную нагрузку и улучшить способность к толчку, все бегуны должны развивать силу мышц голени, включая в свою тренировочную программу соответствующие упражнения. Эти упражнения можно выполнять на любой стадии тренировочного цикла, с особым акцентом во время фазы тренировочных забегов, если тому не препятствуют травмы.

### **Подъем на носках сидя**

В ходе подъема на носках стоя и подъема на носках сидя прорабатываются одни и те же мышцы, отличаются же эти упражнения степенью проработки камбаловидных мышц. Выполняя упражнение в положении сидя, в меньшей степени задействуются икроножные мышцы и в большей степени – не такие крупные камбаловидные.

Укрепление камбаловидных мышц усиливает толчок от беговой поверхности. Укрепление и растяжка камбаловидных мышц помогают предупредить травмы ахиллова сухожилия, уменьшив дополнительное растяжение [11].

### Упражнение для стопы

И.п. – сидя на полу, ноги прямо, удерживать в руках концы натянутой резиновой ленты, закрепить ее среднюю часть на поверхности стопы в области плюсны (рис. 53).

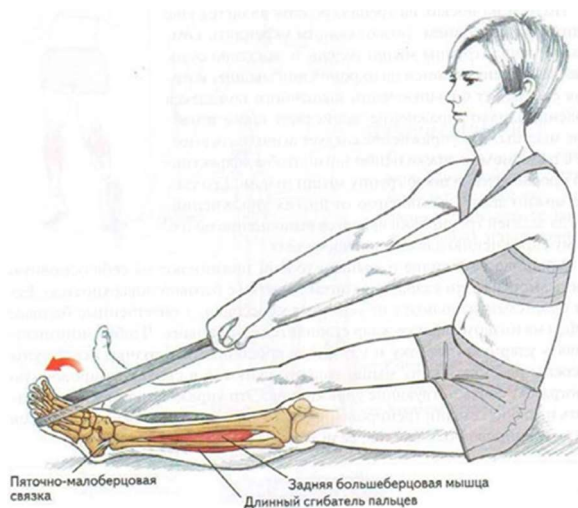


Рис. 53. Отведение носка с резиновой лентой

1 – носки вперед; 2-3 – удержать в этом положении 1-2 с; 4 – и.п.

Повторить 15-20 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения отвести носки максимально вперед, руки прямые.

#### Мышцы, участвующие в работе

*Основные:* задняя большеберцовая мышца, длинный сгибатель пальцев.

#### Мягкие ткани, участвующие в работе

*Основные:* задняя таранно-малоберцовая связка, пяточно-малоберцовая связка (рис. 54).



Рис. 54. Работающие мягкие ткани

## Значимость мышц для бега

Упражнение развивает силу и подвижность стопы и голеностопного сустава, позволяя предупреждать травмы, возможные при беге по неровной поверхности, а также помогает ноге эффективнее работать в фазе опоры (устойчивого положения).

Так как оно выполняется без отягощений, его можно делать ежедневно в качестве реабилитационного при растяжении связок голеностопного сустава или в качестве укрепляющего для повышения силы и гибкости. Поскольку можно задавать степень натяжения резиновой ленты, каждое повторение упражнения можно усложнять или упрощать. Акцент следует делать на плавное, без рывков, движение и достаточное натяжение ленты, которое легко регулируется, если тянуть на себя или отпустить ее концы.

И.п. – сидя на столе, свесить ноги, согнутые в коленях. Закрепить на середине правой стопы манжету, обеспечивающую достаточную нагрузку на голень, туловище держать прямо, руки вниз (рис. 55).

1 – поднять носок правой ноги; 2 – и.п.

Выполнить 10 раз каждой ногой.

**Методические указания:** при выполнении упражнения не качать ногами, чтобы помочь движению носков.



Рис. 55. Подъем носка с манжетой

## Безопасность при выполнении

Выполнять упражнение до появления ощущения усталости. Переместить отягощение на левую ногу и повторить упражнение. Скорость выполнения движения должна быть невысокой, но мышцы стопы и связки голени должны работать динамично.



## **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* передняя большеберцовая мышца.

## **Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* передняя таранно-малоберцовая связка, пяточно-малоберцовая связка, подошвенная связка (рис. 56).

## **Значимость мышц для бега**

Упражнение выполняется без отягощения, поэтому его можно делать ежедневно в качестве реабилитационного или укрепляющего для повышения силы и гибкости. В зависимости от целей можно менять вес отягощения. Например, больший вес с меньшим количеством повторений и подходов позволяет укреплять мышцы. Меньший вес позволяет выполнить большее число повторений и подходов, что развивает выносливость и гибкость.



Рис. 56. Работающие мягкие ткани

## **Подъем носка с резиновой лентой**

Подобно отведению носка, подъем носка также можно выполнять с резиновой лентой. Эти упражнения можно совместить и выполнять попеременно: сначала отводить носок, преодолевая натяжение ленты, затем, удерживая сопротивление, поднимать носок до тех пор, пока он не придет в положение, из которого его вновь можно отводить.

И.п. – сидя на скамье, голеностопные суставы выходят за край скамьи. Вытянуть носки ног и обвязать их резиновой лентой так, чтобы стопы находились на расстоянии примерно 15 см (рис. 57).

1 – повернуть стопы внутрь; 2-3 – максимально развести в стороны; зафиксировать положение на 3-5 с; 4 – и.п.

Выполнить 2 подхода по 15-20 раз.

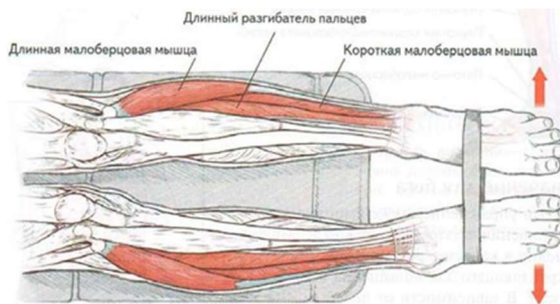


Рис. 57. Разведение стоп с резиновой лентой

**Методические указания:** при выполнении упражнения удерживать корпус, с опорой рук о скамью. Повтор упражнения через 3-5 секунд.

### Мышцы, участвующие в работе

*Основные:* длинная малоберцовая мышца, короткая малоберцовая мышца, длинный разгибатель пальцев (рис. 58).



Рис. 58. Прорабатываемые мышцы

### Значимость мышц для бега

Пронация является результатом движения в трех плоскостях, а не только в одной. Во время сгибания стопы эверсия (пронация + отведение) контролируется преимущественно длинной малоберцовой мышцей; во время разгибания стопы – короткой малоберцовой мышцей. Это упражнение выполняется в положении с вытянутым носком, поскольку так его легче выполнять, особенно спортсменам с избыточной пронацией. Бегуны с недостаточной пронацией также получают пользу от этого упражнения, поскольку, выполняя его, они совершают движение, которое нельзя назвать естественным для их стоп.

### 3.5. Упражнения для восстановления мышечных групп

И.п. – стоя правым боком к стене, скрестить ноги так, чтобы правая нога к стене находилась сзади, для равновесия опереться о стену правой рукой (рис. 59).

1 – наклон правым бедром к стене; 2 – и.п.

Повторить 12-15 раз в каждую сторону.



Рис. 59. Растяжка подвздошно-большеберцового тракта в положении стоя

**Методические указания:** при выполнении упражнения постараться коснуться стены, если это удастся (стопы не отрываются от пола), зафиксировать положение на 15-30 с.

И.п. – сидя на полу, вытянув левую ногу перед собой, правую ногу перенести через нее, согнув в колене и поставив ступню на пол.левой рукой упор в пол, правой рукой придерживать колено (рис. 60).

1-3 – колено потянуть вовнутрь, зафиксировать положение на 15-30 с; 4 – и.п.

Выполнить 5-6 раз, после чего поменять и.п.



Рис. 60. Растяжка подвздошно-большеберцового тракта в положении сидя

**Методические указания:** при выполнении упражнения стопу от пола не отрывать.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* большая ягодичная мышца, напрягатель широкой фасции.

#### **Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* подвздошно-большеберцовый тракт.

### **Значимость мышц для бега**

Закрепощенность подвздошно-большеберцового тракта обычно является результатом супинации. Инверсия стопы может вызывать закрепощенность подвздошно-большеберцового тракта и мышц голени, а также боли в колене.

Но бегуны, корректирующие избыточную пронацию с помощью ортопедических вкладок, зачастую создают недостаточную пронацию, что приводит к такой же травме. Выполнение растяжки подвздошно-большеберцового тракта в положении сидя и стоя поможет растянуть эту жесткую полосу мягкой ткани, предупреждая нежелательное трение о надмыщелок бедренной кости, расположенный в области коленного сустава. Эти упражнения можно выполнять несколько раз в день.

И.п. – стоя между двумя стенами, вытянуть руки в стороны на уровне плеч (рис. 61).

1 – согнуть правую ногу в колене под углом  $90^\circ$ ; 2-3 – глаза закрыть, зафиксировать положение на 15-30 с; 4 – и.п.

Выполнить 5-7 раз каждой ногой.

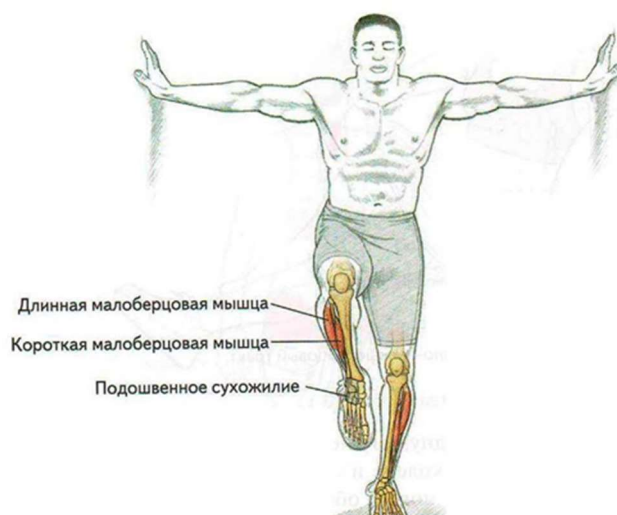


Рис. 61. Удержание равновесия для развития проприоцепции

**Методические указания:** при выполнении упражнения поднять колено так, чтобы угол между бедром и корпусом составил  $90^\circ$ .

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* длинная малоберцовая мышца, короткая малоберцовая мышца.

#### **Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* подошвенное сухожилие.

### **Значимость мышц для бега**

Упражнение имеет нейромышечную и физиологическую составляющие. Может потребоваться некоторое время, чтобы научиться удерживать равновесие, но даже в этом

процессе стопа и голень работают, потому что данное упражнение эффективно также и в том случае, если нельзя найти баланс мгновенно.

И.п. – стоя лицом к стене, упор руками в стену, правая нога сзади, стопа плотно прижата к полу, левая нога согнута в колене так, что стопа находится на одной вертикали с бедром (рис. 62).

1 – пяткой правой ноги давить в пол; 2-3 – удерживать статическую растяжку 15-30 с; 4 – и.п.

Выполнить 5-7 раз каждой ногой ноги.



Рис. 62. Растяжка голени стоя

**Методические указания:** можно делать повторения каждой ногой поочередно.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* икроножная мышца, камбаловидная мышца, задняя группа мышц бедра.

#### **Значимость мышц для бега**

Бегуны с нейтральной или избыточной пронацией часто испытывают закрепощенность мышц голени. Растяжка поможет избавиться от болей в хронически травмированных голених и позволит предупредить травмы данной области, поддерживая мышцы в тонусе.

И.п. – стоя ногами на платформе, пятки на весу, упор руками в стену (рис. 63).

1 – максимально подняться на головках костей плюсны обеих стоп; 2 – и.п.

Выполнить 10 раз.



Рис. 63. Подъем на носках стоя с эксцентрической составляющей:

*a* – исходное положение; *b* – конечное положение

**Методические указания:** при выполнении упражнения не опускать пятки слишком низко, это создаст чрезмерную нагрузку на ахиллово сухожилие, максимальный подъем фиксировать.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* икроножная мышца, камбаловидная мышца.

#### **Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* ахиллово сухожилие.

#### **Значимость мышц для бега**

Упражнение позволяет осуществлять концентрическое сокращение (укорочение) мышц голени во время подъема пятки, а также эксцентрическое сокращение (удлинение) мышц голени во время опускания пятки. Добавление эксцентрической (или негативной) составляющей движения повышает эффективность упражнения. Выявлено, что выполнение упражнений с эксцентрической составляющей сокращает время восстановления после травмы.

#### **Восстановление задней группы мышц бедра**

И.п. – сидя на скамье, правую прямую ногу положить на скамью, левую опустить на пол, ступню прижать к полу.

1 – наклон вперед от бедер, зафиксировать положение на 10 с; 2 – и.п.

Выполнить 4-6 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** упражнение способствует растяжению задней группы мышц бедра.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* задняя группа мышц бедра.

*Дополнительные:* грушевидные мышцы.

### **Безопасность при выполнении**

Не тянуться вперед руками или обхватывать щиколотку, это может ухудшить технику выполнения упражнения и сделать растяжку менее эффективной. Выпрямлять ногу в колене необязательно. Выполняя упражнение с прямой ногой, в большей степени растягиваются сухожилия, а не задняя группа мышц бедра.

### **Значимость мышц для бега**

Стиль бега с мелкими и частыми шагами, даже если спортсмен и показывает в среднем неплохие результаты, оказывается проигрышным при ускорении темпа бега или на финальном спринте. Упражнение помогает увеличить длину шага, не создавая чрезмерной нагрузки на поясницу и область крестца, что позволит дольше поддерживать длинный шаг, и в итоге улучшит беговые показатели.

### **Жим коленом сидя**

И.п. – сидя, упор спиной о стену, обе ноги немного согнуты в коленях, пятки на полу.

1 – медленно выпрямить правую ногу в колене; 2 – и.п.; 3 – медленно выпрямить левую ногу в колене; 4 – и.п.

Выполнить 4-6 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** при выполнении упражнения зафиксировать положение на 6 с.

### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* медиальная широкая мышца бедра.

*Дополнительные:* прямая мышца бедра, латеральная широкая мышца бедра, промежуточная широкая мышца бедра, задняя группа мышц бедра, икроножная мышца.

### **Мягкие ткани, участвующие в работе**

*Основные:* задняя крестообразная связка, связки тазобедренного сустава.

### **Безопасность при выполнении**

Правильно выполняя упражнение, ощущается растяжка с тыльной стороны колена, а на медиальной стороне колена можно увидеть мышечный бугор, который указывает на сокращение медиальной широкой мышцы бедра. Повторить упражнение 10 раз каждой ногой.

### **Значимость мышц для бега**

Боли в колене являются основной проблемой для многих бегунов. Упражнение укрепляет медиальную широкую мышцу бедра и отчасти противодействует латеральной тяге четырехглавой мышцы бедра, которая является причиной смещения и болей в области

коленной чашечки. Не существует иного неоперационного решения этой проблемы, кроме развития медиальной широкой мышцы бедра. Данное упражнение должно занять важное место в тренировочных занятиях каждого студента, занимающегося бегом.

И.п. – лежа на спине на полу, ноги вместе, руки вдоль туловища (рис. 64).

1 – поднять левую согнутую в колене ногу под углом  $90^\circ$ , зафиксировать положение на 15-30 с; 2 – и.п.

Выполнять не более 5 повторений 2-3 раза в день на каждую ногу.



Рис. 64. Упражнение «колени к груди»

**Методические указания:** при выполнении упражнения обхватить левую ногу, растяжка мышц поясницы и верхней части ягодиц, одновременно удерживать правое бедро прижатым к полу.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* задняя группа мышц бедра.

*Дополнительные:* грушевидная мышца; мышца, выпрямляющая позвоночник.

#### **Значимость мышц для бега**

Обычно бегуны игнорируют состояние поясницы – до тех пор, пока не появляются боли. Это и последующие упражнения помогут вернуть пояснице силу и гибкость, что особенно важно, если бегать вверх или вниз по склону.

Спина способна приспособиться к изменениям наклона поверхности; с увеличением подвижности в бедрах и пояснице длина шага также возрастет. Как и во всех упражнениях, растяжка должна вызывать ощущение некоторого дискомфорта, но не боли.

И.п. – стоя на расстоянии 45 см от стены, ноги на ширине плеч, носки обращены внутрь (рис. 65).





Рис. 65. Жим к стене

1-3 – прижать таз к стене (отрегулировать расстояние до стены и угол поворота носков так, чтобы обеспечить лучшую растяжку камбаловидной мышцы), зафиксировать положение на 15-30 с; 4 – и.п.

Выполнить 6-8 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения пятки от пола не отрывать.

**Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* камбаловидная мышца, икроножная мышца, передняя большеберцовая мышца.

**Значимость мышц для бега**

Рассеянные боли в передней части голени могут свидетельствовать о проблемах с мягкими тканями или большеберцовой костью, обусловленных избыточной пронацией, однако боли, связанные с мягкими тканями, зачастую связаны с горизонтальным отведением средней части стопы. Упражнение помогает предупредить мышечные боли в передних пучках икроножных мышц. Его можно делать несколько раз в день, упражнение дает эффект, если его выполнять регулярно.

И.п. – сидя на стуле со спинкой (рис. 66).

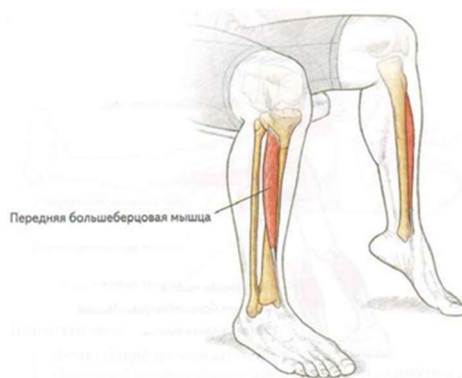


Рис. 66. Подъем пятки

1-3 – поднять пятку левой ноги, повернуть стопу, как балерина, зафиксировать положение на 15 с; 4 – и.п.

Повторить по 10 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** упражнение выполнять по 2-3 раза в день. И.п. – сидя на стуле со спинкой, закрепить резиновый бинт (рис. 67).

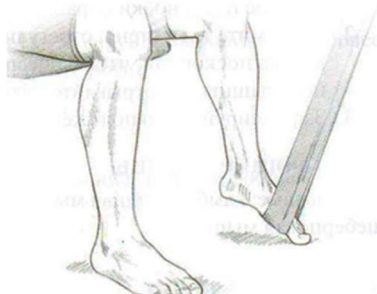


Рис. 67. Упражнение с резиновой лентой

1-3 – поднять пятку левой ноги, повернуть стопу, как балерина, с резиновым бинтом, зафиксировать положение на 15 с; 4 – и.п.

Повторить по 10 раз на каждую ногу.

**Методические указания:** упражнение выполнять по 2-3 раза в день.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* передняя большеберцовая мышца.

#### **Значимость мышц для бега**

Функция передней большеберцовой мышцы заключается в том, чтобы придавать гибкость голеностопному суставу и стопе. Мышца позволяет сохранять стабильность во время бега по неровной поверхности, поскольку она помогает регулировать положение стопы и соответственно всей ноги. Поэтому продолжительный бег по пересеченной местности активно задействует переднюю большеберцовую мышцу. Если эта мышца не тренирована, она быстро устает, и темп бега замедляется. Кроме того, увеличивается вероятность растяжения голеностопного сустава. Укрепив переднюю большеберцовую мышцу, можно ограничить пронацию и супинацию стопы, что имеет большое значение для исключения дальнейших проблем.

И.п. – лежа на полу, ноги согнуты в коленях, ступни прижаты к полу, руки на бедрах (рис. 68).



Рис. 68. Частичный подъем корпуса

1 – поднять руки на 5-10 см, медленно поднять голову и плечи от пола; 2-3 – потянуться руками к коленям и зафиксировать положение на 10 с; 4 – и.п.

Выполнить 5-8 раз.

**Методические указания:** при выполнении упражнения акцент делать на медленном выполнении движения.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* прямая мышца живота.

*Дополнительные:* поперечная мышца живота, наружная косая мышца живота, внутренняя косая мышца живота.

#### **Значимость мышц для бега**

Стабильность средней части тела имеет для бегуна огромное значение. Слабый брюшной пресс не способен поддерживать спину. Под весом верхней части тела корпус утрачивает вертикальное положение, движение во время бега затрудняется и становится болезненным. Упражнение помогает укрепить связь между брюшным прессом и нижними конечностями, а также делает подъем колена более мощным, что, в свою очередь, позволяет поддерживать достаточную длину бегового шага.

И.п. – упор сзади, сидя на полу, правая нога прямая, левая согнута в колене (рис. 69).

1-3 – отвести носок наружу и медленно поднять ногу на 15 см (удержать ее прямой), зафиксировать положение на 10 с; 4 – и.п.

Выполнить упражнение 10 раз за 10 секунд, затем тоже левой ногой.

**Методические указания:** при выполнении упражнения положение носка следует менять, чтобы равномерно проработать все мышцы передней группы. В первое время отягощения не использовать, по мере улучшения тренированности вес можно постепенно увеличивать до 5 кг.

#### **Мышцы, участвующие в работе**

*Основные:* медиальная широкая мышца бедра.

*Дополнительные:* прямая мышца бедра, промежуточная широкая мышца бедра, латеральная широкая мышца бедра.

### **Прорабатываемые мышцы**

*Основные:* большеберцовая коллатеральная связка, сухожилие надколенника.

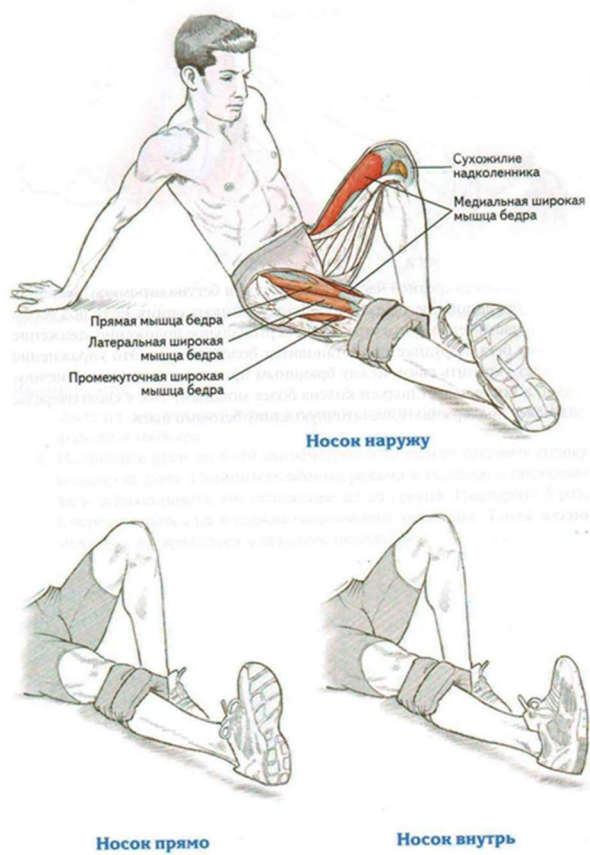


Рис. 69. Подъем прямой ноги сидя

### **Значимость мышц для бега**

Очень многие тренеры уделяют основное внимание общему развитию четырехглавых мышц, не понимая роли медиальной широкой мышцы бедра в предупреждении болей в коленном суставе. Упражнение является наиболее эффективным способом укрепления медиальной широкой мышцы бедра и предупреждения болей в колене.

## **Глава 4. ОБЩАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА**

Общая физическая подготовка является важным элементом занятий, т.к. она способствует предупреждению травм на занятиях с высокой ударной нагрузкой. Показательным примером таких упражнений является бег. Заменяв беговую тренировку на суше тренировкой в воде, возможно значительно снизить ударную нагрузку, сохранив при этом все преимущества аэробной тренировки сердечно-сосудистой системы. Включив в

программу силовых тренировок плиометрические упражнения, можно укрепить мышцы, что позволит лучше переносить нагрузки, сопровождающие долгие тренировочные забеги. Плиометрические упражнения также помогут восстановиться после травмы (если выполнять их в соответствующее время) и сделать бег более экономичным.

### **Бег в воде**

Большинство спортсменов знакомятся с бегом в воде в ходе реабилитационной программы после травмы, которая не позволяет им бегать по суше. Бег в воде является средством поддержания здоровья сердечно-сосудистой и сердечно-респираторной систем. Однако бег в воде может использоваться не только как инструмент реабилитации после травмы. Бег в воде, особенно в глубокой воде (БГВ), отлично предупреждает травмы, обусловленные длительными нагрузками и связанные с большим объемом аэробных тренировок. Кроме того, функционально бег в воде отличается от бега по суше, что расширяет физические возможности спортсмена.

Бег в мелкой воде (БМВ) является вполне приемлемой альтернативой БГВ, и польза этого упражнения в значительной степени определяется техникой и интенсивностью его выполнения. Поскольку БМВ требует удара о дно бассейна, он имеет ударную составляющую (хотя сила удара смягчается плотностью воды). Для студента, восстанавливающегося после травмы, бег в мелкой воде может быть травмоопасным. Вместе с тем овладеть равновесием и техникой выполнения упражнения проще при БМВ, так как в этом случае нога ставится привычным образом. Для центрирования тела используется меньше мышц, чем в БГВ, а также увеличивается период контакта ноги с поверхностью.

В ходе занятий при БГВ важно сохранять правильное положение тела (рис. 70). Глубина воды должна быть достаточной для того, чтобы над поверхностью воды оставались только верхняя часть плеч, шея и голова, бегун не должен полностью касаться дна бассейна ступней. У бегунов телесного жира меньше, чем у пловцов, что снижает их плавучесть. Поэтому необходимо использовать средство, поддерживающее это качество. Иначе положение тела изменится и большая нагрузка придется на верхнюю часть тела и руки, чтобы удержать тело на плаву.



Рис. 70. Правильное положение тела при беге в глубокой воде

Освоившись в воде, необходимо принять положение, сходное с тем, которое принимается, когда выполняется бег по суше. Держать голову прямо, немного наклониться вперед от поясницы, грудь вперед, плечи отведены назад. Согнуть руки в локтях под углом  $90^\circ$ , движение рук начинается от плеч. Кисти рук удерживать в нейтральном положении, ладони не сжимать, но держать более твердо, чем на суше, чтобы преодолевать сопротивление воды (см. рис. 71). Очень пригодится сила, нарабатанная такими упражнениями, как подъем на предплечье и обратный подъем на предплечье.



Рис. 71. Неправильное положение тела при беге в глубокой воде

Работа ног больше похожа на бег в высоком темпе, чем на аэробный бег, поскольку для преодоления сопротивления воды требуется достаточная сила. Бедро следует поднимать под углом примерно  $75^\circ$ . Затем нога почти полностью выпрямляется (без выключения в колене), сгибается, подтягивается практически к самой ягодице – и цикл повторяется для другой ноги.

В течение цикла бегового шага стопа меняет свое положение от нейтрального положения (вообразить себя стоящим на плоской поверхности) до полного сгибания. Это движение ноги способствует улучшению техники бега, а также повышает стабильность суставов и мышечную силу в результате преодоления сопротивления воды.

Так как бег осуществляется в неестественной для бегуна тренировочной среде и создается сопротивление движениям рук и ног, поначалу студенты используют

неправильную форму БГВ. В частности, часто загибают передней ногой вместо того, чтобы резко опускать ее вниз. Ошибка вызвана усталостью задней группы мышц бедра, наступающей из-за необходимости преодолевать сопротивление воды. В результате страдает техника выполнения движения. Чтобы исправить ошибку, при первом же появлении усталости следует отдохнуть. Не спешить, в противном случае только закрепится неправильная форма, но и не улучшится физическая подготовка [4].

Техника БГВ (см. рис. 70) напоминает технику бега по суше, это лучшая техника бега в глубокой воде. Альтернатива – бег с высоким подъемом колена, но все же она менее эффективна в плане отработки правильной техники. Она очень напоминает технику, используемую для работы на степпере. Сходство с бегом проявляется только на фазе подъема ноги, поэтому мышцы тренируются не совсем так, как требуется бегуну.

Бег в глубокой воде эффективен, так как подобен бегу по суше, позволяет повышать частоту сердцебиений. В связи со спецификой преодоления сопротивления воды он требует приложения большей силы, позволяя эффективнее укреплять мышцы и избегать травм, связанных с избыточной нагрузкой, характерных для бега по суше. В частности, бег в глубокой воде исключает ударную нагрузку, сопровождающую контакт стопы с землей во время бега по суше.

## **Глава 5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К НОРМАТИВАМ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВЛЕННОСТИ**

### **5.1. Самостоятельная подготовка к сдаче обязательных тестов оценки общей физической подготовленности**

#### **5.1.1 Тест на скоростно-силовую подготовленность (бег на 100 метров)**

Нормативы:

- у студенток нормативы в беге на 100 метров следующие: 15,7 сек - 5 баллов; 16,0 - 4; 17,0 - 3; 17,9 - 2; 18,7 - 1.

- студенты должны показать результаты в следующих пределах: 13,2 сек - 5 очков; 13,8 - 4; 14,0 - 3; 14,3 - 2; 14,6 - 1.

#### **5.1.2. Техника выполнения упражнения**

При анализе бега на 100 м. принято выделять следующие основные фазы:

- старт и стартовый разгон;
- бег по дистанции;
- финиширование.

Старт и стартовый разгон

Существует два вида старта: низкий и высокий. Экспериментальные данные показывают, что новичкам и спортсменам 2-го разряда лучше применять высокий старт.

Такая закономерность наблюдается до результата 11,4-11,6 с. и объясняется технической сложностью низкого старта. Поэтому следует ограничиться только овладением техникой высокого старта.

По команде «На старт» занимающийся подходит к стартовой линии, ставит сильнейшую (толчковую ногу) вплотную к линии, маховая нога располагается на 1,5-2 стопы назад на носок, расстояние между ними 15-20 см. Туловище выпрямлено, руки опущены, вес тела распределяется равномерно на обе ноги.

По команде «Внимание» вес тела переносится на впереди согнутую стоящую ногу, разноименная рука вперед. Проекция плеч находится за стартовой линией на расстоянии 5-8 см. Взгляд направлен вперед - вниз.

По команде «Марш» бегун мощно разгибает толчковую ногу и стремится максимально быстро вынести маховую ногу вперед с постановкой ее сверху вниз на дорожку. Руки работают максимально активно, плечевой пояс не закрепощен, кисти расслаблены. Стартовый разгон характеризуется постепенным увеличением длины шагов, уменьшением наклона туловища и приближением стоп к средней линии.

#### Бег по дистанции

Перед бегущим стоит задача удержать развитую горизонтальную скорость до финиша. Этому будет способствовать сохранение длины и частоты шагов.

Во время бега маховая нога ставится с носка спереди проекции общего центра тяжести тела (ОЦТТ) сверху вниз. Взаимодействие маховой ноги с грунтом называется передним толчком. Задний толчок выполняется мощным разгибанием бедра и сгибанием стопы. Голова держится прямо. Руки согнуты (угол сгибания в локтевых суставах примерно 90 град.).

При движении руки вперед кисть поднимается до уровня плеч. Назад рука отводится до «отказа» и угол сгибания в локтевом суставе увеличивается. Пальцы рук слегка согнуты.

#### Финиширование

Наклон туловища увеличивается. На последних метрах дистанции необходимо стремиться не потерять свободы движений и пробежать финиш без снижения скорости.

### **5.1.3. Методы самостоятельной тренировки**

- Повторный метод - повторное выполнение упражнений с около-предельной и предельной скоростью. Отдых продолжается до восстановления. Упражнения повторяются до тех пор, пока скорость не начнет снижаться.

- Переменный метод - когда пробегаются дистанции, например, с варьированием скорости и ускорения. Цель - исключить стабилизацию скорости («скоростной барьер»).



- Соревновательный метод - предполагает выполнение упражнений на быстроту в условиях соревнований. Эмоциональный подъем на соревнованиях способствует мобилизации на максимальные проявления быстроты, позволяет выйти на новый рубеж скорости.

#### **5.1.4. Средства тренировки быстроты**

Частоту движений, а вместе с ней и быстроту циклических движений развивают с помощью упражнений, которые можно выполнять с максимальной скоростью, а также с помощью скоростно-силовых упражнений для ациклических движений. При этом упражнения должны отвечать следующим требованиям:

- техника упражнений должна обеспечивать выполнение движений на предельных скоростях;

- упражнения должны быть хорошо освоены, чтобы не требовалось волевого усилия для их выполнения;

- продолжительность упражнений должна быть такой, чтобы скорость не снижалась вследствие утомления - 20-22 с.

Основным средством отработки бега по дистанции является бег с максимальной скоростью. Такой бег выполняется 5-6 раз по 30-40 метров. В тренировке можно чередовать бег в обычных, облегченных (с горки, угол 4-5 град.) и затрудненных (в горку или с сопротивлением) условиях.

Для развития скоростной выносливости рекомендуется пробегать большую дистанцию (120-150 м), когда очередная пробежка начинается при пульсе 120 уд/мин.

Для тренировки в беге на 100 метров следует использовать кроссы (6 км, 30 мин), повторный бег на отрезках 200 м в 3/4 силы. Спортивные игры (баскетбол, футбол) также приносят пользу в развитии быстроты.

Можно рекомендовать и упрощенную методику, обеспечивающую минимально необходимый уровень подготовленности:

- повторный метод - в одном занятии 3-4 пробегания по 20-30 метров с максимальной скоростью и интервалами отдыха для восстановления пульса до 110-120 уд/мин;

- переменный метод - пробегание 2-х отрезков по 30 метров с максимальной скоростью и последующим переходом на спокойный бег 150--200 метров. Выполняется 3-4 подхода.

Для ощутимого сдвига в подготовленности такие тренировки рекомендуется проводить 3-4 раза в неделю.

#### **5.1.5. Подготовка и сдача контрольного норматива**

При подготовке к сдаче бега на 100 метров следует учитывать общие требования по питанию при занятиях физическими упражнениями:

1. По времени - прием пищи не менее чем за 2-3 часа.

2. По составу - не есть тяжелой пищи (мясо, яйца, масло, молочные продукты, жирную, долго перевариваемую пищу).

Не рекомендуется выходить на старт с переполненным желудком.

Непосредственно перед сдачей норматива необходимо провести разминку с использованием специальных упражнений:

1. Бег с высоким подниманием бедра.

2. Бег с «захлестыванием» голени назад.

3. Семенящий бег.

4. Прыжки с ноги на ногу (шаги).

5. Бег в упоре стоя у гимнастической стенки.

6. Бег с ускорением с высокого старта с подачей стартовых команд (2-3 ускорения по 10-15 метров).

Разминка заканчивается за 10 минут до старта.

Непосредственно перед стартом нельзя отдыхать лежа, сидя, необходимо постоянно находиться в движении (прохаживаться, выполнять упражнения на растяжку). Частота сердечных сокращений непосредственно перед стартом должна быть 110 – 120 уд/мин.

Психологическая подготовка заключается в мысленном «прокручивании» в голове этапов преодоления дистанции: старта, стартового разбега, бега по дистанции, финиширования с концентрацией внимания на технике выполнения каждого этапа.

При выполнении теста не разрешается:

- наступать на линию старта (стартовая линия входит в дистанцию);

- перебегать на соседние дорожки.

## **5.2. Тест на силовую подготовленность для женщин**

(поднимание (сед) и опускание туловища из положения лежа, ноги закреплены, руки за головой)

Нормативы: 60 раз - 5 баллов, 50 - 4, 40 - 3, 30 - 2, 20 - 1.

Это упражнение используется для оценки развития мышц живота (брюшного пресса).

О мышцах брюшного пресса следует сказать особо. Эта группа мышц участвует в большинстве движений. Она создает хороший «мышечный корсет», охватывающий брюшную полость и способствующий нормальному функционированию внутренних органов, что положительно влияет на состояние здоровья.

### **5.2.1. Техника выполнения упражнения**

И.п. (исходное положение) – лежа на спине, ноги согнуты в коленях, стопы прижаты к полу, руки в замок за головой, локти разведены.

Это силовое упражнение состоит из 4-х фаз:

- поднимание туловища;
- фиксация его в вертикальном положении;
- опускание;
- пауза в горизонтальном положении.

Голова держится прямо, локти в стороны, дыхание ритмично.

### **5.3. Тест на силовую подготовленность для мужчин (подтягивание на перекладине)**

Учебной программой по физической культуре предусмотрено тестирование студентов для определения уровня их силового развития. Нормативы следующие: 15 раз - 5 баллов, 12 - 4, 9 - 3, 7 - 2, 5 - 1;

#### **5.3.1. Техника выполнения упражнения**

Каждый цикл подтягивания в висе на перекладине включает:

- исходное положение - вис на вытянутых руках хватом сверху (большими пальцами внутрь);
- подъем до пересечения подбородком линии перекладины;
- опускание в исходное положение.

При выполнении теста разрешается сгибание, разведение ног, запрещаются рывковые движения туловищем и руками, хлестовые движения ногами. Выполнение засчитывается только при полном выпрямлении рук в локтевых суставах.

Наиболее экономично подтягивание при хвате рук на ширине плеч. Если кисти рук расположены ближе друг к другу, то положение тела становится менее устойчивым и отклонения придется компенсировать за счет дополнительных мышечных усилий, что будет увеличивать энерготраты и снижать результат. Возрастают энерготраты и при широком хвате (шире плеч). Это связано с тем, что для фиксации лопаток при широком хвате требуется большая, чем при хвате на ширине плеч, сила мышц, приближающих лопатки к позвоночному столбу.

Опускание в вис (в исходное положение) после подтягивания должно выполняться спокойно. Дыхание не задерживается.

#### **5.3.2. Методы развития силы**

На практике распространены следующие методы силовой подготовки:

- метод максимальных усилий;

- метод повторных усилий;
- метод динамических усилий.

Согласно методу максимальных усилий выполнение упражнений организуется таким образом, чтобы занимающийся смог подтянуться 1-3 раза в одном подходе (при условии, что он способен самостоятельно подтянуться как минимум 2-3 раза). Такое достигается за счет применения дополнительного внешнего отягощения. Делается 5-6 подходов с перерывами 2-4 минуты.

По методу повторных усилий подтягивания в одном подходе выполняются до «отказа». Если занимающийся имеет максимальный индивидуальный показатель 10-15 подтягиваний и более, то следует применять отягощение весом 30-70% от максимального. Например, занимающийся может подтянуться 1 раз с максимальным отягощением 10 кг. Значит, для тренировки по методу повторных усилий следует подобрать вес отягощения 3-7 кг. Выполняется 3-6 подходов с отдыхом между ними 2-4 мин.

Разнообразить упражнения можно, применяя метод динамических усилий. Если занимающийся легко выполняет 10-15 подтягиваний, то следует применять отягощения до 30% от максимального. В одном подходе 10-15 повторений. Темп - максимально быстрый. Всего 3-6 подходов. Во время отдыха следует добиваться наиболее полного восстановления, чтобы в следующем подходе выполнить упражнение без существенной потери скорости.

Сравнивая динамический и статический методы развития силы, необходимо отметить следующее:

- При динамическом режиме работы мышц происходит достаточное кровоснабжение. Мышца функционирует как насос - при расслаблении наполняется кровью и получает кислород и питательные вещества.

- Во время статического усилия мышца постоянно напряжена и непрерывно давит на кровеносные сосуды. В результате она не получает кислород и питательные вещества. Это ограничивает продолжительность работы мышц.

#### **5.4. Тест на общую выносливость - бег 2000 и 3000 метров**

Нормативы:

- студентки - бег 2000 метров - 10 мин.15 сек. - 5 баллов; 10.50 - 4; 11.15 - 3; 11.50 - 2; 12.15 - 1;
- студенты - бег 3000 метров - 12.00 - 5; 12.35 - 4; 13.10 - 3; 13.50 - 2; 14.00 - 1.

##### **5.4.1. Техника бега на длинные дистанции**

Бег на средние и длинные дистанции начинается с высокого старта. По команде «На старт!» бегун ставит у линии более сильную ногу, а другую отставляет назад на носок (на

30 – 50 см), немного сгибает ноги, туловище наклоняет вперед и тяжесть тела переносит на впереди стоящую ногу. По команде «Марш!» бегун начинает бег, делая первые шаги в большом наклоне, который постепенно уменьшается. Длина шагов увеличивается, бег ускоряется, бегун набирает скорость и в короткое время переходит к свободному бегу на дистанции. Бег на дистанции. Во время бега на дистанции туловище вертикально или слегка наклонено вперед (5-7°). Небольшой наклон туловища вперед позволяет лучше использовать силы отталкивания и быстрее продвигаться вперед. Слишком большой наклон приводит к «падающему» бегу, при котором труднее выносить вперед согнутую ногу, в связи с чем уменьшается длина шага, а следовательно, и скорость бега. Кроме того, при большом наклоне постоянно напряжены мышцы, удерживающие туловище от увеличивающегося наклона. Отсутствие наклона ухудшает условия отталкивания, однако улучшает возможность выноса вперед согнутой в коленном суставе свободной ноги. При правильном положении туловища создаются благоприятные условия для работы мышц и внутренних органов. Наклон туловища у бегунов изменяется в пределах 2-3°: увеличивается к моменту отталкивания и уменьшается в полетной фазе. Положение головы существенно влияет на положение туловища. Надо держать голову прямо и смотреть вперед. В фазе отталкивания таз подается вперед, что является важной особенностью техники бега на длинные дистанции и позволяет полнее использовать силу реакции опоры. В технике бега на длинные дистанции важнее всего движения ног. Нога, немного согнутая, ставится на грунт упруго и эластично с передней части стопы, а затем касается его всей стопой. Постановка ноги на переднюю часть стопы позволяет эффективнее использовать эластические свойства мышц голени, активно участвующие в отталкивании. Следы стоп на дорожке у бегунов находятся на одной линии, носки почти не разворачиваются в стороны. Эффективное отталкивание характеризуется выпрямлением ноги во всех суставах. Угол отталкивания в беге на средние дистанции примерно равен 50-55°. При правильном отталкивании таз подан вперед, голень маховой согнутой ноги параллельна бедру толчковой ноги. Быстрый вынос маховой ноги вперед облегчает отталкивание. Бегуны на длинные дистанции меньше поднимают бедро маховой ноги вверх, чем бегуны на средние и короткие дистанции. Длина шага на длинные дистанции не постоянна даже у одних и тех же бегунов. Колебания зависят от наступившего утомления, неравномерности пробегания отдельных участков дистанции, качества беговой дорожки, ветра и состояния бегуна. Обычно шаг с сильнейшей ноги на несколько сантиметров больше, чем шаг со слабой ноги. Длина шага равна 160 – 215 см. Повышение скорости бега за счет увеличения длины шага ограничено, так как слишком длинный шаг требует очень больших затрат сил. Кроме того, длина шага в основном зависит от индивидуальных данных бегуна. Поэтому скорость

бега повышают за счет увеличения частоты шагов, которая зависит от тренированности бегуна. Движения плечевого пояса и рук связаны с движениями ног. Выполнять их надо легко, не напряженно. Это во многом зависит от умения расслаблять мышцы плечевого пояса. Движения рук помогают бегуну сохранять равновесие тела во время бега. Амплитуда движения рук зависит от скорости бега. Кисти при движении вперед не пересекают средней линии тела и поднимаются примерно до уровня ключицы. При движении рук назад кисти доходят до задней линии туловища (если смотреть на бегуна сбоку). Руки двигаются маятникообразно, пальцы рук свободно сложены, предплечья не напряжены, плечи не поднимаются вверх. При финишировании, длина которого зависит от дистанции и оставшихся сил бегуна, движения руками делаются быстрее, наклон тела увеличивается, а угол отталкивания уменьшается. Спортсмен переходит на скоростной бег, при котором скорость повышается главным образом за счет увеличения частоты шагов. К концу дистанции вследствие утомления некоторые бегуны наклоняют туловище назад. Такое положение туловища не способствует эффективности бега, так как усилия отталкивания направляются больше вверх. Техника бега на вираже имеет некоторые особенности: туловище немного наклонено влево, к бровке, правая рука движется несколько размашистей левой, причем правый локоть дальше отводится в сторону, а правая стопа ставится с некоторым поворотом внутрь. Ритм дыхания зависит от индивидуальных особенностей и скорости бега (с увеличением скорости бега увеличивается и частота дыхания). Бегун не должен задерживать дыхание. Дышать следует одновременно через нос и полуоткрытый рот, при этом важно следить за полным выдохом.

#### **5.4.2. Возможные ошибки и осложнения в ходе проведения самостоятельных тренировок**

В некоторых случаях тренировка может стать причиной различных осложнений, включая травмы опорно-двигательного аппарата.

Основная причина травматизма опорно-двигательного аппарата - перенапряжение. Слишком быстрое увеличение тренировочных нагрузок является чрезмерным для детренированных мышц, связок и суставов. К дополнительным факторам, способствующим повреждению опорно-двигательного аппарата, можно отнести:

- бег по твердому грунту;
- избыточную массу тела;
- обувь, не пригодную для бега;
- грубые ошибки в технике.

Следовательно, меры по профилактике травм должны быть направлены на устранение или ослабление воздействия этих факторов:

- Во время кроссового бега часто болит в правом боку (печень), либо в левом боку (селезенка). Печень важный орган в жизнедеятельности нашего организма (синтез жиров и углеводов, обмен белков и витаминов) является кровяным депо. Так вот в результате переполнения кровью печени возникают колики. Глубокое дыхание снижает приток крови к правому предсердию, уменьшает болевые ощущения. Бег не надо прекращать, необходимо снизить скорость передвижения и стараться дышать глубже.

- В процессе тренировок после значительного перерыва (отдыха) или при резком увеличении нагрузок могут появляться боли в мышцах, как правило, на другой день. Во время физической работы в организме образуются продукты распада, часть которых выводится из организма через мочевыделительную систему, а другая часть, в том числе, молочная кислота задерживается в мышечных тканях. Чтобы избавиться от нее, необходимо мышцу непосредственно после физической нагрузки заставить растянуться (с помощью упражнений на растяжение), а на следующий день выполнять какую-либо физическую работу, т.е. сокращаться. Эти меры помогут ускорить вывод молочной кислоты из мышц. Боли могут длиться несколько дней и если не предпринимать никаких мер, мышца теряет эластичность, становится твердой. В этом случае могут помочь: массаж, банные процедуры, применение согревающих мазей и гелей.

- При выполнении напряженной физической работы длительное время, например, кроссовый бег, возникают такие состояния, которые получили название «мертвая точка» и «второе дыхание». Уже через некоторое время бега в организме начинаются изменения, которые заставляют нас прекратить мышечную деятельность. Такое временное снижение работоспособности получило название «мертвая точка». Механизм возникновения такого состояния недостаточно изучен. Предполагают, что он обусловлен временным нарушением деятельности скелетных мышц и органов, обеспечивающих доставку кислорода в организм. Эти нарушения приводят к изменениям в работе нервных центров, что, в свою очередь, приводит к нарушениям в работе отдельных физиологических систем. Время возникновения и продолжительность этого состояния зависит от многих факторов, в частности от длительности и интенсивности физической нагрузки (например, при беге на 5-10 км и более возникает через 5-6 мин бега), от тренированности. Чем лучше тренирован человек, тем позже возникает это состояние и протекает менее тяжело (почти незаметно). Преодоление этого состояния требует значительного волевого усилия. В процессе проведения учебных и тренировочных занятий необходимо приучать себя преодолевать это неприятное ощущение, возникающее при кислородной недостаточности и накоплении продуктов кислотного распада при обмене веществ. Наступлению «второго дыхания» способствуют усиленные дыхательные упражнения, глубокие выдохи,

освобождающие организм от накопившейся углекислоты, что способствует наступлению кислотно-щелочного баланса в организме. Преодолеть состояние «мертвой точки» можно, если снизить интенсивность физической нагрузки, но это нежелательно, т.к. не будет адаптации организма к такого рода деятельности.

- При занятиях физическими упражнениями могут возникнуть отклонения в деятельности сердца - учащенное сердцебиение. Оно может быть следствием стенокардии, ссоры, неурядицы в быту, семье, боязни, страха, дистрофий миокарда. Возникновение болей - сигнал опасности, в этих случаях необходимо прекратить занятия и обратиться к врачу.

- Существует состояние, называемое гравитационным шоком. Часто возникает при внезапной остановки после относительно интенсивного бега (чаще после финиша) в связи с прекращением действия «мышечного насоса». Большая масса крови застаивается в раскрытых капиллярах и венах мышц нижних конечностей, на периферии. Возникает анемия (обескровливание) мозга, недостаточное снабжение его кислородом. Появляется резкое побледнение, слабость, головокружение, тошнота, потеря сознания, исчезновение пульса. Пострадавшего необходимо уложить на спину, поднять вверх ноги (выше головы), обеспечив отток венозной крови к сердцу, улучшив снабжение головного мозга кислородом, поднести к носу ватку смоченную нашатырным спиртом. Основная профилактика гравитационного шока - исключение внезапной остановки, постепенное замедление бега.

- Гипогликемическое состояние - следствие недостаточного количества в организме сахара, нарушение углеводного обмена в результате длительной физической нагрузки. Ощущается сильный голод, головокружение, иногда потеря сознания. Профилактика – легко усваиваемые углеводы до начала длительной физической нагрузки (немного сахара, меда и т.п.) или специальные питательные смеси.

- Солнечный и тепловой удары - возникают при длительной работе под действием солнечных лучей на обнаженную голову или тело. Тепловой удар - остро развивающееся болезненное состояние, обусловленное перегреванием организма. Его признаками являются: усталость, головная боль, слабость, боли в ногах, спине, тошнота, шум в ушах, повышение температуры, потемнение в глазах, ухудшение дыхания (прерывистое), потеря сознания.

Первая помощь: пострадавшего поместить в прохладное место, снять одежду, приподнять голову, охладить область сердца (холодный компресс), напоить. Дать понюхать нашатырный спирт, сердечные средства. При нарушении дыхания сделать искусственное дыхание.



При обморожениях на охлажденном участке вначале чувствуется легкое пощипывание, затем чувствительность теряется. Особенно поддаются ему пальцы рук, ног, нос, уши. Если произошло обморожение нельзя растирать пораженные места снегом, это только повредит кожу. Необходимо поместить обмороженный участок в тепло не растирать, а согревать при комнатной температуре. Обмороженные места смазать жиром (вазелином).

## **Глава 6. АКТУАЛЬНОСТЬ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕНИЯ УРОВНЯ ГОТОВНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ЗАЧЕТНЫМ ТРЕБОВАНИЯМ, НА ОСНОВЕ УПРАВЛЯЕМОЙ АДАПТАЦИИ К СМЕНЕ ВИДОВ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ**

Выполнение контрольных нормативов требует от студента мобилизации всех своих сил и здесь следует принимать во внимание и учитывать все что может повлиять на конечный результат, в том числе характер учебно-познавательной деятельности, предшествующий зачетному занятию.

В течение учебного дня, занимаясь то одним видом учебно-познавательной деятельности, то другим, обучающиеся должны переключаться с выполнения одного вида задач на другой, и каждый раз проходит какое-то время, пока будет достигнуто оптимальное соответствие состояния личности и организма обучающегося к условиям проведения определенного вида учебно-познавательной деятельности – период адаптации.

Можно говорить о том, что к каждому учебному занятию кроме практической и теоретической подготовленности, определенного уровня умений и навыков по предмету, от студентов требуется некоторая психофизиологическая и физическая готовность. В этом случае под ней подразумевается готовность психических, физиологических и обеспечивающих двигательные действия систем человека к выполнению определенного рода учебно-познавательной деятельности.

Многообразие видов учебно-познавательной деятельности определяет многообразие психофизиологических и физических состояний обучающихся. Под психофизиологическим и физическим состоянием предлагается понимать целостные психофизиологические и физические реакции обучаемого на внешние и внутренние факторы, направленные на достижение полезного результата.

Параметром психофизиологического и физического состояния является величина, характеризующая какую-либо из реакций организма обучаемого на внешние или внутренние факторы.

Уровень психофизиологической и физической готовности к предстоящему занятию, зависит от индивидуальных особенностей личности обучаемого и определенных внешних

факторов, воздействующих на него на предыдущем занятии. Эти факторы можно разделить на три вида:

- санитарно-гигиенические условия;
- временные условия;
- организация предыдущего вида учебно-познавательной деятельности.

К санитарно-гигиеническим условиям относятся температура и влажность воздуха, освещенность, содержание кислорода в воздухе, эргономичность учебных мест, запыленность, загазованность места проведения занятия. К временным условиям относятся: время дня, день недели, месяц семестра, время года, а также время, прошедшее после последнего приема пищи.

Вышеперечисленные факторы оказывают существенное влияние на психофизиологическую и физическую готовность. Вторым фактором заставляет учитывать объективные закономерности колебания уровня работоспособности студентов в течение учебного дня, учебной недели, семестра. Как известно, в течение учебного дня объективно наблюдается два периода подъема работоспособности: один в первой половине дня, второй – в послеобеденное время. Каждому периоду характерны три фазы: вработывание, повышенная работоспособность, снижение работоспособности. В течение недели те же фазы распределяются следующим образом: понедельник, вторник – вработывание; среда, четверг – повышенная работоспособность; пятница, суббота – снижение работоспособности. Исследования показали, что и семестровый цикл разделяется на те же фазы.

Влияние фактора «организация предыдущего вида учебно-познавательной деятельности» в данном случае рассматривается, как влияние особенностей психофизиологической и физической деятельности обучаемых на предыдущем занятии на их психофизиологическую и физическую готовность к последующему виду учебно-познавательной деятельности, в нашем случае к зачету. Психофизиологическая деятельность характеризуется напряженностью и характером мыслительной деятельности, а также нервно-эмоциональной напряженностью учебной деятельности.

Физическая деятельность характеризуется интенсивностью, видом мышечных действий и работой обеспечивающих эту деятельность физиологических систем. Мышечные действия могут носить статический и динамический характер: поддержание рабочей позы «сидя», «стоя», выполнение чертежной, письменной работы, настройка и обслуживание аппаратуры, выполнение гимнастических упражнений и т.п. При этом используются, в той или иной степени, основные физические качества: сила, быстрота, выносливость, ловкость.

Влияние всех вышеперечисленных факторов преломляется через индивидуальные особенности личности, такие как типологические свойства нервной системы и темперамента, возрастные, морфологические, биохимические особенности организма, уровень физической подготовленности, состояние здоровья и другие, выливаясь, в итоге, в психофизиологическую и физическую готовность студента к предстоящему виду учебно-познавательной деятельности.

Следует отметить, что особенно явно эти проблемы проявляются при чередовании занятий по общенаучным, общеинженерным и специальным дисциплинам с практическими занятиями по физической культуре. В этом случае происходит смена видов деятельности, в одном из которых доминирующую роль играет умственная работа с пониженной двигательной активностью и сохранением определенной рабочей позы, в другом – разнообразная активная двигательная деятельность с сопровождающей ее мыслительной работой.

Методика проведения занятий предусматривает проведение вводной (подготовительной) части для организации обучающихся, приведения их в состояние готовности к решению задач основной части, в нашем случае к сдаче контрольного норматива, и заключительной – для подведения итогов, приведения организма в относительно спокойное состояние (для занятий по физической культуре), но при проведении этих частей занятий, как правило, не учитывается характер предыдущей и последующей деятельности студентов. Неучтение этого факта отрицательно влияет на скорость адаптации к виду учебно-познавательной деятельности, что особенно наглядно проявляется при чередовании практических занятий по физической культуре с занятиями по общеинженерным и специальным дисциплинам.

Складывается противоречие между имеющим место в практике обучения несоответствием уровня психофизиологической и физической готовности обучающихся, объективно складывающейся в ходе проведения предшествующего занятия, видом учебно-познавательной деятельности последующего занятия и неучтением этого факта в общепринятых методиках проведения вводных (подготовительных) и заключительных частей занятий, в том числе, по дисциплине «физическая культура»

Это противоречие можно устранить, обеспечив управление процессом адаптации студентов к смене видов учебно-познавательной деятельности в ходе проведения вводных (подготовительных) и заключительных частей занятий.

Для каждой темы занятия по физической культуре в зависимости от педагогической ситуации, складывающейся из контекстной пары - вид предшествующего и вид последующего занятия, можно установить наиболее предпочтительные адаптирующие,

предметно-ориентированные варианты проведения подготовительной и заключительной частей, оперативно поддерживающие достаточно высокий уровень психофизиологической и физической готовности при чередовании этих занятий с занятиями по другим дисциплинам.

Видится актуальной задача управления процессом адаптации обучаемых к смене видов учебно-познавательной деятельности с целью сокращения времени вработывания и повышения эффективности как занятий, так и сдачи контрольных нормативов. Для решения этой задачи представляется наиболее целесообразным использовать проведение подготовительной (разминки) и заключительной частей занятий с адаптирующим, предметно-ориентированным содержанием.

В этом случае под управлением адаптацией следует понимать процесс педагогического воздействия с целью установления оптимального соответствия личности обучаемого и условий осуществления учебной деятельности в ходе осуществления им познавательной деятельности, которое позволяет индивидууму более эффективно удовлетворять актуальные познавательные потребности, и реализовывать связанные с ними значимые цели.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Амосов Н. М. Моя система здоровья / Н. М. Амосов. Киев: Здоров'я, 1997.
2. Амосов Н. М. Энциклопедия Амосова. Алгоритм здоровья / Н. М. Амосов. М.: ООО «Издательство АСТ»; Донецк: «Сталкер», 2004.
3. Жилкин А. И. Легкая атлетика: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / А. И. Жилкин, В. С. Кузьмин, Е. В. Сидорчук. М.: Издательский центр «Академия», 2003.
4. Пулео Д. Анатомия бега / Д. Пулео, П. Милрой; перевод с англ. В. М. Баженова. Минск: «Попурри», 2011.
5. Легкая атлетика / под ред. Н. Г. Озолина, В. И. Воронкина, Ю. Н. Примакова. М., 1989.
6. Макаров А. Н. Легкая атлетика / А. Н. Макаров, В. З. Сирис, В. П. Теннов. М., 1987.
7. Гайс И. А. Оздоровительная ходьба / И. А. Гайс. М.: Советский спорт, 1990.
8. Грачев О. К. Физическая культура: учеб. пособие / под ред. Е. В. Харламова. М.: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д.: Издательский центр «МарТ», 2005.
9. Холодов Ж. К. Теория и методика физического воспитания и спорта: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. 2-е изд., испр. и доп. / Ж. К. Холодов, В. С. Кузнецов. М.: Издательский центр «Академия», 2003.
10. Ингерлейб М. Б. Анатомия физических упражнений / М. Б. Ингерлейб. 2-е изд. Ростов н/Д.: Феникс, 2009.
11. Андерсон В. Растяжка для каждого / В. Андерсон, Дж. Андерсон; пер. с англ. О. Г. Белошеева. Минск: ООО «Попурри», 2002.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

Проректор по учебно-методическому комплексу С.А. Упоров



## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

### Б1.О.11 ПСИХОЛОГИЯ КОМАНДНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И САМОРАЗВИТИЯ

Направление подготовки

*13.03.02 Электроэнергетика и электротехника*

Направленность (профиль)

*Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий*

Одобрена на заседании кафедры

Рассмотрена методической комиссией

Управления персоналом  
(название кафедры)  
Зав.кафедрой  
Ветош  
(подпись)  
Ветошкина Т.А.  
(Фамилия И.О.)  
Протокол № 1 от 16.09.2021  
(Дата)

Горно-механического факультета  
(название факультета)  
Председатель  
Осипов  
(подпись)  
Осипов П.А.  
(Фамилия И.О.)  
Протокол № 2 от 12.10.2021  
(Дата)

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Методические рекомендации по написанию реферата	5
2 Методические рекомендации по написанию эссе	13
3 Методические рекомендации по написанию реферата статьи	17
4 Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий	23
5 Методические рекомендации по составлению тестовых заданий	27
6 Требования к написанию и оформлению доклада	29
7 Методические рекомендации к опросу	34
8 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям	36
9 Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям	38
1 Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и 0 зачетов	40
Заключение	43
Список использованных источников	44

## ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);
- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.



Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

## 1. Методические рекомендации по написанию реферата

**Реферат** - письменная работа объемом 10-18 печатных страниц, выполняемая студентом в течение длительного срока (от одной недели до месяца).

Реферат (от лат. referre - докладывать, сообщать) - краткое точное изложение сущности какого-либо вопроса, темы на основе одной или нескольких книг, монографий или других первоисточников. Реферат должен содержать основные фактические сведения и выводы по рассматриваемой теме<sup>1</sup>.

Выполнение и защита реферата призваны дать аспиранту возможность всесторонне изучить интересующую его проблему и вооружить его навыками научного и творческого подхода к решению различных задач в исследуемой области.

Основными задачами выполнения и защиты реферата являются развитие у студентов общекультурных и профессиональных компетенций, среди них:

- формирование навыков аналитической работы с литературными источниками разных видов;
- развитие умения критически оценивать и обобщать теоретические положения;
- стимулирование навыков самостоятельной аналитической работы;
- углубление, систематизация и интеграция теоретических знаний и практических навыков по соответствующему направлению высшего образования;
- презентация навыков публичной дискуссии.

### *Структура и содержание реферата*

Подготовка материалов и написание реферата - один из самых трудоемких процессов. Работа над рефератом сводится к следующим этапам.

1. Выбор темы реферата.
2. Предварительная проработка литературы по теме и составление «рабочего» плана реферата.
3. Конкретизация необходимых элементов реферата.
4. Сбор и систематизация литературы.
5. Написание основной части реферата.
6. Написание введения и заключения.
7. Представление реферата преподавателю.
8. Защита реферата.

### *Выбор темы реферата*

Перечень тем реферата определяется преподавателем, который ведет дисциплину. Вместе с тем, аспиранту предоставляется право самостоятельной формулировки темы реферата с необходимым обоснованием целесообразности ее разработки и согласованием с преподавателем. Рассмотрев инициативную тему реферата студента, преподаватель имеет право ее отклонить, аргументировав свое решение, или, при согласии студента, переформулировать тему.

При выборе темы нужно иметь в виду следующее:

1. Тема должна быть актуальной, то есть затрагивать важные в данное время проблемы общественно-политической, экономической или культурной жизни общества.
2. Не следует формулировать тему очень широко: вычленение из широкой проблемы узкого, специфического вопроса помогает проработать тему глубже.

---

<sup>1</sup> Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml>

3. Какой бы интересной и актуальной ни была тема, прежде всего, следует удостовериться, что для ее раскрытия имеются необходимые материалы.

4. Тема должна открывать возможности для проведения самостоятельного исследования, в котором можно будет показать умение собирать, накапливать, обобщать и анализировать факты и документы.

5. После предварительной самостоятельной формулировки темы необходимо проконсультироваться с преподавателем с целью ее возможного уточнения и углубления.

### ***Предварительная проработка литературы по теме и составление «рабочего» плана реферата***

Подбор литературы следует начинать сразу же после выбора темы реферата. Первоначально с целью обзора имеющихся источников целесообразно обратиться к электронным ресурсам в сети Интернет и, в частности, к электронным информационным ресурсам УГГУ: благодаря оперативности и мобильности такого источника информации, не потратив много времени, можно создать общее представление о предмете исследования, выделить основные рубрики (главы, параграфы, проблемные модули) будущего курсовой работы. При подборе литературы следует также обращаться к предметно-тематическим каталогам и библиографическим справочникам библиотеки УГГУ, публичных библиотек города.

Предварительное ознакомление с источниками следует расценивать как первый этап работы над рефератом. Для облегчения дальнейшей работы необходимо тщательно фиксировать все просмотренные ресурсы (даже если кажется, что тот или иной источник непригоден для использования в работе над рефератом, впоследствии он может пригодиться, и тогда его не придется искать).

Результатом предварительного анализа источников является рабочий план, представляющий собой черновой набросок исследования, который в дальнейшем обрастает конкретными чертами. Форма рабочего плана допускает определенную степень произвольности. Первоначальный вариант плана должен отражать основную идею работы. При его составлении следует определить содержание отдельных глав и дать им соответствующее название; продумать содержание каждой главы и наметить в виде параграфов последовательность вопросов, которые будут в них рассмотрены. В реферате может быть две или три главы - в зависимости от выбранной проблемы, а также тех целей и задач исследования.

Работа над предварительным планом необходима, поскольку она дает возможность еще до начала написания реферата выявить логические неточности, информационные накладки, повторы, неверную последовательность глав и параграфов, неудачные формулировки выделенных частей или даже реферата в целом.

Рабочий план реферата разрабатывается студентом самостоятельно и может согласовываться с преподавателем.

### ***Конкретизация необходимых элементов реферата***

Реферат должен иметь четко определенные цель и задачи, объект, предмет и методы исследования. Их необходимо сформулировать до начала непосредственной работы над текстом.

Цель реферата представляет собой формулировку результата исследовательской деятельности и путей его достижения с помощью определенных средств. Учитывайте, что у работы может быть только одна цель.

Задачи конкретизируют цель, в реферате целесообразно выделить три-четыре задачи. Задачи - это теоретические и практические результаты, которые должны быть получены в реферате. Постановку задач следует делать как можно более тщательно, т.к. их

решение составляет содержание разделов (подпунктов, параграфов) реферата. В качестве задач может выступать либо решение подпроблем, вытекающих из общей проблемы, либо задачи анализа, обобщения, обоснования, разработки отдельных аспектов проблемы, ведущие к формулировке возможных направлений ее решения.

Объект исследования - процесс или явление, порождающие проблемную ситуацию и избранные для изучения.

Предмет исследования - все то, что находится в границах объекта исследования в определенном аспекте рассмотрения.

Методы исследования, используемые в реферате, зависят от поставленных цели и задач, а также от специфики объекта изучения. Это могут быть методы системного анализа, математические и статистические методы, сравнения, обобщения, экспертных оценок, теоретического анализа и т.д.

Впоследствии формулировка цели, задач, объекта, предмета и методов исследования составят основу Введения к реферату.

### ***Сбор и систематизация литературы***

Основные источники, использование которых возможно и необходимо в реферате, следующие:

- учебники, рекомендованные Министерством образования и науки РФ;
- электронные ресурсы УГГУ на русском и иностранном языках;
- статьи в специализированных и научных журналах;
- диссертации и монографии по изучаемой теме;
- инструктивные материалы и законодательные акты (только последних изданий);
- данные эмпирических и прикладных исследований (статистические данные, качественные интервью и т.д.)
- материалы интернет-сайтов.

Систематизацию получаемой информации следует проводить по основным разделам реферата, предусмотренным планом. При изучении литературы не стоит стремиться освоить всю информацию, заключенную в ней, а следует отбирать только ту, которая имеет непосредственное отношение к теме работы. Критерием оценки прочитанного является возможность его использования в реферате.

Сбор фактического материала - один из наиболее ответственных этапов подготовки реферата. От того, насколько правильно и полно собран фактический материал, во многом зависит своевременное и качественное написание работы. Поэтому, прежде чем приступить к сбору материала, аспиранту необходимо тщательно продумать, какой именно фактический материал необходим для реферата и составить, по возможности, специальный план его сбора и анализа. После того, как изучена и систематизирована отобранная по теме литература, а также собран и обработан фактический материал, возможны некоторые изменения в первоначальном варианте формулировки темы и в плане реферата.

### ***Написание основной части реферата***

Изложение материала должно быть последовательным и логичным. Общая логика написания параграфа сводится к стандартной логической схеме «Тезис - Доказательство - Вывод» (количество таких цепочек в параграфе, как правило, ограничивается тремя - пятью доказанными тезисами).

Все разделы реферата должны быть связаны между собой. Особое внимание следует обращать на логические переходы от одной главы к другой, от параграфа к параграфу, а внутри параграфа - от вопроса к вопросу.

Использование цитат в тексте необходимо для того, чтобы без искажений передать мысль автора первоисточника, для идентификации взглядов при сопоставлении различных

точек зрения и т.д. Отталкиваясь от содержания цитат, необходимо создать систему убедительных доказательств, важных для объективной характеристики изучаемого вопроса. Цитаты также могут использоваться и для подтверждения отдельных положений работы.

Число используемых цитат должно определяться потребностями разработки темы. Цитатами не следует злоупотреблять, их обилие может восприниматься как выражение слабости собственной позиции автора. Оптимальный объем цитаты - одно-два, максимум три предложения. Если цитируемый текст имеет больший объем, его следует заменять аналитическим пересказом.

Во всех случаях употребления цитат или пересказа мысли автора необходимо делать точную ссылку на источник с указанием страницы.

Авторский текст (собственные мысли) должен быть передан в научном стиле. Научный стиль предполагает изложение информации от первого лица множественного числа («мы» вместо «я»). Его стоит обозначить хорошо известными маркерами: «По нашему мнению», «С нашей точки зрения», «Исходя из этого мы можем заключить, что...» и т.п. или безличными предложениями: «необходимо подчеркнуть, что...», «важно обратить внимание на тот факт, что...», «следует отметить.» и т.д.

Отдельные положения реферата должны быть иллюстрированы цифровыми данными из справочников, монографий и других литературных источников, при необходимости оформленными в справочные или аналитические таблицы, диаграммы, графики. При составлении аналитических таблиц, диаграмм, графиков используемые исходные данные выносятся в приложение, а в тексте приводятся результаты расчетов отдельных показателей (если аналитическая таблица по размеру превышает одну страницу, ее целиком следует перенести в приложение). В тексте, анализирующем или комментирующем таблицу, не следует пересказывать ее содержание, а уместно формулировать основной вывод, к которому подводят табличные данные, или вводить дополнительные показатели, более отчетливо характеризующие то или иное явление или его отдельные стороны. Все материалы, не являющиеся необходимыми для решения поставленной в работе задачи, также выносятся в приложение.

### ***Написание введения и заключения***

Введение и заключение - очень важные части реферата. Они должны быть тщательно проработаны, выверены логически, стилистически, орфографически и пунктуационно.

Структурно введение состоит из нескольких логических элементов. Во введении в обязательном порядке обосновываются:

- актуальность работы (необходимо аргументировать, в силу чего именно эта проблема значима для исследования);
- характеристика степени разработанности темы (краткий обзор имеющейся научной литературы по рассматриваемому вопросу, призванный показать знакомство студента со специальной литературой, его умение систематизировать источники, критически их рассматривать, выделять существенное, оценивать ранее сделанное другими исследователями, определять главное в современном состоянии изученности темы);
- цель и задачи работы;
- объект и предмет исследования;
- методы исследования;
- теоретическая база исследования (систематизация основных источников, которые использованы для написания своей работы);
- структура работы (название глав работы и их краткая характеристика).

По объему введение занимает 1,5-2 страницы текста, напечатанного в соответствии с техническими требованиями, определенными преподавателем.

Заключение содержит краткую формулировку результатов, полученных в ходе работы, указание на проблемы практического характера, которые были выявлены в процессе исследования, а также рекомендации относительно их устранения. В заключении возможно повторение тех выводов, которые были сделаны по главам. Объем заключения - 1 - 3 страницы печатного текста.

### ***Представление реферата преподавателю***

Окончательный вариант текста реферата необходимо распечатать и вставить в папку-скоросшиватель. Законченный и оформленный в соответствии с техническими требованиями реферат подписывается студентом и представляется в распечатанном и в электронном виде в срок, обозначенный преподавателем.

Перед сдачей реферата аспирант проверяет его в системе «Антиплагиат» (<http://www.antiplagiat.ru/>), пишет заявление о самостоятельном характере работы, где указывает процент авторского текста, полученный в результате тестирования реферата в данной системе. Информацию, полученную в результате тестирования реферата в данной системе (с указанием процента авторского текста), аспирант в печатном виде предоставляет преподавателю вместе с окончательным вариантом текста реферата, который не подлежит доработке или замене.

### ***Защита реферата***

При подготовке реферата к защите (если она предусмотрена) следует:

1. Составить план выступления, в котором отразить актуальность темы, самостоятельный характер работы, главные выводы и/или предложения, их краткое обоснование и практическое и практическое значение - с тем, чтобы в течение 3 - 5 минут представить достоинства выполненного исследования.

2. Подготовить иллюстративный материал: схемы, таблицы, графики и др. наглядную информацию для использования во время защиты. Конкретный вариант наглядного представления результатов определяется форматом процедуры защиты реферата.

### ***Критерии оценивания реферата***

*Критерии оценивания реферата:* новизна текста, степень раскрытия сущности вопроса, соблюдение требований к оформлению.

*Новизна текста* – обоснование актуальности темы; новизна и самостоятельность в постановке проблемы, формулирование нового аспекта известной проблемы; умение работать с литературой, систематизировать и структурировать материал; наличие авторской позиции, самостоятельная интерпретация описываемых в реферате фактов и проблем – 4 балла.

*Степень раскрытия сущности вопроса* - соответствие содержания доклада его теме; полнота и глубина знаний по теме; умение обобщать, делать выводы, сопоставлять различные точки зрения по вопросу (проблеме); оценка использованной литературы (использование современной научной литературы) – 4 балла.

*Соблюдение требований к оформлению* - правильность оформления ссылок на источники, списка использованных источников; грамотное изложение текста (орфографическая, пунктуационная, стилистическая культура); владение терминологией; корректность цитирования – 4 балла.

*Критерии оценивания публичного выступления (защита реферата):* логичность построения выступления; грамотность речи и владение профессиональной терминологией; обоснованность выводов; умение отвечать на вопросы; поведение при защите работы (манера говорить, отстаивать свою точку зрения, привлекать внимание к важным моментам в докладе или ответах на вопросы и т.д.) соблюдение требований к объёму доклада – 10 баллов.

*Критерии оценивания презентации:* дизайн и мультимедиа – эффекты, содержание – 4 балла.

Всего – 25 баллов.

#### **Оценка «зачтено»**

Оценка «зачтено» – реферат полностью соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 23-25 баллов.

*Критерии оценивания реферата:* актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, присутствует новизна и самостоятельность в постановке проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, широкий диапазон и качество (уровень) используемого информационного пространства (привлечены различные источники научной информации), прослеживается наличие авторской позиции и самостоятельной интерпретации описываемых в реферате фактов и проблем.

*Степень раскрытия сущности вопроса* - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована полнота и глубина знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены альтернативные взгляды на рассматриваемую проблему и обосновано сбалансированное заключение; представлен критический анализ использованной литературы (использование современной научной литературы).

*Соблюдение требований к оформлению* – текст оформлен в соответствии с методическими требованиями и ГОСТом, в работе соблюдены правила русской орфографии и пунктуации, выдержана стилистическая культура научного текста, четкое и полное определение рассматриваемых понятий (категорий), приводятся соответствующие примеры в строгом соответствии с рассматриваемой проблемой, соблюдена корректность при цитировании источников.

*Критерии оценивания презентации:* цвет фона гармонирует с цветом текста, всё отлично читается, использовано 3 цвета шрифта, все страницы выдержаны в едином стиле, гиперссылки выделены и имеют разное оформление до и после посещения кадра, анимация присутствует только в тех местах, где она уместна и усиливает эффект восприятия текстовой части информации, звуковой фон соответствует единой концепции и усиливает эффект восприятия текстовой части информации, размер шрифта оптимальный, все ссылки работают, содержание является строго научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) усиливают эффект восприятия текстовой части информации, орфографические, пунктуационные, стилистические ошибки отсутствуют, наборы числовых данных проиллюстрированы графиками и диаграммами в наиболее адекватной форме, информация является актуальной и современной, ключевые слова в тексте выделены.

*Критерии оценивания публичного выступления:* выступление логично построено, выводы аргументированы, свободное владение профессиональной терминологией, в речи отсутствуют орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает полные и исчерпывающие ответы на вопросы, соблюдены этические нормы поведения при защите работы, владеет различными способами привлечения и удержания внимания и интереса аудитории к сообщению, соблюдены требования к объёму доклада.

Оценка «зачтено» - реферат в основном соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 18-22 баллов.

*Критерии оценивания реферата:* актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, представлен достаточный диапазон используемого информационного

пространства (привлечены несколько источников научной информации), прослеживается наличие авторской позиции в реферате при отборе фактов и проблем.

*Степень раскрытия сущности вопроса* - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована достаточная осведомленность знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены 2-3 взгляда на рассматриваемую проблему и обосновано заключение; представлен критический обзор использованной литературы (использование современной научной литературы).

*Соблюдение требований к оформлению* – текст оформлен в соответствии с методическими требованиями и ГОСТом, в работе имеются незначительные ошибки правил русской орфографии и пунктуации, выдержана стилистическая культура научного текста, четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), приводятся соответствующие примеры в строгом соответствии с рассматриваемой проблемой, соблюдена корректность при цитировании источников.

*Критерии оценивания презентации:* цвет фона хорошо соответствует цвету текста, всё можно прочесть, использовано 3 цвета шрифта, 1-2 страницы имеют свой стиль оформления, отличный от общего, гиперссылки выделены и имеют разное оформление до и после посещения кадра, анимация присутствует только в тех местах, где она уместна, звуковой фон соответствует единой концепции и привлекает внимание зрителей в нужных местах - именно к информации, размер шрифта оптимальный, все ссылки работают, содержание в целом является научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) соответствуют тексту, орфографические, пунктуационные, стилистические ошибки практически отсутствуют, наборы числовых данных проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация является актуальной и современной, ключевые слова в тексте выделены

*Критерии оценивания публичного выступления* : выступление логично построено, выводы аргументированы, испытывает незначительные затруднения при использовании профессиональной терминологии, в речи допускает в незначительном количестве орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает полные и исчерпывающие ответы на вопросы, соблюдены этические нормы поведения при защите работы, владеет ограниченным набором способов привлечения внимания аудитории к сообщению, соблюдены требования к объёму доклада.

Оценка «зачтено» - реферат частично соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 13-17 баллов.

*Критерии оценивания реферата:* актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, представлен достаточный диапазон используемого информационного пространства (привлечены несколько источников научной информации), прослеживается наличие авторской позиции в реферате при отборе фактов и проблем.

*Степень раскрытия сущности вопроса* - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована достаточная осведомленность знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены 2-3 взгляда на рассматриваемую проблему и обосновано заключение; представлен критический обзор использованной литературы (использование современной научной литературы).

*Соблюдение требований к оформлению* – оформление текста частично не соответствует методическими требованиями и ГОСТу, в работе имеются ошибки правил русской орфографии и пунктуации, в целом выдержана стилистическая культура научного текста, четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), частично не соблюдена корректность при цитировании источников.

*Критерии оценивания презентации:* цвет фона плохо соответствует цвету текста, использовано более 4 цветов шрифта, некоторые страницы имеют свой стиль оформления, гиперссылки выделены, анимация дозирована, звуковой фон не соответствует единой концепции, но не носит отвлекающий характер, размер шрифта средний (соответственно,



объём информации слишком большой — кадр несколько перегружен), ссылки работают, содержание включает в себя элементы научности, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) в определенных случаях соответствуют тексту, есть орфографические, пунктуационные, стилистические ошибки, наборы числовых данных чаще всего проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация является актуальной и современной ключевые слова в тексте, чаще всего, выделены.

*Критерии оценивания публичного выступления:* в выступлении нарушено логическое построение, выводы не аргументированы, испытывает затруднения при использовании профессиональной терминологии, в речи допускает орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает краткие ответы на вопросы, в целом соблюдены этические нормы поведения при защите работы, соблюдены требования к объёму доклада.

#### **Оценка «не зачтено»**

Оценка «не зачтено» - реферат не соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 0-12 баллов.

*Критерии оценивания реферата:* актуальность темы не обоснована, не сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал не систематизирован, ограниченный диапазон используемого информационного пространства (привлечен 1 источник научной информации), отсутствует авторская позиция в реферате.

*Степень раскрытия сущности вопроса* - содержание реферата не соответствует теме, не продемонстрирована осведомленность знаний по теме, отсутствует личная оценка (вывод), представлен 1 позиция рассмотрения проблемы, заключение не обосновано, отсутствует критический обзор использованной литературы.

*Соблюдение требований к оформлению* – оформление текста не соответствует методическими требованиями и ГОСТу, в работе выполнена с ошибками правил русской орфографии и пунктуации, не выдержана стилистическая культура научного текста, отсутствует четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), не соблюдена корректность при цитировании источников.

*Критерии оценивания презентации:* цвет фона не соответствует цвету текста, использовано более 5 цветов шрифта, каждая страница имеет свой стиль оформления, гиперссылки не выделены, анимация отсутствует (или же презентация перегружена анимацией), звуковой фон не соответствует единой концепции, носит отвлекающий характер, слишком мелкий шрифт (соответственно, объём информации слишком велик — кадр перегружен), не работают отдельные ссылки, содержание не является научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) не соответствуют тексту, много орфографических, пунктуационных, стилистических ошибок, наборы числовых данных не проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация не представляется актуальной и современной, ключевые слова в тексте не выделены

*Критерии оценивания публичного выступления:* отказывается от защиты или в выступлении нарушено логическое построение, отсутствуют выводы, не использует профессиональную терминологию, в речи допускает значительном количестве орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, не отвечает на вопросы, нарушает этические нормы поведения при защите работы, не соблюдены требования к объёму доклада.

## 2. Методические рекомендации по написанию эссе

*Эссе* - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем (тема может быть предложена и студентом, но обязательно должна быть согласована с преподавателем). Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

### *Построение эссе*

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

### *Структура эссе*

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);
2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

При работе над Введением могут помочь ответы на следующие вопросы: «Надо ли давать определения терминам, прозвучавшим в теме эссе?», «Почему тема, которую я раскрываю, является важной в настоящий момент?», «Какие понятия будут вовлечены в мои рассуждения по теме?», «Могу ли я разделить тему на несколько более мелких подтем?».

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершенно необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить. Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

### ***Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе***

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

*Тезис* - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

### ***Требования к фактическим данным и другим источникам***

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедиться в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например,

стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

### ***Как подготовить и написать эссе?***

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

*Планирование* - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

*Цель* должна определять действия.

*Идеи*, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

*Аналогии* - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

*Ассоциации* - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

*Предположения* - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

*Рассуждения* - формулировка и доказательство мнений.

*Аргументация* - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

*Суждение* - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

*Доводы* - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники.* Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

*Качество текста* складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

*Мысль* - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

*Внятность* - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

*Грамотность* отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

*Корректность* — это стиль написанного. Стиль определяется жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

### 3. Методические рекомендации по написанию реферата статьи

Реферирование представляет собой интеллектуальный творческий процесс, включающий осмысление, аналитико-синтетическое преобразование информации и создание нового документа - реферата, обладающего специфической языково-стилистической формой.

**Рефератом статьи** (далее - реферат) называется текст, передающий основную информацию подлинника в свернутом виде и составленный в результате ее смысловой переработки<sup>2</sup>.

Основными функциями рефератов являются следующие: информативная, поисковая, индикативная, справочная, сигнальная, адресная, коммуникативная.

*Информативная функция.* Поскольку реферат является кратким изложением основного содержания первичного документа, главная его задача состоит в том, чтобы передавать фактографическую информацию.

Отсюда информативность является наиболее существенной и отличительной чертой реферата.

*Поисковая и справочная функции.* Как средство передачи информации реферат нередко заменяет чтение первичного документа. Обращаясь к рефератам, пользователь осуществляет по ним непосредственный поиск информации, причем информации фактографической. В этом проявляется поисковая функция реферата, а также функция справочная, поскольку извлекаемая из реферата информация во многом представляет справочный интерес.

*Индикативная функция.* Реферат должен характеризовать оригинальный материал не только содержательно, но и описательно. Путем описания обычно даются дополнительные характеристики первичного материала: его вид (книга, статья), наличие в нем иллюстраций и т.д.

Кроме того, в реферате иногда приходится ограничиваться лишь названием или перечислением отдельных вопросов содержания. Это еще одно свойство реферата, которое принято называть индикативностью.

*Адресная функция.* Точным библиографическим описанием первичного документа одновременно достигается то, что реферат способен выполнять адресную функцию, без чего бессмысленен документальный информационный поиск.

*Сигнальная функция.* Эта функция реферата проявляется, когда осуществляется оперативное информирование с помощью авторских рефератов о планах выпуска литературы, а также о существовании неопубликованных, в том числе депонированных работ.

Диапазон использования рефератов очень широк. Они применяются как в индивидуальном, так и в коллективном информационном обеспечении, проводимом в интересах научно-исследовательских работ, учебного процесса и т.д. Они же являются средством международного обмена информацией и выполняют научно-коммуникативные функции в интернациональном масштабе.

Являясь наиболее экономным средством ознакомления с первоисточником, реферат должен отразить все существенные моменты последнего и особо выделить основную мысль автора. Многообразные функции реферата в системе научных коммуникаций можно объединить в следующие основные группы: информативные, поисковые, коммуникативные. Поскольку реферат передает в сжатом виде текст первоисточника, он позволяет специалисту либо получить релевантную информацию, либо сделать вывод о том, что обращаться к первоисточнику нет необходимости.

Существует три основных способа изложения информации в реферате.

---

<sup>2</sup> Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5

*Экстрагирование* - представление информации первоисточника в реферате. Эта методика достаточно проста: референт отмечает предложения, которые затем полностью или с незначительным перефразированием переносятся в реферат-экстракт.

*Перефразирование* - наиболее распространенный способ реферативного изложения. Здесь имеет место частичное текстуальное совпадение с первоисточником. Перефразирование предполагает не использование значительной части сведений оригинала, а перестройку его смысловой и синтаксической структуры. Перестройка текста достигается за счет таких операций, как замещение (одни фрагменты текста заменяются другими), совмещения (объединяются несколько предложений в одно) и обобщение.

*Интерпретация* - это способ реферативного изложения, когда содержание первоисточника может раскрываться либо в той же последовательности, либо на основе обобщенного представления о нем. Разновидностью интерпретированных рефератов могут быть авторефераты диссертаций, тезисы докладов научных конференций и совещаний.

Для качественной подготовки реферата необходимо владеть основными приемами анализа и синтеза, знать основные требования, предъявляемые к рефератам, их структурные и функциональные особенности.

Процесс реферирования делится на пять основных этапов:

1. Определение способа охвата первоисточника, который в данном конкретном случае наиболее целесообразен, для реферирования (общее, фрагментное, аспектное и т.д.).
2. Беглое ознакомительное чтение, когда референт решает вопрос о научно-практической значимости и информационной новизне первоисточника. Анализ его вида позволяет осуществить выбор аспектной схемы изложения реферата.
3. Конструирование текста реферата, которое осуществляется с использованием приемов перефразирования, обобщения, абстрагирования и т.д. Очень редко предложения или фрагменты оригинала используются без изменения. Запись полученных в результате синтеза конструкций осуществляется в последовательности, соответствующей разработанной схеме или плану.
4. Критический анализ полученного текста с точки зрения потребителя реферата.
5. Оформление и редактирование, которые являются заключительным этапом подготовки реферата.

Все, что в первичном документе не заслуживает внимания потребителя реферата, должно быть опущено. Так, в реферат не включаются:

- общие выводы, не вытекающие из полученных результатов;
- информация, не понятная без обращения к первоисточнику;
- общеизвестные сведения;
- второстепенные детали, избыточные рассуждения;
- исторические справки;
- детальные описания экспериментов и методик;
- сведения о ранее опубликованных документах и т. д.

Приемы составления реферата позволяют обеспечить соблюдение основных методических принципов реферирования: адекватности, информативности, краткости и достоверности.

Хотя реферат по содержанию зависит от первоисточника, он представляет собой новый, самостоятельный документ. Общими требованиями к языку реферата являются точность, краткость, ясность, доступность.

По своим языковым и стилистическим средствам реферат отличается от первоисточника, поскольку референт использует иные термины и строит предложения в соответствии со стилем реферата. Наряду с сообщением могут использоваться перифразы. Вместе с тем в ряде случаев стилистика реферата может совпадать с первоисточником, что особенно характерно для расширенных рефератов.

Изложение реферата должно обеспечивать наибольшую семантическую адекватность, семантическую эквивалентность, краткость и логическую последовательность. Для этого

необходимы определенные лексические и грамматические средства. Адекватность и эквивалентность достигаются за счет правильного употребления терминов, краткость - за счет экономной структуры предложений и использования терминологической лексики.

Быстрое и адекватное восприятие реферата обеспечивается употреблением простых законченных предложений, имеющих правильную грамматическую форму. Громоздкие предложения затрудняют понимание реферата, поэтому сложные предложения, как правило, расчленяются на ряд простых при сохранении логических взаимоотношений между ними путем замены соединительных слов, например, местоимениями.

Широко используются неопределенно-личные предложения без подлежащего. Они концентрируют внимание читающего только на факте, усиливая тем самым информационно-справочную значимость реферата.

Реферату, как одному из жанров научного стиля, присущи те же семантико-структурные особенности, что и научному стилю в целом: объективность, однозначность, логичность изложения, безличная манера повествования, широкое использование научных терминов, абстрактной лексики и т.д. В то же время этот жанр имеет и свою специфику стиля: фактографичность (констатация фактов), обобщенно-отвлеченный характер изложения, предельная краткость, подчеркнутая логичность, стандартизация языкового выражения.

Рефераты делятся на информативные (реферат-конспект), индикативные, указательные (реферат-резюме) и обзорные (реферат-обзор)<sup>3</sup>. В основу их классификации положена степень аналитико-синтетической переработки источника.

*Информативные рефераты* включают в себя изложение (в обобщенном виде) всех основных проблем, изложенных в первоисточнике, их аргументацию, основные результаты и выводы, имеющие теоретическую и практическую ценность.

*Индикативные рефераты* указывают только на основные моменты содержания первоисточника. Их также называют реферативной аннотацией.

*Научные рефераты* отражают смысловую сторону образно-тематического содержания. В его основе лежат такие мыслительные операции, как обобщение и абстракция.

*Реферат-резюме* направлен на перечисление основных проблем источника без содержания доказательств.

Реферат, независимо от его типа, имеет единую структуру:

- название реферируемой работы (или выходные данные);
- композиция реферируемой работы;
- главная мысль реферируемого материала;
- изложение содержания;
- выводы автора по реферируемому материалу.

Обычно в самом первоисточнике главная мысль становится ясной лишь после прочтения всего материала, в реферате же с нее начинается изложение содержания, она предшествует всем выводам и доказательствам. Такая последовательность изложения необходима для того, чтобы с самого начала сориентировать читателя относительно основного содержания источника и его перспективной ценности. Выявление главной мысли источника становится весьма ответственным делом референта и требует от него вдумчивого отношения к реферируемому материалу. Иногда эта главная мысль самим автором даже не формулируется, а лишь подразумевается. Референту необходимо суметь сжато ее сформулировать, не внося своих комментариев.

Содержание реферируемого материала излагается в последовательности первоисточника по главам, разделам, параграфам. Обычно дается формулировка вопроса, приводится вывод по этому вопросу и необходимая цепь доказательств в их логической последовательности.

---

<sup>3</sup> Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. - 368с.



Следует иметь в виду, что иногда выводы автора не вполне соответствуют главной мысли первоисточника, так как могут быть продиктованы факторами, выходящими за пределы излагаемого материала. Но в большинстве случаев выводы автора вытекают из главной мысли, выявление которой и помогает их понять.

Перечень типичных смысловых частей информационного реферата и используемых в каждой из них типичных языковых средств представлен в таблице 1.

Таблица 1

**Перечень типичных смысловых частей информационного реферата и используемых в каждой из них типичных языковых средств**

Смысловые части реферата	Используемые языковые средства
1. Название реферируемой работы (или выходные данные)	- В. Вильсон. Наука государственного управления // Классики теории государственного управления: американская школа. Под ред. ДЖ. Шафритца, А. Хайда. – М. : Изд-во МГУ, 2003. – с. 24-42.; - Статья называется (носит название, озаглавлена)
2. Композиция реферируемой работы	- Статья <ul style="list-style-type: none"> <li>• состоит из.....</li> <li>• делится на .....</li> <li>• начинается с.....</li> <li>• кончается (чем?).....;</li> </ul> - В статье можно выделить две части.....
3. Проблематика и основные положения работы	- Статья <ul style="list-style-type: none"> <li>• посвящена теме (проблеме, вопросу) .....</li> <li>• представляет собой анализ (обзор, описание, обобщение, изложение) .....</li> </ul> - Автор статьи <ul style="list-style-type: none"> <li>• ставит (рассматривает, освещает, поднимает, затрагивает) следующие вопросы (проблемы) .....</li> <li>• особо останавливается (на чем?) .....</li> <li>• показывает значение (чего?) .....</li> <li>• раскрывает сущность (чего?) .....</li> <li>• обращает внимание (на что?) .....</li> <li>• уделяет внимание (чему?) .....</li> <li>• касается (чего?) .....</li> </ul> - В статье <ul style="list-style-type: none"> <li>• рассматривается (что?) .....</li> <li>• анализируется (что?) .....</li> <li>• делается анализ (обзор, описание, обобщение, изложение) (чего?) .....</li> <li>• раскрывается, освещается вопрос...</li> <li>• обобщается (что?) .....</li> <li>• отмечается важность (чего?) .....</li> <li>• касается (чего?).....</li> </ul> - В статье <ul style="list-style-type: none"> <li>• показано (что?) .....</li> <li>• уделено большое внимание (чему?) .....</li> <li>• выявлено (что?) .....</li> <li>• уточнено (что?) .....</li> </ul>
4. Аргументация основных положений работы	- Автор <ul style="list-style-type: none"> <li>• приводит примеры (факты, цифры, данные) .....</li> <li>• иллюстрирует это положение .....</li> <li>• подтверждает (доказывает, аргументирует) свою точку зрения примерами (данными)...</li> </ul> - в подтверждение своей точки зрения автор приводит доказательства (аргументы, ряд доказательств, примеры, иллюстрации, данные, результаты наблюдений)... - Для доказательств своих положений автор описывает <ul style="list-style-type: none"> <li>• эксперимент .....</li> <li>• в ходе эксперимента автор привлекал ...</li> </ul>

5. Выводы, заключения	<ul style="list-style-type: none"> <li>• выполненные исследования показывают...</li> <li>• приведенные наблюдения (полученные данные) приводят к выводу (позволяют сделать выводы)..</li> <li>• из сказанного можно сделать вывод, что .....</li> <li>• анализ результатов свидетельствует ...</li> </ul> <p>- На основании проведенных наблюдений (полученных данных, анализ результатов)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• был сделан вывод (можно сделать заключение) ....</li> <li>• автор приводит выводы .....</li> </ul>
-----------------------	--

Реферат может содержать комментарий референта, только в том случае, если референт является достаточно компетентным в данном вопросе и может вынести квалифицированное суждение о реферируемом материале. В комментарий входят критическая характеристика первоисточника, актуальность освещенных в нем вопросов, суждение об эффективности предложенных решений, указание, на кого рассчитан реферируемый материал.

Комментарий реферата может содержать оценку тех или иных положений, высказываемых автором реферируемой работы. Эта оценка чаще всего выражает согласие или несогласие с точкой зрения автора. Языковые средства, которые используются при этом, рассмотрены в таблице 2.

Таблица 2

### **Языковые средства, используемых при оценке те положений, высказываемых автором реферируемой работы**

Смысловые части комментария	Используемые языковые средства
Смысловые части комментария	<p>- Автор</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• справедливо указывает ....</li> <li>• правильно подходит к анализу (оценке) ....</li> <li>• убедительно доказывает ....</li> <li>• отстаивает свою точку зрения ....</li> <li>• критически относится к работам предшественников .....</li> </ul> <p>- Мы</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• разделяем точку зрения (мнения, оценку) автора .....</li> <li>• придерживаемся подобного же мнения ...</li> <li>• критически относимся к работам предшественников ....</li> </ul> <p>- Можно согласится с автором, что .....</p> <p>- Следует признать достоинства такого подхода к решению ....</p>
Несогласие (отрицательная оценка)	<p>- Автор</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• не раскрывает содержания (противоречий, разных точек зрения) ...</li> <li>• противоречит себе (известным фактам) .....</li> <li>• игнорирует общеизвестные факты .....</li> <li>• упускает из вида .....</li> <li>• не критически относится к высказанному положению .....</li> <li>• не подтверждает сказанное примерами....</li> </ul> <p>- Мы</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• придерживаемся другой точки зрения (другого, противоположного мнения)</li> <li>• не можем согласиться (с чем?) ...</li> <li>• трудно согласиться с автором (с таким подходом к решению проблемы, вопроса, задачи) ....</li> <li>• можно выразить сомнение в том, что .....</li> <li>• дискусивно (сомнительно, спорно) , что .....</li> <li>• к недостаткам работы можно отнести .....</li> </ul>

В реферате могут быть использованы цитаты из реферируемой работы. Они всегда ставятся в кавычки. Следует различать три вида цитирования, при этом знаки препинания ставятся, как в предложениях с прямой речью.

1. Цитата стоит после слов составителя реферата. В этом случае после слов составителя реферата ставится двоеточие, а цитата начинается с большой буквы. Например:

Автор статьи утверждает: «В нашей стране действительно произошел стремительный рост национального самосознания».

2. Цитата стоит перед словами составителя реферата. В этом случае после цитаты ставится запятая и тире, а слова составителя реферата пишутся с маленькой буквы. Например: «В нашей стране действительно стремительный рост национального самосознания», - утверждает автор статьи.

3. Слова составителя реферата стоят в середине цитаты. В этом случае перед ними и после них ставится точка с запятой. Например: «В нашей стране, - утверждает автор статьи, - действительно стремительный рост национального самосознания».

4. Цитата непосредственно включается в слова составителя реферата. В этом случае (а он является самым распространенным в реферате) цитата начинается с маленькой буквы. Например: Автор статьи утверждает, что «в нашей стране действительно стремительный рост национального самосознания».

#### 4. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

*Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций.* Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации<sup>4</sup>. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

---

<sup>4</sup> Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html/>

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливаются заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один-два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

*Дискуссия* занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

*Метод «мозговой атаки»* или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

- время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

**Презентация**, или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода *case-study*. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффективна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповой и индивидуальной. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного анализа (правильность предложений, подготовленность, аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющих в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

## 5. Методические рекомендации по составлению тестовых заданий

### *Требования к составлению тестовых заданий*

**Тестовое задание (ТЗ)** - варьирующаяся по элементам содержания и по трудности единица контрольного материала, сформулированная в утвердительной форме предложения с неизвестным. Подстановка правильного ответа вместо неизвестного компонента превращает задание в истинное высказывание, подстановка неправильного ответа приводит к образованию ложного высказывания, что свидетельствует о незнании студентом данного учебного материала.

Для правильного составления ТЗ необходимо выполнить следующие *требования*:

1. Содержание каждого ТЗ должно охватывать какую-либо одну смысловую единицу, то есть должно оценивать что-то одно.
2. Ориентация ТЗ на получение *однозначного* заключения.
3. Формулировка содержания ТЗ в виде свернутых кратких суждений. Рекомендуемое количество слов в задании не более 15. В тексте не должно быть преднамеренных подсказок и сленга, а также оценочных суждений автора ТЗ. Формулировка ТЗ должна быть в повествовательной форме (не в форме вопроса). По возможности, текст ТЗ не должен содержать сложноподчиненные конструкции, повелительного наклонения («выберите», «вычислите», «укажите» и т.д). Специфический признак (ключевое слово) выносится в начало ТЗ. Не рекомендуется начинать ТЗ с предлога, союза, частицы.
4. Соблюдение единого стиля оформления ТЗ.

### *Требования к формам ТЗ*

ТЗ может быть представлено в одной из четырех стандартизованных форм:

- закрытой (с выбором одного или нескольких заключений);
- открытой;
- на установление правильной последовательности;
- на установление соответствия.

Выбор формы ТЗ зависит от того, какой вид знаний следует проверить. Так, для оценки фактологических знаний (знаний конкретных фактов, названий, имён, дат, понятий) лучше использовать тестовые задания закрытой или открытой формы.

Ассоциативных знаний (знаний о взаимосвязи определений и фактов, авторов и их теорий, сущности и явления, о соотношении между различными предметами, законами, датами) - заданий на установление соответствия. Процессуальных знаний (знаний правильной последовательности различных действий, процессов) - заданий на определение правильной последовательности.

#### ***Тестовое задание закрытой формы***

Если к заданиям даются готовые ответы на выбор (обычно один правильный и остальные неправильные), то такие задания называются заданиями с выбором одного правильного ответа или с единичным выбором.

При использовании этой формы следует руководствоваться правилом: в каждом задании с выбором одного правильного ответа правильный ответ должен быть.

Помимо этого, бывают задания с выбором нескольких правильных ответов или с множественным выбором. Подобная форма заданий не допускает наличия в общем перечне ответов следующих вариантов: «все ответы верны» или «нет правильного ответа».

Вариантов выбора (дистракторов) должно быть не менее 4 и не более 7. Если дистракторов мало, то возрастает вероятность угадывания правильного ответа, если слишком много, то делает задание громоздким. Кроме того, дистракторы в большом



количестве часто бывают неоднородными, и тестируемый сразу исключает их, что также способствует угадыванию.

Дистракторы должны быть приблизительно одной длины. Не допускается наличие повторяющихся фраз (слов) в дистракторах.

#### ***Тестовое задание открытой формы***

В заданиях открытой формы готовые ответы с выбором не даются. Требуется сформулированное самим тестируемым заключение. Задания открытой формы имеют вид неполного утверждения, в котором отсутствует один или несколько ключевых элементов. В качестве ключевых элементов могут быть: число, буква, слово или словосочетание. При формулировке задания на месте ключевого элемента, необходимо поставить прочерк или многоточие. Утверждение превращается в истинное высказывание, если ответ правильный и в ложное высказывание, если ответ неправильный. Необходимо предусмотреть наличие всех возможных вариантов правильного ответа и отразить их в ключе, поскольку отклонения от эталона (правильного ответа) могут быть зафиксированы проверяющим как неверные.

#### ***Тестовые задания на установление правильной последовательности***

Такое задание состоит из однородных элементов некоторой группы и четкой формулировки критерия упорядочения этих элементов.

Задание начинается со слова: «Последовательность».

#### ***Тестовые задания на установление соответствия***

Такое задание состоит из двух групп элементов и четкой формулировки критерия выбора соответствия между ними.

Соответствие устанавливается по принципу 1:1 (одному элементу первой группы соответствует только один элемент второй группы) или 1:М (одному элементу первой группы соответствуют М элементов второй группы). Внутри каждой группы элементы должны быть однородными. Количество элементов второй группы должно превышать количество элементов первой группы. Максимальное количество элементов второй группы должно быть не более 10, первой группы - не менее 2.

Задание начинается со слова: «Соответствие». Номера и буквы используются как идентификаторы (метки) элементов. Арабские цифры являются идентификаторами первой группы, заглавные буквы русского алфавита - второй. Номера и буквы отделяются от содержания столбцов круглой скобкой.

## **6. Требования к написанию и оформлению доклада**

*Доклад (или отчёт)* – один из видов монологической речи, публичное, развёрнутое, официальное, сообщение по определённом вопросу, основанное на привлечении документальных данных.

Обычно любая научная работа заканчивается докладом на специальном научном семинаре, конференции, где участники собираются, чтобы обсудить научные проблемы. На таких семинарах (конференциях) всегда делается доклад по определённой теме. Доклад содержит все части научного отчёта или статьи. Это ответственный момент для докладчика. Здесь проверяются знание предмета исследования, способности проводить эксперимент и объяснять полученные результаты. С другой стороны, люди собираются, чтобы узнать что-то новое для себя. Они тратят своё время и хотят провести время с пользой и интересом. После выступления докладчика слушатели обязательно задают вопросы по теме выступления, и докладчику необходимо научиться понимать суть различных вопросов. Кроме того, на семинаре задача обсуждается, рассматривается со всех сторон, и бывает, что автор узнаёт о своей работе много нового. Часто возникают интересные идеи и неожиданные направления исследований. Работа становится более содержательной. Следовательно, доклад необходим для развития самой науки и для студентов. В этом состоит главное предназначение доклада.

На студенческом семинаре (конференции) всегда подводится итог, делаются выводы, принимается решение или соответствующее заключение. Преподаватель (жюри) выставляет оценку за выполнение доклада и его предьявление, поскольку в учебном заведении данная форма мероприятия является обучающей. Оценки полезно обсуждать со студентами: это помогает им понять уровень их собственных работ. С лучшими сообщениями, сделанными на семинарах, студенты могут выступать впоследствии на студенческих конференциях. Поэтому каждому студенту необходимо обязательно предварительно готовить доклад и учиться выступать публично.

Непосредственная польза выступления студентов на семинаре (конференции) состоит в следующем.

1. Выступление позволяет осуществлять поиск возможных ошибок в постановке работы, методике исследования, обобщении полученных результатов, их интерпретации. Получается, что студенты помогают друг другу улучшить работу. Что может быть ценнее?

2. Выступление дает возможность учиться излагать содержание работы в короткое время, схватывать суть вопросов и толково объяснять существо. Следовательно, учиться делать доклад полезно для работы в любой области знаний.

3. На семинаре (конференции) докладчику принято задавать вопросы. Студентам следует знать, что в научной среде не принято осуждать коллег за заданные в процессе обсуждения вопросы. Однако вопросы должны быть заданы по существу проблемы, исключать переход на личностные отношения. Публичное выступление позволяет студентам учиться корректно, лаконично и по существу отвечать на вопросы, демонстрировать свои знания.

### ***Требования к подготовке доклада***

Доклад может иметь форму публичной лекции, а может содержать в себе основные тезисы более крупной работы (например, реферата, курсовой, дипломной работы, научной статьи). Обычно от доклада требуется, чтобы он был:

- точен в части фактического материала и содержал обоснованные выводы;
- составлен с учетом точки зрения адресата;
- посвящен проблемам, непосредственно относящимся к определенной теме;
- разделен на части, логично построенные;

- достаточно обширен, чтобы исчерпать заявленную тему доклада, но не настолько, чтобы утомлять адресата;
- интересно написан и легко читался (слушался);
- понятен, нагляден и привлекателен по оформлению.

Как правило, доклад содержит две части: текст и иллюстрации. Представление рисунков, таблиц, графиков должно быть сделано с помощью компьютера. Компьютер - идеальный помощник при подготовке выступления на семинаре (конференции). Каждая из частей доклада важна. Хорошо подготовленному тексту всегда сопутствует хорошая презентация. Если докладчик не нашёл времени хорошо подготовить текст, то у него плохо подготовлены и иллюстрации. Это неписаное правило.

Доклад строится по определённой схеме. Только хорошая система изложения даёт возможность логично, взаимосвязано, кратко и убедительно изложить результат. Обычно участники конференции знают, что должно прозвучать в каждой части выступления. В мире ежегодно проходят тысячи семинаров, сотни различных конференций, технология создания докладов совершенствуется. Главное - говорить о природе явления, о процессах, проблемах и причинах Вашего способа их решения, аргументировать каждый Ваш шаг к цели.

На следующие вопросы докладчику полезно ответить самому себе при подготовке выступления, заблаговременно (хуже, если подобные вопросы возникнут у слушателей в процессе доклада). Естественно, отвечать целесообразно честно...

#### 1. Какова цель выступления?

Или: «Я, автор доклада, хочу...»:

- информировать слушателей о чем-то;
- объяснить слушателям что-то;
- обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т.п.) со слушателями;
- спросить у слушателей совета;
- сделать себе PR;
- пожаловаться слушателям на что-то (на жизнь, ситуацию в стране и т.п.).

Т.е. ради чего, собственно, затевается выступление? Если внятного ответа на Вопрос нет, то стоит задуматься, нужно ли такое выступление?

#### 2. Какова аудитория?

На кого рассчитано выступление:

- на студентов;
- на клиента (-ов);
- на коллег-профессионалов;
- на конкурентов;
- на присутствующую в аудитории подругу (друзей)?

#### 3. Каков объект выступления?

О чем собственно доклад, что является его «ядром»:

- одна модель;
- серия моделей;
- динамика изменения модели (-ей);
- условия применения моделей;
- законченная методика;
- типовые ошибки;
- прогнозы;
- обзор, сравнительный анализ;
- постановка проблемы, гипотеза;
- иное?

Естественно, качественный доклад может касаться нескольких пунктов из приведенного списка...

#### 4. Какова актуальность доклада?

Или: почему сегодня нужно говорить именно об этом?

5. В чем заключается новизна темы?

Или: если заменить многоумные и иноязычные термины в тексте доклада на обычные слова, то не станет ли содержание доклада банальностью?

Ссылается ли автор на своих предшественников? Проводит ли сравнение с существующими аналогами?

Стоит заметить, что новизна и актуальность - разные вещи. Новизна характеризует насколько ново содержание выступления по сравнению с существующими аналогами. Актуальность - насколько оно сейчас нужно. Бесспорно, самый выигрышный вариант - и ново, и актуально. Неплохо, если актуально, но не ново. Например, давняя проблема, но так никем и не решенная. Терпимо, если не актуально, но ново - как прогноз. Пример: сделанный Д.И. Менделеевым в XIX веке прогноз, что в будущем дома будут не только обогревать, но и охлаждать (кондиционеров тогда и вправду не знали).

Но если и не ново и не актуально, то нужно ли кому-то такое выступление?

6. Разработан ли автором план (структура и логика) выступления?

Есть ли логичная последовательность авторской мысли? Или же автор планирует свой доклад в стиле: «чего-нибудь наболтаю, а наглядный материал и вопросы слушателей как-нибудь помогут вытянуть выступление...?»

Есть ли выводы с четкой фиксацией главного и нового? Как они подводят итог выступлению?

7. Наглядная иллюстрация материалов

Нужна ли она вообще, и если да, то, что в ней будет содержаться? Отражает ли она логику выступления?

Иллюстрирует ли сложные места доклада?

Важно помнить: иллюстративный материал не должен полностью дублировать текст доклада. Слушатель должен иметь возможность записывать: примеры, дополнения, подробности, свои мысли... А для этого необходимо задействовать как можно больше видов памяти. Гигантской практикой образования доказано: материал усваивается лучше, если зрительная и слуховая память подкрепляются моторной. Т.е. надо дать возможность слушателям записывать, а не только пассивно впитывать материал.

Следует учитывать и отрицательный момент раздаточных материалов: точное повторение рассказа докладчика. Или иначе: если на руках слушателей (в мультимедийной презентации) есть полный письменный текст, зачем им нужен докладчик? К слову сказать, часто красивые слайды не столько иллюстрируют материал, сколько прикрывают бедность содержания...

8. Корректные ссылки

Уже много веков в научной среде считается хорошим тоном указание ссылок на первоисточники, а не утаивание их.

9. Что останется у слушателей:

- раздаточный или наглядный материал: какой и сколько?
- собственные записи: какие и сколько? И что сделано автором по ходу доклада для того, чтобы записи слушателей не исказили авторский смысл?
- в головах слушателей: какие понятия, модели, свойства и условия применения были переданы слушателям?

### ***Требования к составлению доклада***

Полезно придерживаться следующей схемы составления доклада на семинаре (конференции).

Время Вашего доклада ограничено, обычно на него отводится 5-7 минут. За это время докладчик может успеть зачитать в темпе обычной разговорной речи текст объёмом

не более 3-5-и листов формата А4. После доклада - вопросы слушателей и ответы докладчика (до 3 минут). Полное время Вашего выступления - не более 10-и минут.

Сначала должно прозвучать название работы и фамилии авторов. Обычно название доклада и авторов произносит руководитель семинара (председатель конференции). Он представляет доклад, но допустим и такой вариант, при котором докладчик сам произносит название работы и имена участников исследования. Потраченное время - примерно 30 с.

Следует знать, что название - это краткая формулировка цели. Поэтому название должно быть конкретным и ясно указывать, на что направлены усилия автора. Если в названии менее 10-и слов - это хороший тон. Если больше - рекомендуется сократить. Так советуют многие международные журналы. В выступлении можно пояснить название работы другими словами. Возможно, слушатели лучше Вас поймут, если Вы скажете, какое явление исследуется, что измеряется, что создаётся, разрабатывается или рассчитывается. Максимально ясно покажите, что именно Вас интересует.

#### ***Введение (до 1 мин)***

В этой части необходимо обосновать необходимость проведения исследования и его актуальность. Другими словами, Вы должны доказать, что доклад достоин того, чтобы его слушали. Объясните, почему важно исследовать данное явление. Расскажите, чем интересен выбранный объект с точки зрения науки, заинтересуйте своих слушателей темой Вашего исследования.

Скажите, кто и где решал подобную задачу. Укажите сильные и слабые стороны известных результатов. Учитывайте то, что студенту необходимо учиться работать с литературой, анализировать известные факты. Назовите источники информации, Ваших предшественников по имени, отчеству и фамилии и кратко, какие ими были получены результаты. Обоснуйте достоинство Вашего способа исследования в сравнении с известными результатами. Учтите, что студенческое исследование может быть и познавательного характера, то есть можно исследовать известный науке факт. Поясните, чем он интересен с Вашей точки зрения. Ещё раз сформулируйте цель работы и покажите, какие задачи необходимо решить, чтобы достигнуть цели. Что нужно сделать, создать, решить, вычислить? Делите целое на части - так будет понятнее и проще.

#### ***Методика исследования (до 30 сек.)***

Методика, или способ исследования, должна быть обоснована. Поясните, покажите преимущества и возможности выбранной Вами методики при проведении экспериментального исследования.

#### ***Теоретическая часть (до 1 мин)***

Эта часть обязательна в докладе. Редкий случай, когда можно обойтись без теоретического обоснования предстоящей работы, ведь экспериментальное исследование должно базироваться на теории. Здесь необходимо показать сегодняшний уровень Вашего понимания проблемы и на основании теории попытаться сформулировать постановку задачи. Покажите только основные соотношения и обязательно дайте комментарий. Скажите, что основная часть теории находится в содержании работы (реферате).

#### ***Экспериментальная часть (для работ экспериментального типа) (1,5-2 мин.)***

Покажите и объясните суть проведённого Вами эксперимента. Остановитесь только на главном, основном. Второстепенное оставьте для вопросов.

#### ***Результаты работы (до 1 мин.)***

1. Перечислите основные, наиболее важные, на Ваш взгляд, результаты работы.
2. Расскажите, как он был получен, укажите его характерные особенности.
3. Поясните, что Вы считаете самым важным и почему.
4. Следует ли продолжать исследование, и, если да, то в каком направлении?
5. Каким результатом можно было бы гордиться? Остановитесь на нём подробно.
6. Скажите, что следует из представленной вами информации.

7. Покажите, удалось ли разобраться в вопросах, сформулированных при постановке задачи. Обязательно скажите, достигнута ли цель работы. Закончено ли исследование?

8. Какие перспективы?

9. Покажите, что результат Вам нравится.

#### **Выводы (до 1 мин.)**

Сжато и чётко сформулируйте выводы. Покажите, что твёрдо установлено в результате проведённого теоретического или экспериментального исследования. Что удалось надёжно выяснить? Какие факты заслуживают доверия?

#### **Завершение доклада**

Поблагодарите всех за внимание. Помните: если Вы закончили свой доклад на 15 секунд раньше, все останутся довольны и будут ждать начала вопросов и дискуссию. Если Вы просите дополнительно ещё 3 минуты, Вас смогут потерпеть. Это время могут отнять от времени для вопросов, где Вы могли бы показать себя с хорошей стороны. Поэтому есть смысл предварительно хорошо "вычитать" (почти выучить) доклад. Это лучший способ научиться управлять временем.

#### **Требования к предъявлению доклада во время выступления**

Докладчику следует знать следующие приёмы, обеспечивающие эффективность восприятия устного публичного сообщения.

##### *Приемы привлечения внимания*

1. Продуманный первый слайд презентации.
2. Обращение.
3. Контакт глаз.
4. Позитивная мимика.
5. Уверенная пантомимика и интонация.
6. Выбор места.

##### *Приемы привлечения интереса*

В формулировку актуальности включить информацию о том, в чём может быть личный интерес слушателей, в какой ситуации они могут его использовать?

*Приемы поддержания интереса и активной мыслительной деятельности слушателей*

1. Презентация (образы, схемы, диаграммы, логика, динамика, юмор, оформление).
2. Соответствующая невербальная коммуникация (все составляющие!!!).
3. Речь логичная, понятная, средний темп, интонационная выразительность.
4. Разговорный стиль.
5. Личностная вовлеченность.
6. Образные примеры.
7. Обращение к личному опыту.
8. Юмор.
9. Цитаты.
10. Временное соответствие.

##### *Приемы завершения выхода из контакта*

- обобщение;
- метафора, цитата;
- побуждение к действию.

## 7. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

### *Письменный опрос*

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучать лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

### *Устный опрос*

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии<sup>5</sup>.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

---

<sup>5</sup> Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: [http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii\\_dlya\\_studentov\\_21.pdf](http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf)

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)<sup>6</sup>.

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

## **8. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям**

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для

---

<sup>6</sup>Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]:  
[http://priab.ru/images/metod\\_agro/Metod\\_Inostran\\_yazyk\\_35.03.04\\_Agro\\_15.01.2016.pdf](http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf)



будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помочь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

## **9.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям**

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются

выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

## **10.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов**

*Экзамен* - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что

осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы (проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неувоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадет на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных

билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала, кратко записав это на листе бумаги, создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неустойчивый физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее и ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в

период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368 с.



2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально-ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html>
3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml>
4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.
5. Методические рекомендации по написанию



**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Факультет геологии и геофизики**

**Кафедра Математики**



**В. Б. Сурнев**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**

**РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

**Екатеринбург 2020**

Министерство высшего образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
Уральский государственный горный университет  
Факультет геологии и геофизики  
Кафедра Математики

В. Б. Сурнев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА  
РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

**УДК 512.64**  
**ББЛ 22.143**  
**С 90**

**С 90 В. Б. Сурнев**

**Высшая математика. Решебник задач по высшей математике: -**

Учебно-методическое пособие. Екатеринбург. ФГБОУ ВО УГГУ. 2020. – 338 с.

ISBN

Пособие охватывает все разделы дисциплины «Математика», предусмотренные государственными стандартами подготовки специалистов специальности «Горное дело». В каждой главе пособия приводятся краткие теоретические сведения и примеры решения типовых задач, предлагаются задания для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов специальности 21.05.04 – «Горное дело»: специализация № 6 «Обогащение полезных ископаемых», специализация № 10 «Электрификация и автоматизация горного производства», специализация N 8 "Горнопромышленная экология", специализация № 9 "Горные машины и оборудование". Учебное пособие может быть использовано и для других специальностей и направлений подготовки горно-геологического профиля высших учебных заведений.

**Рецензенты:**

Кафедра информатики ФГБОУ ВО УГГУ, зав. кафедрой канд. техн. наук, доцент А. В. Дружинин

Д-р физ.-мат. наук, в. н. с., ИГФ УрО РАН им. Ю. П. Булашевича А. Ф. Шестаков.

Сурнев Виктор Борисович

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ**

ISBN

© Сурнев В. Б., 2020

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Уральский государственный горный университет (УГГУ)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b>	<b>9</b>
<b>Часть 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ</b>	<b>11</b>
<b>1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ</b>	
<b>Практическое занятие 1. Теория множеств. Множества, операции, отношения</b>	<b>11</b>
Предварительные сведения	11
Примеры с решением	13
<b>Практическое занятие 2. Числовые поля. Комплексные числа</b>	<b>20</b>
Предварительные сведения	20
Примеры с решением	22
<b>Задания для самостоятельной работы</b>	<b>24</b>
<b>2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ</b>	<b>30</b>
<b>Практическое занятие 1. Векторная алгебра</b>	<b>30</b>
Предварительные сведения	30
Примеры с решением	33
<b>Практическое занятие 2. Векторное и смешанное произведения. Прямая линия и плоскость</b>	<b>45</b>
Предварительные сведения	45
Примеры с решением	46

<b>Практическое занятие 3. Абстрактные векторные пространства</b>	52
Предварительные сведения	52
Примеры с решением	53
<b>Практическое занятие 4. Линейные операторы, матрицы, определители и СЛАУ</b>	75
Предварительные сведения	75
Примеры с решением	76
<b>Практическое занятие 5. Общие свойства линейных операторов</b>	91
Предварительные сведения	91
Примеры с решением	92
<b>Задания для самостоятельной работы</b>	101
<b>Часть 2. ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА <math>E^n</math></b>	113
<b>Практическое занятие 1. Подпространства. Специальные типы линейных операторов в евклидовом пространстве</b>	113
Предварительные сведения	113
Примеры с решением	116
<b>Практическое занятие 2. Некоторые задачи в геометрии евклидова пространства</b>	137

Предварительные сведения	137
Примеры с решением	138
<b>Практическое занятие 3. Поверхности второго порядка</b>	145
Предварительные сведения	145
Примеры с решением	147
<b>Задания для самостоятельной работы</b>	157
<b>ЧАСТЬ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО</b>	162
<b>Практическое занятие 1. Понятие предела числовой последовательности</b>	162
Предварительные сведения	162
Примеры с решением	164
<b>Практическое занятие 2. Непрерывность и предел функции</b>	172
Предварительные сведения	172
Примеры с решением	173
<b>Практическое занятие 3. Дифференцируемость функции одного переменного</b>	179
Предварительные сведения	179
Примеры с решением	180
<b>Практическое занятие 4. Основные теоремы дифференциального исчисления</b>	191



Предварительные сведения	191
Примеры с решением	192
<b>Практическое занятие 5. Исследование функций одного переменного</b>	
	201
Предварительные сведения	201
Примеры с решением	203
<b>Практическое занятие 6. Интегрируемость функций одного переменного</b>	
	210
Предварительные сведения	210
Примеры с решением	211
<b>Задания для самостоятельной работы</b>	<b>217</b>
<b>ЧАСТЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. РЯДЫ</b>	<b>224</b>
<b>Практическое занятие 1. Дифференцируемость функций нескольких переменных</b>	<b>224</b>
Предварительные сведения	224
Примеры с решением	226
<b>Практическое занятие 2. Исследование функции несколь- ких переменных</b>	<b>239</b>
Предварительные сведения	239
Примеры с решением	240

<b>Практическое занятие 3. Числовые ряды</b>	<b>244</b>
Предварительные сведения	244
Примеры с решениями	245
<b>Практическое занятие 4. Функциональные и степенные ряды</b>	<b>251</b>
Предварительные сведения	251
Примеры с решением	253
<b>Задания для самостоятельной работы</b>	<b>260</b>
<b>ЧАСТЬ 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕ- НИЯ</b>	<b>266</b>
<b>Практическое занятие 1. Базисные векторные поля</b>	<b>266</b>
Предварительные сведения	266
Примеры с решением	269
<b>Практическое занятие 2. Криволинейные интегралы</b>	<b>279</b>
Предварительные сведения	279
Примеры с решением	281
<b>Практическое занятие 3. Кратные интегралы</b>	<b>284</b>
Предварительные сведения	284
Примеры с решением	287
<b>Практическое занятие 4. Некоторые приложения криволи- нейных и кратных интегралов</b>	<b>296</b>
Предварительные сведения	296

Примеры с решением	297
<b>Практическое занятие 5. Поверхностные интегралы</b>	<b>302</b>
Предварительные сведения	302
Примеры с решением	303
<b>Практическое занятие 6. Векторный анализ</b>	<b>307</b>
Предварительные сведения	307
Примеры с решением	310
<b>Практическое занятие 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения</b>	<b>319</b>
Предварительные сведения	319
Примеры с решением	322
<b>Практическое занятие 8. Системы ОДУ</b>	<b>337</b>
Предварительные сведения	337
Примеры с решением	342
<b>Задания для самостоятельной работы</b>	<b>348</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ» предназначено для студентов технических направлений подготовки и технических специальностей университетов. Цель данного пособия – оказание помощи студентам в самостоятельной работе по освоению общего курса высшей математики технического вуза. Перечислим некоторые причины, побудившие автора к созданию данного пособия.

Хорошо известно, что без самостоятельной работы сколько-нибудь твёрдое освоение курса высшей математики совершенно невозможно. За то малое количество часов аудиторных занятий, которое отводится современными учебными планами, особенно для направлений подготовки бакалавров, никакой преподаватель не сможет обучить студентов даже основам математики, не говоря уже об овладении методами последней на уровне, нужном для плодотворного изучения специальных дисциплин учебных планов таких, как, например, теоретическая механика, теоретическая электротехника и так далее.

Желательно, чтобы студент научился самостоятельно выбирать метод решения задачи, поставленной в предметной области, и мог использовать для его реализации знания по высшей математике, полученные в университете. Последнее может быть достигнуто только упорным и творческим самостоятельным трудом, чему и призвано помочь данное пособие.

В настоящее время достаточно велико число желающих получить высшее образование с использованием дистанционных методов обучения. Несмотря на наличие у подавляющего большинства обучающихся в свободном доступе вычислительной техники разного уровня, «книжный вариант» самостоятельного изучения дисциплины математика не потерял своей актуальности. Для многих студентов наличие печатного пособия по практическому освоению курса высшей математики предпочтительнее её электронного варианта.

Предлагаемое учебное пособие появилось как результат многолетнего преподавания автором высшей математики в техническом вузе – ФГБОУ ВО Уральский государственный горный университет. Пособие содержит материал по основным разделам общего курса высшей математики. Некоторые разделы, включаемые обычно в общий курс высшей математики, в пособии не представлены.

В качестве примера назовём теорию функций комплексной переменной (ТФКП). По мнению автора ТФКП является по существу самостоятельной дисциплиной и требует отдельного издания. К тому же в русскоязычной литературе имеются в большом числе практические пособия по данной дисциплине.

Аналогично, теория вероятностей и математическая статистика в совокупности являются отдельной дисциплиной со своими теориями и методами. Поэтому включение теории вероятностей и

математической статистики в качестве раздела в пособие по общему курсу высшей математики нецелесообразно.

Также отсутствует в пособии теория уравнений с частными производными, которая является по мнению автора отдельной дисциплиной, имеющей своё историческое название – «Математическая физика».

Кроме перечисленных разделов высшей математики в пособии не представлена теория операторов, которая известна также под названием «Функциональный анализ». Данная математическая дисциплина вынужденно исключена из современных учебных планов и программ в связи с сокращением времени на изучение высшей математики.

Список разделов, включённых в данное пособие, легко увидеть из оглавления, поэтому перечислять их нет необходимости. Сделаем лишь несколько замечаний относительно структуры пособия.

Перед каждым разделом помещены краткие теоретические сводки, цель которых напомнить студенту, изучившему предварительно теоретический материал по лекционному курсу, необходимые для разбора предлагаемых примеров и решения заданий формулы.

Дальше приводятся с подробным решением примеры типовых задач, перемежающиеся иногда с дополнительными сведениями и с практико-ориентированными примерами из предметных областей.

После примеров с решениями приводятся в достаточном количестве задания для самостоятельной работы. В заданиях для самостоятельной работы ответы не приводятся. Сделано это намеренно, с целью побудить студентов в процессе самостоятельных занятий к общению между собой и с преподавателем.

В заключение отметим, что особое внимание в пособии уделяется трудным для освоения студентами разделов высшей математики, имеющих на первый взгляд абстрактный характер, например, линейной алгебре и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Прикладной характер данных разделов не может быть обоснован на начальных стадиях обучения в вузе и выяснится лишь при изучении специальных дисциплин.

# ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ БЩЕЙ АЛГЕБРЫ

## 1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

### Практическое занятие 1. Теория множеств

#### Множества, операции, отношения

##### Предварительные сведения

**Множество** – неопределяемое понятие. Множество можно задать. Конечное множество задаётся списком, например,

$$M = \{a, b, \dots, k\},$$

где  $a, b, \dots, k$  – элементы множества.

Бесконечное множество задаётся при помощи признака, позволяющего установить принадлежность элементов данному множеству:

$$M = \{x : x \in K\}.$$

Читается:  $M$  есть множество элементов  $x$ , обладающих свойством (свойствами)  $K$ , и только эти элементы являются элементами данного множества.

Над множествами можно производить операции.

Множества  $M_1$  и  $M_2$  считаются **равными**, если

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2 \wedge y \in M_2 \Rightarrow y \in M_1.$$

Пересечение множеств:  $M_1 \cap M_2 \stackrel{def}{=} \{x : x \in M_1 \text{ и } x \in M_2\}.$

Объединение множеств:  $M_1 \cup M_2 \stackrel{def}{=} \{x : x \in M_1 \text{ или } x \in M_2\}.$

Разность множеств:  $M_1 - M_2 \equiv M_1 \setminus M_2 = \{x : x \in M_1 \text{ и } x \notin M_2\}.$

Произведение множеств:  $M_1 \times M_2 = \{\{x, y\} : x \in M_1, y \in M_2\}.$

Здесь  $\{x, y\}$  – упорядоченная пара элементов  $x \in M_1, y \in M_2$ .

**Закон тождества** гласит:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2 \wedge M_2 \subset M_1.$$

Пусть  $x \in M \wedge y \in M$ . Бинарной алгебраической операцией называется отображение

$$\varphi : \{x, y\} \rightarrow z \in M.$$

Алгебраическая операция называется **ассоциативной**, если

$$(\forall x, y, z \in M) x * (y * z) = (x * y) * z.$$

Алгебраическая операция называется **коммутативной**, если

$$(\forall x, y \in M) x * y = y * x.$$

Алгебраическая операция  $(\circ)$  называется **дистрибутивной** относительно алгебраической операции  $(*)$ , если  $(\forall x, y, z \in M)$

- 1)  $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$ ,
- 2)  $z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y)$ .

Множество  $G \neq \emptyset$  с заданной на нём бинарной алгебраической (внутренней) операцией  $(*)$ , называется **группой**, если выполнены следующие аксиомы:

- 1)  $(\forall x, y, z \in G) x * (y * z) = (x * y) * z$ ;
- 2)  $(\exists e \in G) : (\forall x \in G) x * e = e * x = x$ ;
- 3)  $(\forall x \in G) (\exists x^{-1} \in G) : x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ .

Группа называется **абелевой**, или **коммутативной**, если алгебраическая (групповая) операция коммутативна.

Непустое множество  $K$  с двумя алгебраическими операциями **сложением** и **умножением** называется **кольцом**, если выполнены аксиомы:

- 1)  $K$  есть абелева группа по операции сложения (**аддитивная группа кольца**);
- 2) операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами, то есть  $(\forall x, y, z \in K) x(y + z) = xy + xz$  и  $(y + z)x = yx + zx$ .

Непустое множество  $P$  вместе с двумя алгебраическими операциями – **сложением** и **умножением**, называется **полем**, если выполняются следующие аксиомы:

- 1)  $P$  есть аддитивная абелева группа по сложению;
- 2)  $P - \{0\}$  есть мультипликативная абелева группа по умножению;
- 3) операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами, то есть  $(\forall x, y, z \in P) x(y + z) = xy + xz$ ,  $(y + z)x = yx + zx$ .

### Примеры с решением

**Пример 1.1.1.** Найти все подмножества множества  $M = \{2, 7, 9\}$ .

**Решение.** Подмножествами данного множества являются: пустое множество  $\emptyset$ ; само множество  $M$ ; одноэлементные множества  $\{2\}, \{7\}, \{9\}$ ; двухэлементные множества  $\{2, 7\}, \{2, 9\}, \{7, 9\}$ .  $\otimes$

**Пример 1.1.2.** Найти пересечение, объединение и разность множеств  $A = \{a, b, c, d, e, f\}, B = \{b, e, f, k\}$ .

**Решение.** Пересечение множеств  $A \cap B$  содержит три элемента

$$A \cap B = \{b, e, f\},$$

объединение множеств содержит семь элементов

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, k\},$$

разность

$$A - B = \{a, c, d\}. \otimes$$

**Пример 1.1.3.** Найти пересечение множеств решений неравенств

$$2x - 3 > x + 1, 3x - 8 < 2x + 1,$$

полагая, что  $x \in R^1$ .

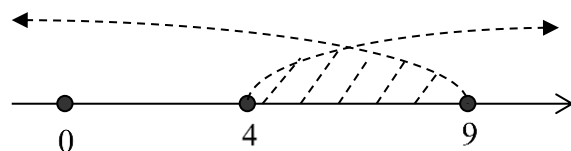


рис. 1.

**Решение.** Решением первого неравенства является множество действительных чисел  $x > 4$ , решением второго неравенства является множество действительных чисел  $x < 9$ . Их пересечением (рисунок 1.1.1) является множество  $M = \{x \in R^1: 4 < x < 9\}$ .  $\otimes$

**Пример 1.1.4.** Найти произведение  $A \times B$  множеств

$$A = \{m, p\}, B = \{e, f, k\}.$$

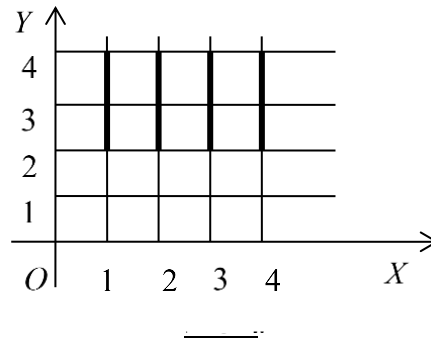
**Решение.** Составляем, согласно определению, всевозможные упорядоченные пары, первой компонентой которых является элемент множества  $A$ , а второй – элемент множества  $B$ :

$$A \times B = \{\{m, e\}, \{m, f\}, \{m, k\}, \{p, e\}, \{p, f\}, \{p, k\}\}. \otimes$$



**Пример 1.1.5.** Изобразить на координатной плоскости произведение  $A \times B$  множеств  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}^1 : 2 \leq y \leq 4\}$ .

**Решение.** Множество  $A$  конечно, а множество  $B$  – бесконечно, поэтому произведение множеств состоит из бесконечного множества упорядоченных пар, первым компонентом которых являются числа 1, 2, 3 или 4, а вторым – любое действительное число из замкнутого промежутка  $[2, 4]$ . Множество пар координатной плоскости изобразится



в виде четырёх отрезков, параллельных оси ординат (рисунок 2).  $\otimes$

**Пример 1.1.6.** Доказать транзитивность отношения равенства для произвольных множеств.

**Решение.** Пусть  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  – произвольные множества. Покажем, что из  $X = Y$  и  $Y = Z \Rightarrow X = Z$ .

Пусть  $x \in X$ . Тогда, так как  $X = Y$ , имеем  $x \in Y$ . Но так как  $Y = Z$ , получаем  $x \in Z$ .

Обратно, из  $x \in Z$  следует, что  $x \in Y$ . По закону тождества получаем  $X = Z$ .  $\otimes$

**Пример 1.1.7.** Доказать, что для произвольных множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  справедливо равенство:  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

**Решение.** Покажем, что

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Пусть  $x \in A \setminus (B \cap C)$ . Откуда следует, что  $x \in A$  и  $x \notin B \cap C$ . То есть,  $x \in A$  и  $x \notin B$ , или  $x \in A$  и  $x \notin C$ . Поэтому

$$x \in A \setminus B, \text{ или } x \in A \setminus C,$$

то есть

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Следовательно, в соответствие с определением части множества включение

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

доказано.

Включение  $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$  доказывается аналогично.

Из доказанных включений с учётом закона тождества получаем требуемое равенство  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .  $\otimes$

**Пример 1.1.8.** Проверить непосредственно, что для множеств

$$X = \{3, 5, 7\}, Y = \{7, 9\}, Z = \{0, 1\}$$

выполняется следующее равенство:  $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$ .

**Решение.** Для левой части равенства непосредственно получаем  $X \cup Y = \{3, 5, 7, 9\}$  и далее имеем:

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \times Z &= \{3, 5, 7, 9\} \times \{0, 1\} = \\ &= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{7, 0\}, \{9, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 1\}, \{9, 1\}\}. \end{aligned}$$

Для правой части получаем аналогично:

$$\begin{aligned} (X \times Z) \cup (Y \times Z) &= \{\{3, 5, 7\} \times \{0, 1\}\} \cup \{\{7, 9\} \times \{0, 1\}\} = \\ &= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{7, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 1\}\} \cup \{\{7, 0\}, \{7, 1\}, \{9, 0\}, \{9, 1\}\} = \\ &= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 0\}, \{7, 1\}, \{9, 0\}, \{9, 1\}\}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные равенства, видим, что оба множества состоят из одних и тех же элементов, то есть, равны друг другу.  $\otimes$

**Пример 1.1.9.** Выяснить, является ли на подмножестве

$$R^+ = \{x \in R^1 : x > 0\}$$

множества действительных чисел  $R^1$  алгебраической операция  $x * y = x^2$  и указать, обладает ли эта операция свойствами коммутативности и ассоциативности.

**Решение.** Пусть  $x, y, z$  – любые элементы из  $R^+$ . Тогда, очевидно,  $(\forall x \in R^+) x^2 \in R^+$ , то есть операция  $(*)$  является бинарной алгебраической операцией. Так как по определению операции имеем

$$(\forall x \neq y) x * y = x^2 \neq y^2 = y * x,$$

то операция  $(*)$  не является коммутативной. Далее, так как

$$(\forall x \neq y \neq z \in R^+) x * (y * z) = x^2 \neq (x * y) * z = (x * y)^2 = x^4,$$

то операция  $(*)$  не является ассоциативной.  $\otimes$

**Пример 1.1.10.** Ассоциативна ли на множестве действительных чисел  $R^1$  операция  $x * y = \sin x \cdot \sin y$ .

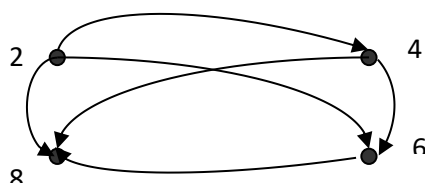
**Решение.** Для определённой операции имеем:

$$(\forall x, y, z \in R) (x * y) * z = \sin(\sin x \cdot \sin y) \cdot \sin z,$$

$$x * (y * z) = \sin x \cdot \sin(\sin y \cdot \sin z).$$

Очевидно, что  $(x * y) * z = x * (y * z)$  выполняется не для всех  $x, y, z$ , следовательно, операция  $(*)$  свойством ассоциативности не обладает.  $\otimes$

**Пример 1.1.11.** На множестве  $M = \{2, 4, 6, 8\}$  задано отношение «меньше». Изобразить это отношение: 1) выписав все упорядоченные пары; 2) построив граф отношения.



**Рис. 1.8.3.**

**Решение.** Отношение имеет вид:

$$2 < 4, 2 < 6, 2 < 8, 4 < 6, 4 < 8, 6 < 8.$$

Запишем отношение в виде подмножества  $\mathfrak{R} \subset M \times M$  произведения множества  $M$  на себя, то есть в виде множества упорядоченных пар:

$$\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}.$$

Граф отношения приведён на рисунке 3.  $\otimes$

**Пример 1.1.12.** Пусть  $M = \{f, p, q\}$  и задано подмножество  $\mathfrak{R}$  множества  $M \times M$

$$\{\{f, p\}, \{f, q\}, \{f, f\}, \{p, f\}, \{q, f\}, \{p, q\}, \{p, p\}, \{q, p\}, \{q, q\}\}.$$

Обладает ли определяемое этим подмножеством отношение свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности?

**Решение.** Очевидно, что для элементов множества  $\mathfrak{R}$  истинны следующие высказывания:

$$1) \{f, f\}, \{p, p\}, \{q, q\} \in \mathfrak{R};$$

$$2) \{f, p\} \wedge \{p, f\} \in \mathfrak{R}, \{f, q\} \wedge \{q, f\} \in \mathfrak{R}, \\ \{p, q\} \wedge \{q, p\} \in \mathfrak{R};$$

$$3) \{f, p\} \in \mathfrak{R} \wedge \{p, q\} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \{f, q\} \in \mathfrak{R}, \\ \{f, q\} \in \mathfrak{R} \wedge \{q, p\} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \{f, p\} \in \mathfrak{R}, \\ \{p, f\} \in \mathfrak{R} \wedge \{f, q\} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \{p, q\} \in \mathfrak{R}.$$

Поэтому отношение  $\mathfrak{R}$  на множестве  $M$ , заданное множеством упорядоченных пар элементов  $M$ , рефлексивно, симметрично и транзитивно.  $\otimes$

**Пример 1.1.13.** Показать, что отношение включения  $\subset$  является отношением порядка.

**Решение.** 1) Пусть  $X$  – произвольное множество. Так как всегда  $X \subset X$ , то отношение  $\subset$  рефлексивно. 2) Пусть  $X, Y, Z$  – произвольные множества, для которых выполняются включения  $X \subset Y$  и  $Y \subset Z$ . Если  $x \in X$ , то в силу  $X \subset Y$  имеем  $x \in Y$ , а так как  $Y \subset Z$ , то и  $x \in Z$ . Поэтому  $(X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z$ , то есть отношение  $\subset$  транзитивно. 3) Так как по закону тождества имеем

$$(X \subset Y \wedge Y \subset X) \Leftrightarrow X = Y,$$

то отношение  $\subset$  антисимметрично.

Отношение  $\subset$  рефлексивно, транзитивно и антисимметрично и, следовательно, является отношением порядка.  $\otimes$

**Пример 1.1.14.** Пусть функция  $f : M_1 \rightarrow M_2$ , где  $M_1 \subset R^1$  и  $M_2 \subset R^1$ , задана формулой  $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ . Требуется: найти множество определения  $M_1$  и множество значений  $M_2$  этой функции; выяснить, является ли данная функция отображением или преобразованием; выяснить, является ли  $f$  инъективной, сюръективной или биективной.

**Решение.** Множеством определения функции  $f$  является множество  $M_1 = \{x \in R^1 : -1 \leq x \leq 1\}$ , а множеством значений – множество  $M_2 = M_1$ , следовательно  $f$  осуществляет отображение  $M_1$  на  $M_1$ , то есть является преобразованием. Так как  $(\exists x \in M_1) : f(x) = f(-x)$ , то преобразование  $f$  не является инъективным, но очевидно, что  $f$  – сюръективно. Следовательно, отображение  $f$  не является биективным.  $\otimes$

**Пример 1.1.15.** Доказать, что множество натуральных чисел  $N$  с операцией  $(*) : x * y = \min\{x, y\}$  является полугруппой.

**Решение.** Исходя из определения полугруппы, нужно проверить, что операция  $(*)$  является алгебраической и ассоциативной. Так как

$$(\forall x, y \in N) x * y = \min\{x, y\} \in N,$$

то операция  $(*)$  является алгебраической. Проверим её на ассоциативность, имеем:

$$(\forall x, y, z \in N) (x * y) * z = \min\{\min\{x, y\}, z\} = \min\{x, \min\{y, z\}\}.$$

Операция  $(*)$  ассоциативна. Поэтому  $(N, *)$  – полугруппа.  $\otimes$

**Пример 1.1.16.** Доказать, что множество положительных действительных чисел  $R^+ = \{x \in R^1 : x > 0\}$ , в котором операции «сложения» и «умножения на число» введены по правилам

$$(\forall x, y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R) x + y \stackrel{def}{=} x \cdot y \wedge \alpha \cdot x \stackrel{def}{=} x^\alpha,$$

является векторным пространством.

**Решение.** Согласно определению векторного пространства, в множестве  $R^+$  должны выполняться две группы аксиом.

**Аксиомы сложения:**

1)  $(\forall x, y \in A) x + y = y + x$  (коммутативность);

2)  $(\forall x, y, z \in M) x * (y * z) = (x * y) * z$ . (ассоциативность);

3)  $(\exists 0 \in A) : (\forall x \in A) x + 0 = x$  (существование нулевого элемента);

4)  $(\forall x \in A) (\exists (-x) \in A) : x + (-x) = 0$  (существование противоположного элемента).

**Аксиомы умножения на число:**

5)  $(\forall x \in A \wedge \forall \alpha, \beta \in R) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ ;

6)  $(\forall x, y \in A \wedge \forall \alpha \in R) \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ ;

7)  $(\forall x \in A) 1 \cdot x = x$ ;

$$8) (\forall x \in A \wedge \forall \alpha, \beta \in R) (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Во множестве  $R^+$  операция «сложения» является бинарной алгебраической операцией, а операция «умножения на число» является внешней бинарной операцией, так как

$$(\forall x, y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R^1) x \cdot y \in R^+ \wedge x^\alpha \in R^+.$$

Проверим выполнение аксиом.

1) Коммутативность операции «сложения» выполняется, так как

$$(\forall x, y \in R^+) x \cdot y = y \cdot x.$$

2) Ассоциативность операции «сложения» выполняется, так как

$$(\forall x, y, z \in R^+) (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

3) В качестве нулевого элемента выбираем единицу, так как

$$(\forall x \in R^+) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

4) Противоположный элемент

$$-x = \frac{1}{x},$$

так как  $(\forall x \in R^+) x \cdot \frac{1}{x} = 1.$

5) Так как  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$ , то

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

6) Так как  $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$ , то

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

7) Так как  $x^1 = x$ , то

$$1 \cdot x = x.$$

8) Так как  $x^{\alpha \cdot \beta} = (x^\beta)^\alpha$ , то

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Все аксиомы векторного пространства выполняются, следовательно, множество  $R^+$  с введёнными операциями является векторным пространством над полем действительных чисел  $R^1$ .

⊗

## Практическое занятие 2. Числовые поля. Комплексные числа

### Предварительные сведения

**Комплексными числами** называются упорядоченные пары действительных чисел вида  $(a, b)$ , для которых операции сложения и умножения вводятся посредством определения результата их выполнения в соответствии со следующими аксиомами.

1. Два комплексных числа  $(a, b)$  и  $(c, d)$  считаются **равными** в том и только в том случае, если  $a = c$  и  $b = d$ , что при помощи логической символики записывается так:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d. \quad (3.1)$$

2. Сумма двух комплексных чисел  $(a, b)$  и  $(c, d)$  является комплексным числом, которое находится по правилу:

$$(a, b) + (c, d) \stackrel{def}{=} (a + c, b + d). \quad (3.2)$$

3. **Произведение** двух комплексных чисел  $(a, b)$  и  $(c, d)$  является комплексным числом, которое находится по правилу:

$$(a, b)(c, d) \stackrel{def}{=} (ac - bd, ad + bc). \quad (3.3)$$

4. Комплексное число  $(a, 0)$  отождествляется с действительным (вещественным) числом  $a$ :  $(a, 0) \equiv a$ . В частности,  $(0, 0) \equiv 0$ .

Числа вида  $(0, b)$  называются **мнимыми числами**. Число  $i \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)$  называется мнимой единицей, причём  $i^2 = (-1, 0) \equiv -1$ .

Нетрудно показать, что множество всех комплексных чисел является полем.

**Алгебраическая форма** комплексного числа

$$z = a + bi \equiv a + ib.$$

**Тригонометрическая форма** комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  – **модуль** комплексного числа,  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$  – **аргумент** комплексного числа.

Операции над комплексными числами производятся путём обычного раскрытия скобок с учётом того, что  $i^2 = (-1, 0) = -1$ .

В тригонометрической форме операции над комплексными числами выполняются по следующим правилам.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Корни  $n$ -й степени из комплексного числа  $\alpha$  существуют и все они даются формулой



$$\beta_k = r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

при любом целом числе  $k$ .

### Примеры с решением

**Пример 1.2.1.** Построить точку, изображающую комплексное число

$$z = -3 - 4i.$$

**Решение.** В данной задаче  $z = a + bi = -3 - 4i$ . Так как на комплексной плоскости  $a = x$  и  $b = y$ , то точка, изображающая на комплексной плоскости число  $z$ , имеет координаты  $x = -3$  и  $y = -4$ .  $\otimes$

**Пример 1.2.2.** Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = -4 - 4\sqrt{3}i$ .

**Решение.** Модуль числа  $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$ . Точка  $z$  лежит в третьей четверти, поэтому  $\arg z = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3}$ .  $\otimes$

**Пример 1.2.3.** Выполнить указанные действия:

$$\frac{(3 - 4i)(2 - i)}{2 + i} - \frac{(3 + 4i)(2 + i)}{2 - i}.$$

**Решение.** Выполняем действия, раскрывая скобки и учитывая свойство мнимой единицы  $i^2 = -1$ .  $\otimes$

**Пример 1.2.4.** Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие:  $-2 < \operatorname{Im} z \leq 3$ .

**Решение.** Так как на комплексной плоскости  $\operatorname{Im} z = y$ , то искомое множество точек является полосой, заключённой между прямыми линиями с уравнениями  $y = -2$  и  $y = 3$ , причём точки первой прямой этому множеству не принадлежат, а точки второй прямой принадлежат.  $\otimes$

**Пример 1.2.5.** Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие:  $|z - 1| < 3$ .

**Решение.** Положим  $z = x + iy$ . Тогда имеем  $z - 1 = (x - 1) + iy$ , откуда получаем

$$|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} < 3,$$

или

$$(x-1)^2 + y^2 < 9.$$

Искомое множество точек комплексной плоскости является внутренностью круга радиуса 3 с центром в точке  $(1; 0)$ .  $\otimes$

**Пример 1.2.6.** Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие:  $\log_3 |z - 3i| < 1$ .

**Решение.** Положим  $z = x + iy$ . Тогда для числа  $z - 3i$  имеем

$$z - 3i = x + i(y - 3),$$

откуда получаем

$$|z - 3i| = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}.$$

Решая неравенство

$$\log_3 \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} < 1,$$

получаем  $x^2 + (y - 3)^2 < 9$ . Искомое множество точек является внутренностью круга радиуса 3 с центром в точке с координатами  $(0; 3)$ .  $\otimes$

**Пример 1.2.7.** Представить комплексное число

$$z = -\cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

в тригонометрической форме.

**Решение.** Стандартная запись комплексного числа в тригонометрической форме имеет вид  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . По формулам приведения имеем  $-\cos \vartheta = \cos(\pi - \vartheta)$ . Поэтому, полагая  $r = 1$  и  $\varphi = \pi - \vartheta$ , получаем стандартную запись комплексного числа в тригонометрической форме

$$z = \cos(\pi - \vartheta) + i \sin(\pi - \vartheta). \otimes$$

**Пример 1.2.8.** Представить комплексное число  $z = 4 - 4\sqrt{3} \cdot i$  в тригонометрической форме.

**Решение.** 1) Находим модуль:  $|z| = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$ .

2) Находим аргумент. Так как  $\cos \varphi = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , то  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ . Сле-

довательно,  $z = 8 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$ .  $\otimes$

**Пример 1.2.9.** Выполнить умножение комплексных чисел:

$$8 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot \frac{1}{16} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

**Решение.** Используя формулу умножения, получаем:

$$8 \cdot \frac{1}{16} \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} i. \otimes$$

**Пример 1.2.10.** Выполнить деление комплексных чисел:

$$2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) : 4 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

**Решение.** Используем формулу деления комплексных чисел, получаем:

$$\frac{2}{4} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} i. \otimes$$

**Пример 1.2.11.** Возвести комплексное  $2 \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right)$  число в седь-

мую степень.

**Решение.** По формуле возведения комплексного числа в степень имеем:

$$\begin{aligned} \left[ 2 \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right) \right]^7 &= 2^7 \left( \cos \left( -\frac{21\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{21\pi}{4} \right) \right) = \\ &= -64\sqrt{2} + 64\sqrt{2}i. \otimes \end{aligned}$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Пусть  $M = \{4, 8, 11, 22\}$ . Образовать всевозможные подмножества этого множества и указать их число.

2. Пусть

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Найти  $X \cap Y$ ,  $X \cup Y$ ,  $X - Y$ ,  $Y - X$ .

3. Пусть  $X = [1, 3) \cup (5, 7]$  и  $Y = [2, 6]$ . Найти  $X \cap Y$ ,  $X \cup Y$ ,  $X - Y$ ,  $Y - X$ .

4. Найти пересечение и объединение множеств решений неравенств:

$$3x + 4 \geq 7x - 16, |x - 3| < 1.$$

5. Изобразить на декартовой плоскости произведение множеств:

а)  $X = \{x : 2 \leq x \leq 6\}, Y = \{y : 3 < y \leq 5\};$

б)  $X = R, Y = \{y : -2 < y \leq 3\};$

в)  $[0, 1] \times [0, 1];$

$$\text{г) } [1, 2] \times (-\infty, +\infty);$$

$$\text{д) } (0, +\infty) \times [-2, -3].$$

6. Доказать, что для произвольных множеств  $X, Y, Z$  справедливы равенства:

$$\text{а) } X \cup (X \cap Y) = X;$$

$$\text{б) } X \cap (X \cup Y) = X$$

$$\text{в) } (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X);$$

$$\text{г) } (X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus Y;$$

$$\text{д) } Y \cup (X \setminus Y) = X \cup Y;$$

$$\text{е) } (X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z);$$

$$\text{ж) } (X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z);$$

$$\text{з) } (X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z);$$

$$\text{и) } X \cup Y \subset Z \Rightarrow X \times Y = (X \times Z) \cap (Z \times Y).$$

7. Слушатели потока в 100 человек изучают английский, немецкий и французский языки. Причём, 28 слушателей изучают английский язык, 30 - немецкий, 42 - французский, 8 - английский и немецкий, 10 - английский и французский, 5 - немецкий и французский. Сколько слушателей изучают только один язык? (проиллюстрировать решение задачи геометрически, используя диаграммы Эйлера).

8. Истинны или ложны для любых  $X, Y, Z$  следующие высказывания:

$$\text{а) } (X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z;$$

$$\text{б) } (X \neq Y \wedge Y \neq Z) \Rightarrow X \neq Z.$$

9. Найти множество истинности предиката:  $\left\langle \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 1} < 0 \right\rangle$ .

10. Найти множество истинности предиката:

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{Корни системы} \\ \text{уравнений} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - y = t - 1 \\ 2x - y = 3 - t \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{одновременно} \\ \text{положительны.} \end{array} \right\rangle$$

11. Найти множество истинности предиката:  $\langle x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) > 0 \rangle$ .

12. Записать высказывания, используя логические символы:

1) «существует такое число  $x$ , что для любого числа  $y$  справедливо равенство  $x + y = 0$ »;

2) «если число больше 6, то его квадрат больше 36».

13. Выяснить, являются ли алгебраическими операции сложения, вычитания, умножения и деления на указанных подмножествах множества  $R$  действительных чисел и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

а)  $N$ ; б)  $N_{2k} = \{2k : k \in N\}$ ; в)  $N_{2k-1} = \{2k-1 : k \in N\}$ ;

г)  $Z$ ; д)  $Z_{2k} = \{2k : k \in Z\}$ ; е)  $R$ ; ж)  $R - \{0\}$ ;

з)  $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$ ; и)  $R - Q$ ; к)  $\{0, 1\}$ .

14. Выяснить, являются ли алгебраическими указанные операции на подмножестве  $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$  множества действительных чисел  $R$ , и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

1)  $x * y = \frac{x+y}{2}$ ; 2)  $x * y = x + y - 1$ ; 3)  $x * y = x^2 y$ ;

4)  $x * y = \sqrt{xy}$ ; 5)  $x * y = |x - y|$ ; 6)  $x * y = x^y$ ;

7)  $x * y = x^2 + y^2$ ; 8)  $x * y = x \cdot y^{\frac{x}{|x|}}$ .

15. На множестве  $X = \{2, 4, 6, 8\}$  рассматриваются отношения « $x$  равно  $y$ », « $x$  кратно  $y$ » и « $x$  больше  $y$  на 2». Какое из приведённых ниже подмножеств множества  $X \times X$  задаёт соответствующее отношение?

а)  $\{\{4, 2\}, \{6, 2\}, \{8, 2\}, \{6, 4\}, \{8, 4\}, \{8, 6\}, \{2, 2\}, \{4, 4\}, \{6, 6\}, \{8, 8\}\}$ ;

б)  $\{\{4, 2\}, \{6, 4\}, \{8, 6\}\}$ ;

в)  $\{\{2, 2\}, \{4, 4\}, \{6, 6\}, \{8, 8\}\}$ .

16. Доказать, что:

а) множество натуральных чисел  $N$  с операциями  $(*) : x * y = x$  и  $(\circ) : x \circ y = 1$  является полугруппой;

б) множества всех целых чисел  $Z$ , всех рациональных чисел  $Q$  и всех действительных чисел  $R$  являются аддитивными группами, если в качестве групповой операции выбрано сложение чисел.

17. Найти действительные числа  $x$  и  $y$ , если:

$$\text{а) } \frac{5x + 2xi - 3y - 3yi}{3 + 4i} = 2; \text{ б) } \frac{2u + 4i}{2x + y} - \frac{y}{x - i} = 0.$$

18. Найти  $\operatorname{Re} z$  и  $\operatorname{Im} z$ , если:

$$\text{а) } z = \frac{(1 - 2i)^3}{i} + 4i^{16}; \text{ б) } z = \frac{3 - 2i}{1 - 4i} + i^9;$$

$$\text{в) } z = \frac{5i - 2}{3i + 1} + i + \frac{8i - 3}{2 - i}; \text{ г) } z = \frac{1}{4} \left( \frac{17 + 31i}{7 + i} + \frac{12}{(1 + i)^4} \right) + i.$$

19. Выполнить указанные действия:

$$1) (1 + 2i)^6;$$

$$2) (2 + 3i) \cdot (4 - 5i) + (2 - 3i) \cdot (4 + 5i);$$

$$3) (x - 1 - i) \cdot (x - 1 + i) \cdot (x + 1 + i) \cdot (x + 1 - i);$$

$$4) (1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5;$$

$$5) \left( -\frac{1}{2} + \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2} \right)^2;$$

$$6) \frac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1};$$

$$7) \frac{(1 + 2i)^2 - (2 - i)^3}{(1 - i)^3 + (2 + i)^2};$$

$$8) \frac{(1 + 2i)^3 + (1 - 2i)^3}{(2 - i)^2 - (2 + i)^2};$$

$$9) \frac{(3 - 4i)(2 - i) - (3 + 4i)(2 + i)}{2 + i} \cdot \frac{1}{2 - i};$$

$$10) \frac{5+12i}{8-6i} + \frac{(1+2i)^2}{2+i};$$

$$11) \left[ \frac{1}{3} \left( (1-i)^4 + \frac{7-24i}{4-3i} \right) + i \right] \frac{8}{(1+i)^2}.$$

20. Найти такие вещественные числа  $x$  и  $y$ , что следующие пары комплексных чисел будут комплексно-пряжёнными:

$$а) z_1 = y^2 - 2y + xy - x + y + (x+y)i, z_2 = -y^2 + 2y + 11 - 4i;$$

$$б) z_1 = x + y^2 + 1 + 4i, z_2 = ixy^2 + iy^2 - 3.$$

21. Решить уравнения:

$$1) |z| + z = 1 + 2i;$$

$$2) 2|z| - 4az + 1 + ai = 0 \quad (a \in R);$$

$$3) |z| + z = 2 - i;$$

$$4) 3z^2 - (14 - 8i)z + 8(4 - 3i) = 0;$$

$$5) 2(2 - i)z^2 + (7 - i)z + 5(1 + i) = 0;$$

$$6) (2 + 4i)z^2 + 2z + 6 - 6i = 0;$$

$$7) z^4 - 12z^2 + 64 = 0.$$

22. Решить систему уравнений:

$$1) \begin{cases} (1-i)x - (3+i)y = 4, \\ 5x - (4+2i)y = 4i; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (1-i)x + 3iy = 5, \\ 2x - (3-3i)y = 6. \end{cases}$$

23. Построить точки, изображающие комплексные числа:

$$1) z_1 = -3 + 3i; 2) z_2 = 5 - i; 3) z_3 = 2i; 4) z_4 = -\sqrt{2}i.$$

24. Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

$$1) z_1 = -3 + 3i; 2) z_2 = -2i; 3) z_3 = 5 - \sqrt{2}.$$

25. Найти множество точек комплексной плоскости, для которых:

$$1) -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}; 2) 1 \leq |z+1| < 3; 3) |z+i| = 1;$$

$$4) \frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 2 + i) \leq \pi; 5) \begin{cases} \frac{\pi}{4} < \arg z < \pi, \\ |1 - 2i - z| = 2; \end{cases}$$

$$6) |z - 1 - i| \geq |z - 2 + i|; 7) |z - 1 + 2i| \geq 3; 8) |z - 2i| + |z - i| = 1.$$

26. Представить комплексные числа в тригонометрической форме:

$$1) z = 16 - 16\sqrt{3}i; 2) z = -6\sqrt{3} - 6i; 3) z = (\sqrt{5} - 2)i.$$

27. Представить комплексные числа в алгебраической форме:

$$1) z = 5\sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right);$$

$$2) z = 4 \left( \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right).$$

28. Представив комплексные числа в тригонометрической форме, выполнить указанные действия:

$$\left( \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right) (-3 + \sqrt{3}i);$$

$$4\sqrt{3} \left( \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) : (\sqrt{3} - i);$$

$$\left( -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i \right) (1+i); (-\sqrt{5} + \sqrt{5}i)^3 (1+i)^2; \frac{2\sqrt{3} - 2i}{(-1+i)(\sqrt{2} + \sqrt{6}i)}.$$

29. Извлечь корни из комплексных чисел, предварительно представив их в тригонометрической форме:

$$1) \sqrt{-6 + 6\sqrt{3}i};$$

$$2) \sqrt[3]{-13,5\sqrt{2} - 13,5\sqrt{2}i};$$

$$3) \sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}.$$

30. Представив комплексные числа

$$z_1 = -1 - i, z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, z_3 = 1 + \sqrt{3}i$$



в тригонометрической форме, вычислить выражение  $\frac{z_1 z_3}{z_2}$ .

## 2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

### Практическое занятие 1. Векторная алгебра

#### Предварительные сведения

Множество  $X$  абстрактных элементов (**векторов**)  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$  называется **векторным пространством** над полем  $P$ , если для его элементов выполнены перечисленные ниже аксиомы.

1<sup>0</sup>. Для любых векторов  $\vec{x}, \vec{y} \in X$  однозначно определена **операция сложения**, результатом которой является вектор, обозначаемый  $\vec{x} + \vec{y} \in X$  и называемый **суммой** векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ , причём операция сложения обладает следующими свойствами:

$$1) \left( \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X \right) \left( \vec{x} + \vec{y} \right) + \vec{z} = \vec{x} + \left( \vec{y} + \vec{z} \right) - \text{ассоциативность};$$

$$2) \left( \forall \vec{x}, \vec{y} \in X \right) \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} - \text{коммутативность}.$$

2<sup>0</sup>. Существует однозначно определённый элемент  $\vec{0} \in X$ , такой, что  $\left( \forall \vec{x} \in X \right)$

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x},$$

который называется **нуль-вектор**.

3<sup>0</sup>. Существует однозначно определённый вектор  $-\vec{x} \in X$ , такой, что  $\left( \forall \vec{x} \in X \right)$

$$\vec{x} + \left( -\vec{x} \right) = \left( -\vec{x} \right) + \vec{x} = \vec{0},$$

который называется **обратным к вектору**  $\vec{x} \in X$ .

4<sup>0</sup>. Для любого числа  $\alpha \in P$  и для любого вектора  $\vec{x} \in X$  определена операция **умножения вектора на число**, результатом которой является вектор  $\alpha \cdot \vec{x} \in X$ , называемый **произведением вектора  $\vec{x}$  на число  $\alpha$** , причём операция умножения векторов на числа обладает следующими свойствами:  $(\forall \alpha, \beta \in P)$  и  $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in X)$

$$1) 1 \cdot \vec{x} = \vec{x};$$

$$2) \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y};$$

$$3) (\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x};$$

$$4) (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}).$$

Система векторов  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subset X$  называется **линейно независимой**, если

$$\left( \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0} \right) \Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0),$$

и **линейно зависимой** в противном случае.

Максимальная по числу векторов линейно независимая система векторов

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subset X^n,$$

(содержащая  $n$  векторов), называется **базисом векторного пространства**, само векторное про-

странство в этом случае называется  **$n$ -мерным векторным пространством** и обозначается  $X^n$ .

Таким образом, в  $n$ -мерном векторном пространстве существует линейно независимая система,

содержащая только  $n$  векторов, а любая система, содержащая  $n+1$  вектор будет уже линейно зависимой.

В реальном трёхмерном пространстве (в его математической модели) векторы – это направленные отрезки. Базис трёхмерного пространства  $R^3$  состоит из трёх взаимно перпендикулярных векторов единичной длины:

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \subset R^3,$$

которые образуют базис декартовой системы координат.

Любой вектор  $\vec{x} \in X^n$  можно представить в виде разложения

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n$$

по векторам как-либо выбранной линейно независимой системе  $n$  векторов

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \right\} \subset X^n,$$

образующей базис пространства.

Алгебраическая операция сложения векторов и внешняя операция умножения вектора на число определяются так:

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^n (x^i + y^i) \vec{e}_i = (x^1 + y^1) \vec{e}_1 + (x^2 + y^2) \vec{e}_2 + \dots + (x^n + y^n) \vec{e}_n;$$

$$\alpha \vec{x} = \alpha \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i = \alpha x^1 \vec{e}_1 + \alpha x^2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha x^n \vec{e}_n.$$

**Линейная комбинация** векторов находится по формуле:

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \sum_{i=1}^n (\alpha x^i + \beta y^i) \vec{e}_i.$$

В трёхмерном пространстве скалярное произведение векторов является функцией, значение которой находится по формуле

$$\left( \vec{x}, \vec{y} \right) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3,$$

или по эквивалентной формуле

$$\left( \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{y} \end{array} \right) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi,$$

где норма вектора

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},$$

а  $\varphi$  – угол, образованный приведёнными к общему началу векторами  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ .

### Примеры с решением

**Пример 2.1.1.** В декартовой системе координат задана точка  $A(1; 5; 3)$ . Найти координаты точки  $B$ , расположенной симметрично точке  $A(1; 5; 3)$  относительно координатной плоскости  $X^1OX^2$ .

**Решение.** Координаты точки  $B$  по осям  $OX^1$  и  $OX^2$  такие же, как и у точки  $A$ , а координата по оси  $OX^3$  имеет противоположный знак. Следовательно,  $B(1; 5; -3)$ .  $\otimes$

**Пример 2.1.2.** В декартовой системе координат своими разложениями по каноническому базису заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \quad \vec{y} = 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \quad \vec{z} = 3\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Найти значение линейной комбинации

$$\vec{u} = 3\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z}$$

этих векторов и сделать вывод о линейной зависимости, или линейной независимости системы

$\left\{ \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{array} \right\}$  и взаимном расположении векторов.

**Решение.** Находим линейную комбинацию:

$$\begin{aligned} 3\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z} &= \\ &= 3\left(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) + 2\left(2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3\right) - \left(3\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\right) = \\ &= 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = \vec{0}. \end{aligned}$$

Значением линейной комбинации трёх векторов с ненулевыми коэффициентами является нуль-вектор. Поэтому система векторов линейно зависима. Так как векторы заданы в пространстве  $R^3$ , заключаем, что они компланарны, то есть лежат в одной плоскости.  $\otimes$

**Пример 2.1.3.** В декартовой системе координат заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{y} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3.$$

Найти норму вектора  $\vec{z} = 2\vec{x} - 5\vec{y}$ .

**Решение.** Находим вектор

$$\begin{aligned} \vec{z} &= 2\vec{x} - 5\vec{y} = 2\left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3\right) - 5\left(4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3\right) = \\ &= -18\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 24\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Находим норму вектора  $\vec{z}$ :  $\|\vec{z}\| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-24)^2} = \sqrt{916}$ .  $\otimes$

**Пример 2.1.4.** На плоскости  $R^2$  задан параллелограмм, три вершины которого имеют, соответственно, координаты  $O(0; 0)$ ,  $B(1; 2)$ ,  $D(5; 0)$  (рисунок 1.1). Найти:

- 1) координаты вершины  $C$ ;
- 2) косинус угла между сторонами  $OB$  и  $OD$ ;
- 3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

**Решение.** 1) По определению координаты вершины  $C$  равны координатам вектора  $\vec{OC}$  (рисунок 1.1), который равен сумме векторов

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}.$$

Так как  $\vec{OB} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ , а  $\vec{OD} = 5\vec{e}_1$ , то  $\vec{OC} = 6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ .

- 2) Вычисляем скалярное произведение векторов  $\vec{OB}$  и  $\vec{OD}$ :

$$\left(\vec{OB}, \vec{OD}\right) = 5.$$

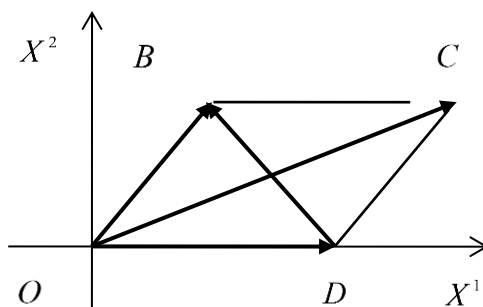


Рис. 1.:

3) Вычисляем длины векторов:  $\vec{OB}$  и  $\vec{OD}$ :

$$\|\vec{OB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2,236;$$

$$\|\vec{OD}\| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

4) Находим  $\cos\left\{\vec{OB}, \vec{OD}\right\}$ :  $\cos\left\{\vec{OB}, \vec{OD}\right\} = \frac{5}{5 \cdot 2,236} \approx 0,447$ .

5) Находим диагональ  $\vec{DB}$ :

$$\vec{DB} = \vec{OB} - \vec{OD} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_1 = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$

6) Далее,  $\|\vec{OC}\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ ;  $\|\vec{DB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ .

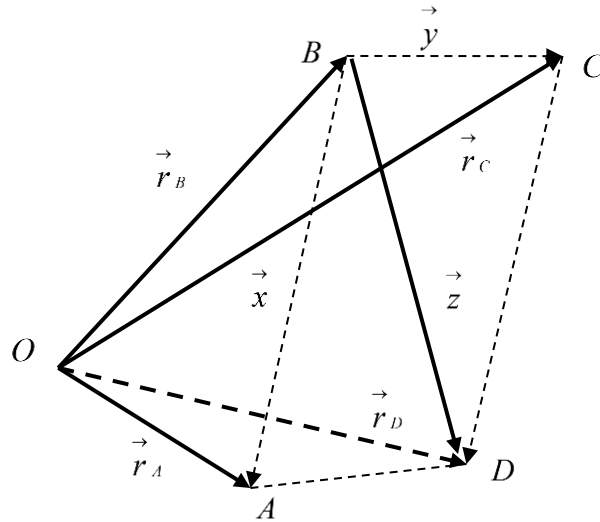
7) Находим косинус угла между диагоналями:

$$\cos\left\{\vec{OC}, \vec{DB}\right\} = \frac{\left(\vec{OC}, \vec{DB}\right)}{\|\vec{OC}\| \cdot \|\vec{DB}\|} = \frac{(-4) \cdot 6 + 2 \cdot 2}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \otimes$$

**Пример 2.1.5.** Даны радиус-векторы трёх последовательных вершин параллелограмма  $ABCD$ . Найти радиус-вектор четвёртой вершины и косинусы углов между диагоналями параллелограмма, если известно, что:

$$\vec{r}_A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{r}_B = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{r}_C = -7\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3;$$

Решение. Изобразим ситуацию на рисунке, не заботясь о точности изображения. Главное, чтобы рисунок отображал ситуацию качественно.



Из рисунка видно, что:

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{x}, \quad \vec{r}_C - \vec{r}_B = \vec{y}, \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{z},$$

$$\vec{r}_D = \vec{r}_B + \vec{z} = \vec{r}_B + \vec{r}_A - \vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_C - \vec{r}_B.$$

Подставляя разложения векторов в полученную формулу, вычисляем все требуемые в задаче величины.  $\otimes$

**Пример 2.1.6.** В пространстве  $R^2$  своими координатами заданы векторы

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \sqrt{7}\vec{e}_2, \quad \vec{y} = \vec{e}_1 + \sqrt{24}\vec{e}_2.$$

Найти какой-либо вектор  $\vec{z}$ , направленный по биссектрисе угла  $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ .

Решение. 1) Находим длины векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{7})^2} = 4;$$

$$\|\vec{y}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{24})^2} = 5.$$

2) Находим орты векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ :

$$\vec{e}_x = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} = \frac{3}{4} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{7}}{4} \vec{e}_2; \quad \vec{e}_y = \frac{1}{\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y} = \frac{1}{5} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{24}}{5} \vec{e}_2.$$

3) Находим диагональ ромба, построенного на ортах  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$ :

$$\vec{z} = \vec{e}_x + \vec{e}_y = \frac{19}{20} \vec{e}_1 + \frac{5\sqrt{7} + 8\sqrt{6}}{20} \vec{e}_2.$$

Диагональ ромба направлена по биссектрисе угла, образованного его сторонами, поэтому

найденный вектор  $\vec{z}$  является искомым вектором.  $\otimes$

**Пример 2.1.7.** В каноническом базисе декартовой системы координат пространства  $R^3$  своими координатами задан вектор

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Найти направляющие косинусы данного вектора.

Решение. 1) Находим длину вектора:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

2) Находим орт вектора:  $\vec{e}_x = \frac{1}{\sqrt{21}} \vec{e}_1 + \frac{-2}{\sqrt{21}} \vec{e}_2 + \frac{4}{\sqrt{21}} \vec{e}_3.$

3) Направляющие косинусы вектора равны координатам его орта, поэтому имеем:

$$\cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_1\right\} = \frac{1}{\sqrt{21}}, \quad \cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_2\right\} = -\frac{2}{\sqrt{21}}, \quad \cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_3\right\} = \frac{4}{\sqrt{21}}. \quad \otimes$$

**Пример 2.1.8.** В каноническом базисе декартовой системы координат пространства  $R^3$  своими координатами заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \quad \vec{y} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$



Найти скалярное произведение  $\left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right)$  двумя способами.

Решение. 1. Находим линейные комбинации  $\vec{x} - 2\vec{y}$  и  $3\vec{x} + \vec{y}$ :

$$\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 - 2\left(\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) = -\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3,$$

$$3\vec{x} + \vec{y} = 3\left(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\right) + \left(\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3.$$

Находим скалярное произведение  $\left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right)$ :

$$\begin{aligned} \left(-\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3, 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3\right) &= \\ &= -4 + 20 + 80 = 96. \end{aligned}$$

2. Используем свойства скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right) &= \left(\vec{x}, 3\vec{x}\right) + \left(\vec{x}, \vec{y}\right) + \left(-2\vec{y}, 3\vec{x}\right) + \left(-2\vec{y}, \vec{y}\right) = \\ &= 3\left(\vec{x}, \vec{x}\right) + \left(\vec{x}, \vec{y}\right) - 6\left(\vec{y}, \vec{x}\right) - 2\left(\vec{y}, \vec{y}\right) = \\ &= 3\|\vec{x}\|^2 - 5\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\} - 2\|\vec{y}\|^2. \end{aligned}$$

Теперь можно произвести вычисления, используя данные задачи.  $\otimes$

**Пример 2.1.9.** Дано:  $\|\vec{x}\| = 3$ ,  $\|\vec{y}\| = 2\sqrt{5}$ ,  $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\} = \frac{\pi}{4}$ . Найти

$$\left(\vec{x} + 3\vec{y}, 3\vec{x} - \vec{y}\right).$$

Решение. Используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \vec{x} + 3\vec{y}, 3\vec{x} - \vec{y} \end{array} \right) &= 3\|\vec{x}\|^2 - \left( \begin{array}{c} \vec{x}, \vec{y} \end{array} \right) + 9\left( \begin{array}{c} \vec{y}, \vec{x} \end{array} \right) - 3\|\vec{y}\|^2 = \\ &= 3\|\vec{x}\|^2 + 8\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos\left\{ \begin{array}{c} \vec{x}, \vec{y} \end{array} \right\} - 3\|\vec{y}\|^2 = -33 + 24\sqrt{10}. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 2.1.10.** В пространстве  $R^3$  своими координатами относительно канонического базиса заданы три вектора:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \quad \vec{a}_2 = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{a}_3 = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

1) Показать, что векторы  $\left\{ \begin{array}{c} \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \end{array} \right\}$  образуют новый базис в пространстве  $R^3$ .

2) Найти координаты вектора  $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$  относительно базиса  $\left\{ \begin{array}{c} \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \end{array} \right\}$ .

**Решение.** 1) Исходя из определения линейной независимости, составляем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 5\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту СЛАУ методом Гаусса, получаем  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Следовательно, система векторов линейно независима и, так как число векторов совпадает с размерностью пространства, является одним из базисов в пространстве  $R^3$ .

2) Для нахождения координат вектора  $\vec{x}$  относительно нового базиса записываем разложение вектора  $\vec{x}$  по векторам этого базиса и СЛАУ, следующую из этого разложения и инвариантности вектора как геометрического объекта:

$$\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3 \Rightarrow \begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ 2x^1 - 3x^2 + 4x^3 = 1, \\ -3x^1 + x^2 + x^3 = 6. \end{cases}$$

Решаем СЛАУ методом Гаусса.

1) Из первого уравнения  $x^1 = 3 - 5x^2 + 2x^3$ . Подставляя во второе и третье уравнения, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 16x^2 - 5x^3 = 15. \end{cases}$$

2) Из второго уравнения  $x^2 = \frac{8}{13}x^3 + \frac{15}{13}$ . Подставляя в третье уравнение, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 63x^3 = 115. \end{cases}$$

Обратный ход: из третьего уравнения

$$x^3 = \frac{115}{63}.$$

Подставляя во второе уравнение, находим

$$x^2 = \frac{95}{63}.$$

Подставляя найденные значения в первое уравнение, получаем

$$x^1 = -\frac{56}{63}. \otimes$$

**Пример 2.1.11.** В пространстве  $\mathbb{R}^3$  своими координатами относительно канонического базиса заданы радиус-векторы

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \quad \vec{y} = 10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \quad \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Найти расстояние между конечными точками векторов

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{x}, 2\vec{z} \end{pmatrix} \vec{x} + \vec{y},$$

$$\vec{v} = \vec{x} + \begin{pmatrix} 2\vec{x}, \vec{z} \end{pmatrix} \vec{y}.$$

Решение. 1) Находим скалярное произведение  $\begin{pmatrix} \vec{x}, 2\vec{z} \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}, 2\vec{z} \end{pmatrix} = \left( 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, 2\left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) \right) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 = 2.$$

2) находим вектор  $\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{x}, 2\vec{z} \end{pmatrix} \vec{x} + \vec{y}$ :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \begin{pmatrix} \vec{x}, 2\vec{z} \end{pmatrix} \vec{x} + \vec{y} = 2 \left( 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \right) + \left( 10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \right) = \\ &= 14\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 10\vec{e}_3. \end{aligned}$$

3) Находим скалярное произведение  $\begin{pmatrix} 2 \cdot \vec{x}, \vec{z} \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \cdot \vec{x}, \vec{z} \end{pmatrix} &= \left( 2 \left( 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \right), \left( \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right) \right) = \\ &= \left( 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right) = 4 + 4 - 6 = 2. \end{aligned}$$

4) Находим вектор  $\vec{v} = \vec{x} + \begin{pmatrix} 2\vec{x}, \vec{z} \end{pmatrix} \vec{y}$ :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{x} + \begin{pmatrix} 2\vec{x}, \vec{z} \end{pmatrix} \vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2 \left( 10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \right) = \\ &= 22\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 11\vec{e}_3. \end{aligned}$$

5) Находим расстояние между векторами  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$ :

$$\rho\left(\begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{matrix}\right) = \left\| \begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{matrix} \right\| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9. \otimes$$

**Пример 2.1.12.** В пространстве  $R^3$  своими координатами относительно канонического базиса заданы три точки  $A(2; 4; 6)$ ,  $B(1; 3; 5)$ ,  $C(0; 2; 3)$ . Найти длины сторон треугольника

$ABC$ , косинусы углов при вершинах треугольника и проекцию вектора  $\vec{AB} + \vec{AC}$  на

направление вектора  $\vec{z} = e_1 + 2e_2 - 5e_3$ .

**Решение.** 1) Находим векторы, определяющие стороны треугольника:

$$\vec{AB} = -e_1 - e_2 - e_3;$$

$$\vec{AC} = -2e_1 - 2e_2 - 3e_3;$$

$$\vec{BC} = -e_1 - e_2 - 2e_3.$$

2) Находим длины сторон треугольника  $\triangle ABC$ :

$$\left\| \vec{AB} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3};$$

$$\left\| \vec{AC} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{17};$$

$$\left\| \vec{BC} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

3) Находим косинусы углов при вершинах треугольника по формуле

$$\cos \vartheta = \frac{\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}}{\left\| \vec{x} \right\| \cdot \left\| \vec{y} \right\|} = \frac{x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}}.$$

$$\cos\left\{\vec{AB}, \vec{AC}\right\} = \frac{\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right)}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \frac{7}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{51}};$$

$$\cos\left\{\vec{BA}, \vec{BC}\right\} = \frac{\left(\vec{BA}, \vec{BC}\right)}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{BC}\|} = \frac{-4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{4}{\sqrt{18}};$$

$$\cos\left\{\vec{CA}, \vec{CB}\right\} = \frac{\left(\vec{CA}, \vec{CB}\right)}{\|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\|} = \frac{10}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{102}}.$$

4) Находим проекцию вектора  $\vec{AB} + \vec{AC}$  на направление вектора  $\vec{z} = e_1 + 2e_2 - 5e_3$ :

$$\text{Pr}_{\vec{z}}\left\{\vec{AB} + \vec{AC}\right\} = \frac{(-3) \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + (-4) \cdot (-5)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \frac{11}{\sqrt{30}}. \otimes$$

**Пример 2.1.13.** Пусть на плоскости  $X^1OX^2$  даны две точки  $A_1(x_1^1; x_1^2)$  и  $A_2(x_2^1; x_2^2)$

. Найти координаты точки  $A(x^1; x^2)$ , делящей отрезок  $A_1A_2$  в отношении  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda$ .

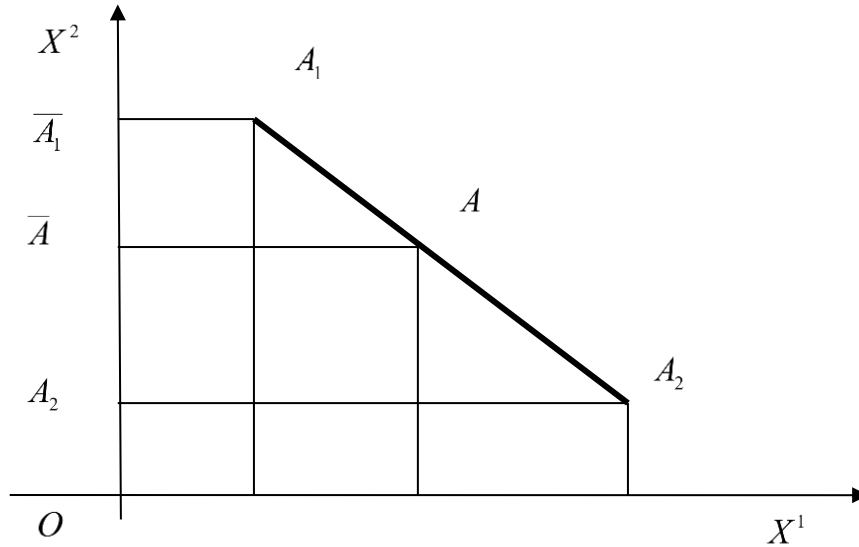
**Решение.** Предположим, что отрезок  $A_1A_2$  не параллелен оси  $OX^1$ . Точки  $A_1, A, A_2$  спроектируем на оси  $OX^1$ , и  $OX^2$  (рисунок).

Имеем по условию задачи

$$\frac{A_1A}{AA_2} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda.$$

Далее получаем, что

$$\overline{A_1 A} = |x_1^2 - x^2|, \overline{A A_2} = |x^2 - x_2^2| \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{|x_1^2 - x^2|}{|x^2 - x_2^2|}.$$



Точка  $\overline{A}$  лежит между точками  $A_1$  и  $A_2$ , поэтому

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{|x_1^2 - x^2|}{|x^2 - x_2^2|} = \frac{x_1^2 - x^2}{x^2 - x_2^2}.$$

Из последнего равенства находим

$$x^2 = \frac{\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2 \left( x_1^2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^2 \right)}{\lambda_2 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 \right)} = \frac{x_1^2 + \lambda x_2^2}{\lambda + 1}.$$

Аналогично находим первую координату точки  $A$ :

$$x^1 = \frac{\lambda_2 x_1^1 + \lambda_1 x_2^1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2 \left( x_1^1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^1 \right)}{\lambda_2 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 \right)} = \frac{x_1^1 + \lambda x_2^1}{\lambda + 1}. \otimes$$

## Практическое занятие 2. Векторное и смешанное произведения.

### Прямая линия и плоскость

#### Предварительные сведения

**Векторное произведение** векторов как результат алгебраической операции умножения векторов

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x^i \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^3 y^i \vec{e}_i = y^1 \vec{e}_1 + y^2 \vec{e}_2 + y^3 \vec{e}_3$$

находится по формуле

$$\left[ \vec{x}, \vec{y} \right] = (x^2 y^3 - x^3 y^2) \vec{e}_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) \vec{e}_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) \vec{e}_3.$$

**Смешанное произведение** векторов – это функция, значение которой находится по формуле

$$\left( \left[ \vec{x}, \vec{y} \right], \vec{z} \right) = x^1 y^2 z^3 + x^2 y^3 z^1 + x^3 y^1 z^2 - x^1 y^3 z^2 - x^2 y^1 z^3 - x^3 y^2 z^1.$$

**Параметрические уравнения** прямой линии в трёхмерном пространстве имеют вид

$$x^i = x_0^i + t \cdot a^i,$$

где  $i = 1, 2, 3$ ,  $x_0^i$  – координаты опорной точки,  $a^i$  – координаты направляющего вектора,

$t \in (-\infty, +\infty)$  – параметр.

Параметрические уравнения плоскости в трёхмерном пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + a_1^1 \cdot t_1 + a_2^1 \cdot t_2, \\ x^2 = x_0^2 + a_1^2 \cdot t_1 + a_2^2 \cdot t_2, \\ x^3 = x_0^3 + a_1^3 \cdot t_1 + a_2^3 \cdot t_2. \end{cases}$$

Неявное уравнение плоскости в трёхмерном пространстве записывается в виде

$$A \cdot x^1 + B \cdot x^2 + C \cdot x^3 + D = 0,$$

где коэффициенты при неизвестных суть координаты **нормального** вектора плоскости

$$\vec{N} = Ax^1 + Bx^2 + Cx^3,$$

удовлетворяющего условию



$$\left( \begin{array}{c} \vec{N}, \vec{x} \end{array} \right) = 0,$$

→  
где  $\vec{x}$  – произвольный вектор на плоскости.

### Примеры с решением

**Пример 2.2.1.** Вычислить площадь треугольника, построенного на приведённых к общему началу векторах

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{y} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3.$$

Решение. Если в некоторой декартовой системе координат векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  заданы своими разложениями

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3, \quad \vec{y} = y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + y^3\vec{e}_3,$$

то справедлива формула

$$\left[ \begin{array}{c} \vec{x}, \vec{y} \end{array} \right] = (x^2y^3 - x^3y^2)\vec{e}_1 + (x^3y^1 - x^1y^3)\vec{e}_2 + (x^1y^2 - x^2y^1)\vec{e}_3.$$

Применим эту формулу для решения задачи.

1) Вычисляем векторное произведение:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} \vec{x}, \vec{y} \end{array} \right] &= ((-2) \cdot (-6) - (-1) \cdot 1)\vec{e}_1 + ((-1) \cdot (-2) - 3 \cdot (-6))\vec{e}_2 + \\ &+ (3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2))\vec{e}_3 = 13\vec{e}_1 + 20\vec{e}_2 - \vec{e}_3. \end{aligned}$$

2) Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2} \left\| \left[ \begin{array}{c} \vec{x}, \vec{y} \end{array} \right] \right\|.$$

Вычисляем площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2} \left\| \left[ \begin{array}{c} \vec{x}, \vec{y} \end{array} \right] \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{13^2 + 20^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{169 + 400 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{570}. \otimes$$

**Пример 2.2.2.** Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}, \quad \vec{y} = 3\vec{a} + \vec{b},$$

если

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1 \text{ и } \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{6}.$$

**Решение.** Вычисляем векторное произведение, используя его свойства:

$$\begin{aligned} \left[ \vec{x}, \vec{y} \right] &= \left[ \vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b} \right] = 3 \left[ \vec{a}, \vec{a} \right] + \left[ \vec{a}, \vec{b} \right] + \\ &+ 9 \left[ \vec{b}, \vec{a} \right] + 3 \left[ \vec{b}, \vec{b} \right] = -8 \left[ \vec{a}, \vec{b} \right]. \end{aligned}$$

По определению площадь параллелограмма равна:

$$S = \left\| \left[ \vec{x}, \vec{y} \right] \right\| = 8 \left\| \left[ \vec{a}, \vec{b} \right] \right\| = 8 \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 4. \otimes$$

**Пример 2.2.3.** Найти орт вектора, перпендикулярного векторам

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{y} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

**Решение.** Предлагается решить задачу самостоятельно.  $\otimes$

**Пример 2.2.4.** Получить уравнение плоскости  $H^2 \subset R^3$ , проходящей через начало координат  $O$  и через две точки  $M_1(4; -2; 1)$ ,  $M_2(2; 4; -3)$ .

**Решение.** Радиус-векторы точек  $M_1$  и  $M_2$

$$\vec{x} \equiv \vec{OM}_1 = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{y} \equiv \vec{OM}_2 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

Нормальный вектор плоскости находим как векторное произведение, используя формулу

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \left[ \vec{OM}_1, \vec{OM}_2 \right] \equiv \left[ \vec{x}, \vec{y} \right] = \\ &= (x^2y^3 - x^3y^2)\vec{e}_1 + (x^3y^1 - x^1y^3)\vec{e}_2 + (x^1y^2 - x^2y^1)\vec{e}_3 =: \\ &= [(-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 4]\vec{e}_1 + [1 \cdot 2 - 4 \cdot (-3)]\vec{e}_2 + [4 \cdot 4 - (-2) \cdot 2]\vec{e}_3 = \end{aligned}$$

$$= 2 \vec{e}_1 + 14 \vec{e}_2 + 20 \vec{e}_3.$$

Из условия ортогональности радиус-вектора

$$\vec{OM} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3$$

текущей точки  $M$  плоскости её нормальному вектору

$$\left( \vec{N}, \vec{OM} \right) = 0,$$

получаем уравнение плоскости в неявном виде:

$$x^1 + 7x^2 + 10x^3 = 0. \quad \otimes$$

**Пример 2.2.5.** Найти угол между плоскостями, определяемыми уравнениями:

$$3x^1 - x^2 + 3 = 0, \quad x^1 - 2x^2 + 5x^3 - 10 = 0.$$

**Решение.** Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами

$$\vec{N}_1 = 3 \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{N}_2 = \vec{e}_1 - 2 \vec{e}_2 + 5 \vec{e}_3.$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \cos \left\{ \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right\} &= \frac{\left( \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right)}{\left\| \vec{N}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{N}_2 \right\|} = \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{30}} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$ .  $\otimes$

**Пример 2.2.6.** Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей с уравнениями

$$x^1 + x^2 + x^3 - 2 = 0, \quad x^1 - x^2 - 3x^3 + 6 = 0.$$

**Решение.** Проверяем, что плоскости не параллельны (то есть их нормальные векторы не коллинеарны), для чего проверяем пропорциональны или нет координаты нормальных векторов:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{-3}.$$

Координаты не пропорциональны, следовательно, нормальные векторы неколлинеарны, то есть плоскости не параллельны.

Так как прямая принадлежит обеим плоскостям, её направляющий вектор ортогонален нормальным векторам плоскостей, поэтому находим его как векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left[ \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right] = (x^2 y^3 - x^3 y^2) \vec{e}_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) \vec{e}_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) \vec{e}_3 = \\ &= [1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1)] \vec{e}_1 + [1 \cdot 1 - 1 \cdot (-3)] \vec{e}_2 + [1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1] \vec{e}_3 = \\ &= -2 \vec{e}_1 + 4 \vec{e}_2 - 2 \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Направляющий вектор прямой не параллелен ни одной из координатных плоскостей, поэтому прямая линия пересекает все три координатные плоскости. Найдём, например, точку пересечения прямой и плоскости  $X^1 O X^3$ , для чего решаем систему трёх уравнений

$$\begin{cases} x^1 + x^3 = 2, \\ x^1 - 3x^3 = -6 \\ x^2 = 0. \end{cases}$$

Получаем решение  $x_0^1 = 0$ ,  $x_0^2 = 0$ ,  $x_0^3 = 2$ .

Подставляя найденные координаты направляющего вектора и точки в канонические уравнения прямой линии, получаем канонические уравнения

$$\frac{x^1}{-2} = \frac{x^2}{4} = \frac{x^3 - 2}{-2}. \quad \otimes$$

**Пример 2.2.7.** Найти точку пересечения прямой линии с уравнениями

$$\frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 3}{1} = \frac{x^3 + 1}{-4},$$

и плоскости с уравнением  $x^1 + x^2 + 2x^3 - 9 = 0$ .

**Р е ш е н и е.** Проверяем, пересекается ли прямая линия с плоскостью, для чего находим скалярное произведение нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой линии:

$$\left( \vec{N}, \vec{l} \right) = \left( \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \right) = -6 \neq 0.$$

Векторы не ортогональны, а следовательно, прямая линия и плоскость не параллельны. Параметрические уравнения прямой линии имеют вид:

$$\begin{cases} x^1 = 2 + t, \\ x^2 = 3 + t, \\ x^3 = -1 - 4t. \end{cases}$$

Найдём значение параметра  $t_0$ , соответствующее точке пересечения прямой линии и плоскости, для чего подставим  $x^1, x^2, x^3$  из параметрических уравнений прямой линии в уравнение плоскости. Решая получившееся уравнение, найдём  $t_0 = -1$ . Подставляя найденное значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, находим координаты точки пересечения:

$$x_0^1 = 1, x_0^2 = 2, x_0^3 = 3. \otimes$$

**Пример 2.2.8.** Найти расстояние от точки  $M(1; 0; 1)$  до плоскости  $H^2$  с уравнением  $4x^1 + 6x^2 + 4x^3 - 25 = 0$ .

**Р е ш е н и е.** Расстояние от точки  $M$  до плоскости – это длина вектора  $\vec{M_0M}$  с начальной точкой  $M$  и конечной точкой  $M_0$  – проекцией точки  $M$  на плоскость  $H^2$ .

Проекция точки на плоскость – это основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость. Поэтому следует составить уравнение прямой линии, проходящей через точку  $M(1; 0; 1)$  перпендикулярно плоскости с уравнением

$$4x^1 + 6x^2 + 4x^3 - 25 = 0,$$

и найти точку её пересечения с плоскостью.

Если в качестве направляющего вектора прямой линии выбрать нормальный вектор

плоскости  $\vec{l} = \vec{N} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$ , то канонические уравнения прямой линии примут вид

$$\frac{x^1 - 1}{4} = \frac{x^2}{6} = \frac{x^3 - 1}{4},$$

откуда получаем параметрические уравнения

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 4t, \\ x^2 = 6t, \\ x^3 = 1 + 4t. \end{cases}$$

Подставляя общее выражение для координат текущей точки прямой линии из параметрических уравнений в уравнение плоскости, получаем уравнение для параметра, решение которого даёт для параметра значение

$$t_0 = \frac{1}{4},$$

соответствующее искомой точке пересечения прямой линии и плоскости.

Подставляя это значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, получаем находим искомые координаты проекции  $M_0$  точки  $M(1; 0; 1)$  на плоскость  $H^2$ :

$$x^1 = 2, x^2 = \frac{3}{2}, x^3 = 2.$$

Вектор

$$\vec{M_0M} = (2-1)\vec{e}_1 + \left(\frac{3}{2}-0\right)\vec{e}_2 + (2-1)\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Расстояние

$$\rho(M, H^2) = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{17}}{2}. \otimes$$

### Практическое занятие 3. Абстрактные векторные пространства

#### Предварительные сведения

Аддитивная абелева группа  $E$  называется **абстрактным векторным пространством** (над полем  $P$ ), если на ней определена внешняя бинарная операция – **умножение элементов группы  $E$  на элементы поля  $P$** , то есть  $(\forall x \in E)$  и  $(\forall \alpha \in P)$   $(\exists \alpha \cdot x \in E)$ , причём выполняются следующие аксиомы:

$$1) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;$$

$$2) \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$$

$$3) 1 \cdot x = x;$$

$$4) (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Простейшим примером векторного пространства является множество обычных трёхмерных векторов, которое изучалось выше. Здесь отметим лишь, что из определения векторного пространства следует, что

$$(\forall x \in E) -x = (-1)x,$$

где  $1$  – единица поля  $P$ , и

$$0x = 0.$$

В последнем равенстве  $0$  в левой части – это нуль поля  $P$ ,  $0$  в правой части равенства – это нулевой элемент из группы  $E$ . Элементы векторного пространства называются **абстрактными векторами**.

Система векторов  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset E$  называется **линейно независимой**, если

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0),$$

и **линейно зависимой** – в противном случае. Если векторное пространство содержит линейно независимую систему из  $n$  векторов, а любая система, содержащая  $n + 1$  векторов, уже линейно зависима, то говорят, что пространство  $E$  является  **$n$  мерным векторным пространством**. Любая линейно независимая система  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset E$  из  $n$  векторов образует **базис** пространства. Любой вектор  $x \in E$  можно представить в виде разложения

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

где коэффициенты разложения называются **координатами** вектора относительно заданного базиса. Подмножество  $L \in E$  называется **линейным многообразием** в  $E$ , если

$$(\forall \alpha, \beta \in P)(x, y \in L) \Rightarrow (\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in L).$$

Остальные определения теории векторных пространств, в том числе евклидовых, приведены выше на страницах 25-28.

### Примеры с решением

**Пример 2.3.1.** Пусть  $P$  – числовое поле. На множестве объектов

$$P^n = \left\{ |a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, a_k \in P \right\},$$

которые назовём вектор-столбцами, определим операции сложения вектор-столбцов и умножения вектора-столбца на числа из поля  $P$ :

$$1) (\forall |a\rangle, |b\rangle \in P^n) |a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \$$$



$$2) (\forall |a\rangle \in P^n) \text{ и } (\forall \alpha \in P) \alpha \cdot |a\rangle = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \dots \\ \alpha \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

Показать, что множество  $P^n$  является  $n$ -мерным векторным пространством.

**Р е ш е н и е.** Для доказательства требуется проверить выполнение всех аксиом векторного пространства и построить хотя бы один базис из вектор-столбцов.

**Аксиомы сложения.**

1) Аксиома ассоциативности выполняется в силу ассоциативности операции сложения в поле  $P$ , действительно

$$\begin{aligned} [|a\rangle + |b\rangle] + |c\rangle &= \left[ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ \dots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ \dots \\ a_n + (b_n + c_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \dots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \right] = |a\rangle + [|b\rangle + |c\rangle]. \end{aligned}$$

2) Аксиома коммутативности выполняется в силу коммутативности операции сложения в поле  $P$ , действительно

$$|a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ \dots \\ b_n + a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = |b\rangle + |a\rangle$$

3) Вектор-нуль определим так

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома о нейтральном элементе выполняется, действительно имеем:

$$(\forall |a\rangle \in P^n) |a\rangle + |0\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ \dots \\ a_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

4) Противоположный вектор-столбец определим так

$$(\forall |a\rangle \in P^n) -|a\rangle = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома об обратном (противоположном элементе) выполняется, действительно имеем:

$$|a\rangle + (-|a\rangle) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_1 \\ a_2 - a_2 \\ \dots \\ a_n - a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Аксиомы умножения вектор-столбца на числа.** Аналогично показывается, что выполняются аксиомы умножения вектор-столбца на числа:

1)  $(\forall |a\rangle \in P^n)$  и  $(\forall \alpha \in P)$

$$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha \left[ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \alpha(a_1 + b_1) \\ \alpha(a_2 + b_2) \\ \dots \\ \alpha(a_n + b_n) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix};$$

2)  $(\forall \alpha, \beta \in P)$

$$(\alpha + \beta)|a\rangle = (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)a_1 \\ (\alpha + \beta)a_2 \\ \dots \\ (\alpha + \beta)a_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle;$$

$$3) 1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix};$$

$$4) (\alpha\beta)|a\rangle = (\alpha\beta) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)a_1 \\ (\alpha\beta)a_2 \\ \dots \\ (\alpha\beta)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta a_1) \\ \alpha(\beta a_2) \\ \dots \\ \alpha(\beta a_n) \end{pmatrix} = \dots = \alpha[\beta|a\rangle],$$

Таким образом, все аксиомы векторного пространства выполняются и, следовательно, множество  $P^n$  является векторным пространством.

Рассмотрим следующее тождественное преобразование:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из этого разложения видно, что в силу произвольности вектор-столбца  $|a\rangle$ , он представлен разложением по вектор-столбцам специального вида

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система этих вектор-столбцов образует простейший, или *канонический* базис в векторном пространстве  $P^n$ .

Теперь очевидно, что множество  $P^n$  является  $n$ -мерным векторным пространством.  $\otimes$

**Пример 2.3.2.** Показать, что если система векторов  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{matrix} \right\}$  линейно независима, то

и любая её подсистема также линейно независима.

**Решение.** Пусть  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{matrix} \right\}$  – подсистема данной системы, то есть  $m < n$ .

Предположим, что условие задачи неверно, то есть подсистема  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{matrix} \right\}$  линейно за-

висима. Тогда можно подобрать такие числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , не все равные нулю одновременно, что справедливо тождество

$$\alpha_1 \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1 \end{matrix} + \alpha_2 \begin{matrix} \rightarrow \\ x_2 \end{matrix} + \dots + \alpha_m \begin{matrix} \rightarrow \\ x_m \end{matrix} = \begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix}.$$

Учитывая свойство нуля вектора

$$\left( \forall x \in X \right) \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} + \begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} = \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix},$$

добавим его в обе части последнего тождества, представив его в виде линейной комбинации оставшихся векторов исходной системы с нулевыми коэффициентами

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix} x_{m+1} + \dots + \begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix} x_n.$$

Получаем

$$\alpha_1 \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1 \end{matrix} + \alpha_2 \begin{matrix} \rightarrow \\ x_2 \end{matrix} + \dots + \alpha_m \begin{matrix} \rightarrow \\ x_m \end{matrix} + \begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix} x_{m+1} + \dots + \begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix} x_n = \begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix},$$

то есть линейная комбинация векторов исходной системы с коэффициентами, не все из которых равны нулю одновременно, даёт нулевой вектор. По определению это означает линейную зависи-

мость векторов системы  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{matrix} \right\}$ , что противоречит условию задачи.

Следовательно, предположение о линейной зависимости *произвольной* подсистемы

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \end{matrix} \right\} \text{ линейно независимой системы } \left\{ \begin{matrix} \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \end{matrix} \right\} \text{ не верно. } \otimes$$

**Пример 2.3.3.** Показать, что система из двух векторов линейно зависима в том и только в том случае, если векторы коллинеарны.

**Решение. Необходимость.** Если из двух векторов  $\left\{ \begin{matrix} \vec{x}, \vec{y} \end{matrix} \right\}$  хотя бы один равен нулю

вектору, то векторы коллинеарны. Поэтому предположим, что векторы  $\vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0}$ . Пусть

система  $\left\{ \begin{matrix} \vec{x}, \vec{y} \end{matrix} \right\}$  линейно зависима. Покажем, что векторы коллинеарны. По определению

найдутся такие числа  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , что

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{0},$$

причём эти числа не равны нулю одновременно.

Пусть  $\beta \neq 0$ . Тогда получаем:

$$\vec{y} = \left( -\frac{\alpha}{\beta} \right) \vec{x}.$$

Обозначая  $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ , получим

$$\vec{y} = \lambda \vec{x},$$

то есть по определению векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны.

**Достаточность.** Пусть теперь векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны, покажем, что система

$\left\{ \begin{matrix} \vec{x}, \vec{y} \end{matrix} \right\}$  линейно зависима. По определению коллинеарности имеем, например:

$$\vec{y} = \lambda \vec{x}.$$

Пусть  $\nu \neq \mathbf{0}$ , тогда можем записать

$$\vec{y} = \frac{\lambda}{\nu} \vec{x},$$

откуда получаем

$$\nu \vec{y} = \lambda \vec{x},$$

или

$$\mu \vec{x} + \nu \vec{y} = \mathbf{0},$$

где  $\mu = -\lambda \nu$ . Так как  $\lambda \neq \mathbf{0}$  и  $\nu \neq \mathbf{0}$ , то система векторов  $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$  линейно зависима.  $\otimes$

**Пример 2.3.4.** Показать, что система трёх векторов пространства  $R^3$  линейно зависима в том и только в том случае, если векторы компланарны.

**Решение.** Предположим, что никакие два вектора из тройки векторов  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  не коллинеарны (в противном случае система векторов заведомо будет линейно зависимой).

*Необходимость.* Пусть система  $\left\{ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \right\}$  линейно зависима, покажем, что векторы системы компланарны. В силу линейной зависимости системы, можно подобрать три неравных одновременно нулю числа  $\alpha, \beta, \gamma \in R$  так, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = \mathbf{0}.$$

Пусть, например,  $\gamma \neq \mathbf{0}$ . Тогда имеем:

$$\vec{z} = \left( -\frac{\alpha}{\gamma} \right) \vec{x} + \left( -\frac{\beta}{\gamma} \right) \vec{y}.$$

Приложив векторы  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  к общей точке  $O$ , легко видеть, что вектор  $\vec{z}$  равен диагонали параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = \left( -\frac{\alpha}{\gamma} \right) \vec{x}, \vec{b} = \left( -\frac{\beta}{\gamma} \right) \vec{y},$$

а это и означает, что они лежат в одной плоскости, то есть компланарны.

*Достаточность.* Пусть векторы  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  компланарны, покажем, что система

$\left\{ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \right\}$  линейно зависима. Доказательство почти очевидно. Действительно, компланарность

векторов означает, что справедливо, например, равенство

$$\vec{x} = \mu \vec{y} + \lambda \vec{z}.$$

Следовательно, один из векторов системы линейно выражается через два других. Тогда из свойств

линейно зависимых систем векторов следует линейная зависимость системы векторов  $\left\{ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \right\}$

⊗

**Пример 2.3.5.** Выяснить вопрос о линейной зависимости или линейной независимости следующей системы вектор-столбцов:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |a_4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Составим линейную комбинацию векторов системы с произвольными коэффициентами и потребуем, чтобы её значением был нуль вектор-столбец:

$$\alpha_1 |a_1\rangle + \alpha_2 |a_2\rangle + \alpha_3 |a_3\rangle + \alpha_4 |a_4\rangle = |0\rangle \Rightarrow$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя правила выполнения операций с вектор-столбцами, получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Совершая последовательные подстановки из первого уравнения во второе, из второго в третье и так далее, получаем, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

что и доказывает линейную независимость данной системы вектор-столбцов.  $\otimes$

**Пример 2.3.6.** Пусть

$$\left\{ \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_m, & a_{m+1}, & \dots, & a_{n-1}, & a_n \end{matrix} \right\}$$

– некоторая система векторов векторного пространства и пусть

$$\left\{ \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_m \end{matrix} \right\},$$

– её максимальная по числу векторов линейно независимая подсистема.

Показать, что любой из векторов  $\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ a_{m+1}, & \dots, & a_{n-1}, & a_n \end{matrix}$  можно выразить в виде разложения

по векторам подсистемы  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_m \end{matrix} \right\}$ .

**Решение.** Так как подсистема  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_m \end{matrix} \right\}$  – максимальная по числу векторов

линейно независимая система, то добавляя к ней любой из оставшихся векторов, например, вектор

$\begin{matrix} \rightarrow \\ a_{m+1} \end{matrix}$ , получим уже линейно зависимую систему

$$\left\{ \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_m, & a_{m+1} \end{matrix} \right\}.$$

Следовательно, можно подобрать такие неравные одновременно нулю числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ , что выполняется равенство



$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}.$$

В этом равенстве  $\alpha_{m+1} \neq 0$  так как в противном случае имели бы равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0},$$

в котором не все коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  одновременно равны нулю. Но тогда система

векторов  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\}$  будет линейно зависимой, что противоречит условию задачи.

Из равенства

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}$$

следует, что

$$\vec{a}_{m+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_m.$$

Вводя обозначения

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}}, \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}}, \dots, \beta_m = -\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}},$$

получаем

$$\vec{a}_{m+1} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_m \vec{a}_m,$$

что и доказывает сформулированное утверждение.  $\otimes$

**Пример 2.3.7.** Дана система функций

$$\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}.$$

Показать, что эта система функций является линейно независимой в пространстве функций, непрерывных на промежутке  $(-\infty, +\infty)$ .

**Решение.** По определению линейной независимости условие

$$\alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t} = 0 \quad (\forall t \in (-\infty, +\infty))$$

влечёт за собой выполнение условия  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

Составим СЛАУ для коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Для этого положим в тождестве  $t = 0$ , получим

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Дифференцируя тождество по  $t$  и полагая  $t = 0$ , получим

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0.$$

Дифференцируя тождество ещё раз и, снова полагая  $t = 0$ , получим

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0.$$

Объединяя полученные равенства в систему уравнений для неизвестных коэффициентов, получим

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, применяя метод Гаусса, получаем единственное решение

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Таким образом, система функций  $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$  является базисом подмножества функций, непрерывных на промежутке  $(-\infty, +\infty)$ . Поэтому множество функций вида

$$f(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + \lambda e^{3t}$$

образует подпространство в пространстве таких функций.  $\otimes$

**Пример 2.3.8.** Используя процедуру ортогонализации Шмидта, ортонормировать систему

векторов  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \right\} \subset E^4$ , заданных в некотором ортонормированном базисе

$\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \right\} \subset E^4$  своими разложениями:

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ g_1 = & e_1 + & e_2 + & e_3 + & e_4, \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ g_2 = & e_1 + & e_2 - & 3e_3 - & 3e_4, \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ g_3 = & 4e_1 + & 3e_2 + & 0e_3 - & e_4. \end{matrix}$$

Решение. Для ортогонализации системы векторов

$$\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\} \subset E^4$$

воспользуемся формулами процедуры ортогонализации Шмидта.

Для этого положим

$$\vec{a}_1 = \vec{g}_1,$$

то есть

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \vec{a}_2 &= \vec{g}_2 - \frac{\left( \vec{a}_1, \vec{g}_2 \right)}{\|\vec{a}_1\|^2} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \\ & - \frac{1}{4}(-4) \left( \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4; \\ \vec{a}_3 &= \vec{g}_3 - \frac{\left( \vec{a}_1, \vec{g}_3 \right)}{\|\vec{a}_1\|^2} \vec{a}_1 - \frac{\left( \vec{a}_2, \vec{g}_3 \right)}{\|\vec{a}_2\|^2} \vec{a}_2 = \\ & = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_4 - \frac{3}{2} \left( \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right) - \\ & - \left( 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 \right) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4. \end{aligned}$$

Для получения ортонормированной системы, векторы системы нормируем:

$$\vec{e}_{a1} = \frac{1}{2} \left( \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{e}_{a2} = \frac{1}{4} \left( 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{e}_{a3} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов  $\left\{ \vec{e}_{a1}, \vec{e}_{a2}, \vec{e}_{a3} \right\}$  ортонормиро-

ванная.  $\otimes$

**Пример 2.3.9.** Показать, что линейная оболочка  $L\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2 \right\}$ , где элементы  $L$  вычисля-

ются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x, \quad \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left( \vec{g}_1, \vec{g}_2 \right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2} \cdot (\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x, \quad \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

**Решение.** Находим скалярное произведение и скалярные квадраты векторов предполагаемого базиса:

$$\left( \vec{e}_1, \vec{e}_1 \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1;$$

$$\left( \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0;$$

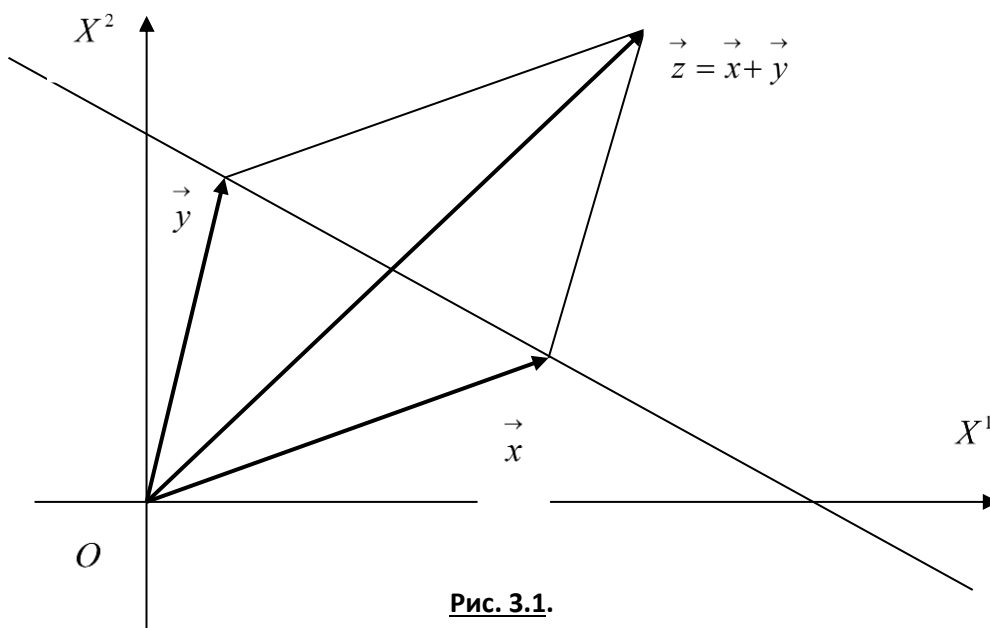
$$\left( \vec{e}_2, \vec{e}_2 \right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1 - 1) = 2 - 1 = 1.$$

Видим, что система векторов  $\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{matrix} \right\}$  является ортонормированной и, следовательно, её можно

принять за один из базисов линейного многообразия  $L$ .  $\otimes$

**Пример 2.3.10.** Пусть  $X$  – множество ведущих радиус-векторов точек прямой линии. Операции в этом множестве введены обычным образом. Выяснить, является ли это множество векторным подпространством евклидова пространства  $R^2$ .

**Решение.** 1) Пусть прямая не проходит через начало системы координат (рисунок 3.1).



**Рис. 3.1.**

Очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии не принадлежит множеству  $X$ , так как конечная точка радиус-вектора их суммы не лежит на данной прямой линии. Следовательно, операция сложения векторов в данном случае не является алгебраической. Множество  $X$  не является векторным подпространством пространства  $R^2$ .

2) Если прямая линия проходит через начало системы координат, то очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии принадлежит множеству  $X$  и, следовательно, операция сложения векторов в данном случае является алгебраической. Множество  $X$  является векторным подпространством пространства  $R^2$ .  $\otimes$

**Пример 2.3.11.** Дана система функций

$$\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}.$$

Показать, что множество функций вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t,$$

где  $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}^1$ , является подпространством векторного пространства функций, непрерывных на промежутке  $(-\pi, \pi)$ .

**Решение.** Покажем сначала, что система функций

$$\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$$

является линейно независимой на промежутке  $(-\pi, \pi)$ .

В соответствие с определением линейной независимости потребуем выполнения условия

$$\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + \alpha_3 \sin 2t = 0.$$

При различных значениях  $t \in (-\pi, \pi)$  получаем бесконечное множество систем линейных алгебраических уравнений. Положим, например,

$$t = 0, \quad t = \frac{\pi}{6}, \quad t = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_3 = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система уравнений. Решая СЛАУ методом Гаусса, получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Поэтому система функций  $\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$  линейно независима на промежутке  $(-\pi, \pi)$ .

Легко видеть, что любая функция вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t$$

является линейной комбинацией функций системы  $\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$ , что и доказывает требуемой.  $\otimes$

**Пример 2.3.12.** Показать, что система векторов

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\} \subset E^4,$$

заданных в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства  $E^4$

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$$

разложениями

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2 + a_1^3 \vec{e}_3 + a_1^4 \vec{e}_4 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= a_2^1 \vec{e}_1 + a_2^2 \vec{e}_2 + a_2^3 \vec{e}_3 + a_2^4 \vec{e}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{aligned} \quad (1)$$

линейно независима. Дополнить систему до ортонормированного базиса всего пространства  $E^4$ .

**Решение.** Находим значение скалярного произведения:

$$\left( \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right) = \left( \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right) = 0.$$

Следовательно, система векторов  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$  ортогональна.

Для того чтобы дополнить эту систему до ортогонального базиса пространства евклидова  $E^4$ , найдём векторы

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4$$

такие, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \left( \vec{x}, \vec{a}_1 \right) = 0, \\ \left( \vec{x}, \vec{a}_2 \right) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Из условий (2) получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решаем СЛАУ (3) методом Гаусса, принимая  $x^3$  и  $x^4$  за свободные неизвестные, то есть, например, полагая  $x^3 = a$  и  $x^4 = b$ . Полученное решение СЛАУ (3) записывается в виде

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

или

$$\vec{x} = a \vec{a}_3 + b \vec{a}_4,$$

где векторы фундаментальной системы решений

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 0\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 0\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Легко проверяется, что фундаментальная система  $\left\{ \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$  ортогональна и в совокупности с векторами  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$  также образует ортогональную систему  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$ . Для

получения ортонормированного базиса пространства  $E^4$  нормируем векторы этой системы:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} = \frac{1}{2} \left( \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_2\|} = \frac{1}{2} \left( \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right);$$



$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \right);$$

$$\vec{h}_4 = \frac{\vec{a}_4}{\|\vec{a}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\vec{e}_2 + \vec{e}_4 \right).$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов  $\left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3, \vec{h}_4 \right\}$  ортонормирована.  $\otimes$

вана.  $\otimes$

**Пример 2.3.13.** В евклидовом пространстве  $E^4$  в некотором ортонормированном базисе

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$$

задана система векторов:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4, \quad \vec{a}_2 = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 - 5\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, можно ли на векторах этой системы как на направляющих векторах построить подпространство  $H^2$  пространства  $E^4$ . Если это возможно, то написать параметрические уравнения подпространства  $H^2$ .

2) Найти базис  $\left\{ \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$  и построить ортогональное дополнение  $H^{2\perp}$  к подпространству  $H^2$ , записать параметрические уравнения ортогонального дополнения  $H^{2\perp}$ .

Решение. 1) Координаты векторов системы  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$  непропорциональны – векторы неколлинеарны. Следовательно, система векторов  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$  линейно независимая. Векторы системы могут служить одним из базисов (быть направляющими векторами) линейного двумерного

Решение. 1) Координаты векторов системы  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$  непропорциональны – векторы

неколлинеарны. Следовательно, система векторов  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$  линейно независимая. Векторы системы могут служить одним из базисов (быть направляющими векторами) линейного двумерного

стемы могут служить одним из базисов (быть направляющими векторами) линейного двумерного

многообразия. Векторное параметрическое уравнение такого многообразия в общем случае имеет вид

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2,$$

где  $\vec{x}_0$  – вектор сдвига многообразия. Если  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ , то многообразие превращается в подпространство. В последнем случае ведущий вектор точек этого многообразия превращается в текущий вектор подпространства и представляется в виде:

$$\vec{x} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2.$$

Откуда имеем параметрические уравнения подпространства:

$$\begin{cases} x^1 = t_1 - 3t_2, \\ x^2 = 2t_1 + 4t_2, \\ x^3 = -3t_1 + 3t_2, \\ x^4 = t_1 - 5t_2. \end{cases}$$

Таким образом, подпространство является, очевидно, двумерной плоскостью, проходящей через начало системы координат.

2) Пусть

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4$$

– произвольный вектор из ортогонального дополнения  $H^\perp$ . Так как система  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$  – базис

подпространства  $H$ , то должны выполняться условия

$$\begin{cases} \left( \vec{a}_1, \vec{x} \right) = 0, \\ \left( \vec{a}_2, \vec{x} \right) = 0. \end{cases}$$

Эти условия приводят к СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 3x^3 + x^4 = 0, \\ -3x^1 + 4x^2 + 3x^3 - 5x^4 = 0. \end{cases}$$

Применение метода Гаусса приводит к следующему результату: СЛАУ совместна и неопределённа, а множество её решений выражается следующей формулой

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5}a - \frac{7}{5}b \\ \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где  $a$  и  $b$  – свободные неизвестные. Следовательно, имеем векторное подпространство с направляющими векторами

$$\vec{a}_3 = \frac{9}{5}\vec{e}_1 + \frac{3}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{a}_4 = -\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_4.$$

Нетрудно проверить, что полученные векторы  $\left\{ \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$  образуют линейно независимую

систему, а любая их линейная комбинация ортогональна любой линейной комбинации векторов  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ .

Следовательно, на этих векторах можно построить ортогональное дополнение  $H^{2\perp}$ , параметрические уравнения которого имеют вид, аналогичный параметрическим уравнениям подпространства  $H^2$ :

$$\begin{cases} x^1 = \frac{9}{5}\tau_1 - \frac{7}{5}\tau_2, \\ x^2 = \frac{3}{5}\tau_1 + \frac{1}{5}\tau_2, \otimes \\ x^3 = \tau_1, \\ x^4 = \tau_2. \end{cases}$$

**Пример 2.3.14.** В аффинном пространстве  $A^4$  координатами относительно репера  $\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$  заданы четыре точки:

$$A_1(1; 4; 2; 0), A_2(3; 7; 3; 2), A_3(2; 6; 3; -1), A_4(1; 4; 5; 2).$$

Получить уравнения гиперплоскости, проходящей через заданные точки.

Решение. Обозначим точку  $A_1$  через  $O^* \equiv A_1$  и примем её за начало репера на гиперплоскости  $H^3 \subset A^4$ .

Рассмотрим векторы:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= O^* A_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= O^* A_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 &= O^* A_4 = 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4. \end{aligned} \quad (1)$$

Требуя, чтобы для линейной комбинации этих векторов выполнялось условие

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0},$$

решая вытекающую из этого условия СЛАУ для неопределённых коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  методом Гаусса, выясняем, что данное условие выполняется только при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Из

этого результата заключаем, что система векторов  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$  линейно независима и её

можно выбрать в качестве базиса репера

$$\left\{ O^*, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$$

на гиперплоскости  $H^3 \subset A^4$ .

Пусть  $M(x^1; x^2; x^3; x^4)$  – текущая точка гиперплоскости, координаты которой опре-

делены относительно репера  $\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$  вмещающего пространства  $A^4$ . Тогда её

радиус-векторы  $\vec{OM}$  относительно репера  $\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$  пространства  $A^4$  и

$\vec{O}^*M$  относительно репера  $\left\{ \vec{O}^*, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$  гиперплоскости  $H^3 \subset A^4$  могут быть, со-

ответственно, представлены в виде разложений:

$$\begin{aligned} \vec{x} &\equiv \vec{OM} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4, \\ \vec{O}^*M &= t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + t_3 \vec{a}_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Векторное уравнение гиперплоскости имеет вид:

$$\vec{x} = x_0 \vec{e}_1 + \vec{O}^*M, \quad (3)$$

где

$$x_0 \equiv \vec{OO}^* = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3. \quad (4)$$

Подставляя (1), (2) и (4) в (3), получаем *параметрические уравнения*

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x^2 = 4 + 3t_1 + 2t_2, \\ x^3 = 2 + t_1 + t_2 + 3t_3, \\ x^4 = 2t_1 - t_2 + 2t_3, \end{cases} \quad (5)$$

гиперплоскости  $H^3 \subset A^4$ . Для получения неявного уравнения гиперплоскости выразим три параметра  $t_1, t_2, t_3$  из первых трёх уравнений (5), решая СЛАУ

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 = x^1 - 1, \\ 3t_1 + 2t_2 = x^2 - 4, \\ t_1 + t_2 + 3t_3 = x^3 - 2 \end{cases} \quad (6)$$

методом Гаусса, и подставим их в четвёртое уравнение. В процессе решения устанавливаем, что СЛАУ совместна и имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2x^1 - x^2 + 2; \\ t_2 &= -3x^1 + 2x^2 - 5; \end{aligned}$$

$$t_3 = \frac{1}{3}x^1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}.$$

Подстановка в четвёртое из уравнений (5) приводит к неявному уравнению гиперплоскости

$H^3 \subset A^4$ , проходящей через заданные четыре точки:

$$23x^1 - 14x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 29 = 0. \otimes$$

## Практическое занятие 4. Линейные операторы, матрицы,

### определители и СЛАУ

#### Предварительные сведения

**Оператор** – это отображение  $\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n$ . Оператор называется линейным, если  $(\forall \alpha, \beta \in R^1) \wedge (\forall \vec{x}, \vec{y} \in X^m): \hat{A}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \hat{A} \vec{x} + \beta \hat{A} \vec{y}$ .

При фиксированных базисах в

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m \right\} \subset X^m \text{ и } \left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n \right\} \subset Y^n$$

линейный оператор имеет своим представителем **матрицу**:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы по столбцам находятся как коэффициенты разложения образов  $\vec{y} \in Y^n$  векторов  $\vec{x} \in X^m$  по базису пространства  $Y^n$ .

Действия с линейными операторами определяются следующим образом. Если

$$\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n, \hat{B}: X^m \rightarrow Y^n,$$

то

$$\hat{C} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow \left( \forall \vec{x} \in X^m \right) \hat{C} \vec{x} = \hat{A} \vec{x} + \hat{B} \vec{x}.$$

Матричные элементы матрицы суммы операторов вычисляются по формуле  $c_j^i = a_j^i + b_j^i$ .

Произведение оператора на число

$$\hat{T} = \alpha \hat{A} \Leftrightarrow \left( \forall \vec{x} \in X^m \right) \hat{C} \vec{x} = \alpha \left( \hat{A} \vec{x} \right).$$

Матричные элементы матрицы произведения на число вычисляются по формуле  $c_j^i = \alpha a_j^i$ .

Если  $\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n$  и  $\hat{B}: X^m \rightarrow Y^n$ , то композиция операторов  $\hat{C} = \hat{B} \circ \hat{A}$ :

$$\hat{C} \vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \hat{B} \hat{A} \right) \vec{x} = \hat{B} \left( \hat{A} \vec{x} \right).$$

Элементы матрицы композиции линейных операторов находятся по формуле

$$c_k^i = \sum_{j=1}^n b_j^i a_k^j.$$

Формула разложения определителя матрицы оператора  $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$  по элементам любой строки или любого столбца определителя, например для столбца с номером  $k$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_k^i M_k^i = \\ &= (-1)^{1+k} a_k^1 M_k^1 + (-1)^{2+k} a_k^2 M_k^2 + \dots + (-1)^{n+k} a_k^n M_k^n. \end{aligned}$$

### Примеры с решением

**Пример 2.4.1.** В пространстве  $R^3$  оператор  $\hat{P}$  действует по правилу

$$\left( \forall \vec{x} \in R^3 \right) \hat{P} \vec{x} = x^1 \vec{e}_1,$$

то есть ставит в соответствие произвольному вектору  $\vec{x}$  его координатную проекцию на ось  $OX^1$ . Показать, что оператор линейный и найти его матрицу.

**Решение.** покажем, что оператор линейный. По определению для линейного оператора справедливо равенство:

$$\hat{P} \left( \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 \right) = \alpha_1 \hat{P} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{P} \vec{x}_2.$$

Проверим его выполнение для заданного оператора:

$$\begin{aligned}
& \hat{P}\left(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2\right) = \\
& = \hat{P}\left[\alpha_1\left(x_1^1 \vec{e}_1 + x_1^2 \vec{e}_2 + x_1^3 \vec{e}_3\right) + \alpha_2\left(x_2^1 \vec{e}_1 + x_2^2 \vec{e}_2 + x_2^3 \vec{e}_3\right)\right] = \\
& = \hat{P}\left[\left(\alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_2^1\right) \vec{e}_1 + \left(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2\right) \vec{e}_2 + \left(\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3\right) \vec{e}_3\right] = \\
& = \left(\alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_2^1\right) \vec{e}_1 = \alpha_1 x_1^1 \vec{e}_1 + \alpha_2 x_2^1 \vec{e}_1 = \alpha_1 \hat{P} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{P} \vec{x}_2.
\end{aligned}$$

Определение выполняется и оператор  $\hat{P}$  линейный.

Действуя оператором  $\hat{P}$  последовательно на базисные векторы, получаем:

$$\hat{P} \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3,$$

$$\hat{P} \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3,$$

$$\hat{P} \vec{e}_3 = 0 \cdot \vec{e}_1 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3.$$

Теперь матрица оператора принимает следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор  $\hat{P}$  называется *оператором ортогонального проектирования на ось  $OX^1$* .  $\otimes$

**Пример 2.4.2.** Показать, что оператор  $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ , действующий по правилу

$$\left(\forall x \in R^3\right) \hat{A} x = \left[\vec{a}, \left[\vec{x}, \vec{b}\right]\right],$$

где фиксированные векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  заданы своими разложениями

$$\vec{a} = 2 \vec{e}_1 + 4 \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$



по каноническому базису, является линейным, и найти его матрицу.

Решение. Из свойств векторного произведения следует, что:

$$\begin{aligned} \hat{A}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) &= \left[ \vec{a}, \left[ \alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \vec{b} \right] \right] = \left[ \vec{a}, \alpha \left[ \vec{x}, \vec{b} \right] + \beta \left[ \vec{y}, \vec{b} \right] \right] = \\ &= \alpha \left[ \vec{a}, \left[ \vec{x}, \vec{b} \right] \right] + \beta \left[ \vec{a}, \left[ \vec{y}, \vec{b} \right] \right] = \alpha \hat{A} \vec{x} + \beta \hat{A} \vec{y}. \end{aligned}$$

Матрицу оператора определяем, находя образы базисных векторов. При этом возможны три варианта решения:

- 1) использовать свойства векторного произведения;
- 2) использовать формулу для вычисления векторного произведения;
- 3) использовать для двойного векторного произведения формулу

$$\left[ \vec{A}, \left[ \vec{B}, \vec{C} \right] \right] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}).$$

Используем второй вариант решения, находя векторное произведение

$$\hat{A} \vec{e}_k = \left[ \vec{a}, \left[ \vec{e}_k, \vec{b} \right] \right]$$

по формуле

$$\left[ \vec{x}, \vec{y} \right] = (x^2 y^3 - x^3 y^2) \vec{e}_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) \vec{e}_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) \vec{e}_3.$$

Пусть  $k = 1$ , тогда получаем:

$$\left[ \vec{e}_1, \vec{b} \right] = (0 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) \vec{e}_1 + (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \vec{e}_2 + (1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Далее имеем:

$$\hat{A} \vec{e}_1 = \left[ \vec{a}, \left[ \vec{e}_1, \vec{b} \right] \right] = -5 \vec{e}_1 + 2 \vec{e}_2 - 2 \vec{e}_3.$$

Аналогично находим:

$$\hat{A} \vec{e}_2 = \left[ \vec{a}, \left[ \vec{e}_2, \vec{b} \right] \right] = -4 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4 \vec{e}_3,$$

$$\hat{A} \vec{e}_3 = \left[ \vec{a}, \left[ \vec{e}_3, \vec{b} \right] \right] = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Матрица оператора имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}. \otimes$$

**Пример 2.4.3.** Показать, что если  $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \subset X^n$  – линейно зависящая система векторов, то и система образов  $\left\{ \hat{A} \vec{x}_1, \hat{A} \vec{x}_2, \dots, \hat{A} \vec{x}_m \right\} \subset X^n$  при действии линей-

ного оператора  $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$  также линейно зависящая.

**Решение.** Составим справедливое в силу линейной зависимости системы векторов равенство

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0},$$

где не все коэффициенты  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$  равны нулю одновременно. Действуя на обе части последнего равенства оператором  $\hat{A}$ , в силу его линейности получаем:

$$\alpha_1 \hat{A} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{A} \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \hat{A} \vec{x}_m = \vec{0},$$

Так как среди коэффициентов  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$  есть ненулевые, то система образов

$$\left\{ \hat{A} \vec{x}_1, \hat{A} \vec{x}_2, \dots, \hat{A} \vec{x}_m \right\}$$

линейно зависима.  $\otimes$

**Пример 2.4.4.** Показать, что если система

$$\left\{ \hat{A} \vec{x}_1, \hat{A} \vec{x}_2, \dots, \hat{A} \vec{x}_m \right\} \subset X^n$$

образов векторов системы

$$\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{matrix} \right\} \subset X^n$$

при действии оператора  $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$  линейно независимая, то и сама система

$$\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{matrix} \right\} \subset X^n \text{ также линейно независима.}$$

Решение. Для системы векторов  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{matrix} \right\}$  потребуем выполнения равенства

нуль вектору линейной комбинации, предполагая, что не все коэффициенты её равны нулю одновременно

$$\alpha_1 \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1 \end{matrix} + \alpha_2 \begin{matrix} \rightarrow \\ x_2 \end{matrix} + \dots + \alpha_m \begin{matrix} \rightarrow \\ x_m \end{matrix} = \begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix},$$

то есть предположим, что система  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{matrix} \right\}$  линейно зависима.

Действуя на обе части равенства оператором  $\hat{A}$ , получим

$$\alpha_1 \begin{matrix} \hat{\rightarrow} \\ \hat{A} x_1 \end{matrix} + \alpha_2 \begin{matrix} \hat{\rightarrow} \\ \hat{A} x_2 \end{matrix} + \dots + \alpha_m \begin{matrix} \hat{\rightarrow} \\ \hat{A} x_m \end{matrix} = \begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \end{matrix},$$

где в силу линейной независимости системы образов векторов

$$\left\{ \begin{matrix} \hat{\rightarrow} \\ \hat{A} x_1, \hat{A} x_2, \dots, \hat{A} x_m \end{matrix} \right\}$$

выполняется условие

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0.$$

Следовательно, предположение о линейной зависимости системы векторов

$$\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{matrix} \right\}$$

неверное. Система линейно независима.  $\otimes$

**Пример 2.4.5.** Пусть  $\begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \in R^3$  – произвольный вектор. Вычислить коммутатор

$$\left[ \hat{A}, \hat{B} \right] \vec{x} \equiv \left( \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \right) \vec{x}$$

операторов  $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$  и  $\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$ , представленных в каноническом базисе пространства  $R^3$  своими матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Коммутатор операторов – коммутатор их матриц, равен:

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 32 & 22 & 16 \\ 8 & 16 & 26 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 4 & 14 \\ 15 & 12 & 23 \\ 14 & 20 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \\ -2 & -12 & -22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Находим коммутатор операторов – результат воздействия оператора  $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  на произвольный вектор  $\vec{x} \in R^3$ , для чего находим координаты образа вектора:

$$(AB - BA)\vec{x} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \\ -2 & -12 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x^1 + 18x^2 + 2x^3 \\ -7x^1 + 4x^2 + 3x^3 \\ -2x^1 - 12x^2 - 22x^3 \end{pmatrix}.$$

Теперь образ вектора равен:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{A}, \hat{B} \right] \vec{x} &= \left( \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \right) \vec{x} = (18x^1 + 18x^2 + 2x^3) \vec{e}_1 + \\ &+ (-7x^1 + 4x^2 + 3x^3) \vec{e}_2 + (-2x^1 - 12x^2 - 22x^3) \vec{e}_3. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 2.4.6.** В каноническом базисе трёхмерного пространства  $R^3$  действия операторов

$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$  и  $\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$  на произвольный вектор  $\vec{x} \in R^3$  заданы соотношениями:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора  $\left(2\hat{A} + \hat{A}\hat{B}\right)\vec{x}$ .

**Решение.** Находим матрицы операторов, исходя из координатной формы записи действия оператора в фиксированном базисе:

$$A|x\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 \\ a_1^3 x^1 + a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая данные условия задачи с координатной формулой действия оператора, находим их матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Производим указанные в условии задачи действия с матрицами:

$$\begin{aligned} 2A + AB &= 2 \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -10 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & -10 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -16 \\ 0 & 3 & 10 \\ 6 & -13 & -16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Находим координаты образа вектора  $\vec{x}$ , используя координатную форму записи:

$$(2A + AB) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -16 \\ 0 & 3 & 10 \\ 6 & -13 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 - 13x_2 - 16x_3 \\ 3x_2 + 10x_3 \\ 6x_1 - 13x_2 - 16x_3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем:

$$\vec{x} = (6x_1 - 13x_2 - 16x_3)\vec{e}_1 + (3x_2 + 10x_3)\vec{e}_2 + (6x_1 - 13x_2 - 16x_3)\vec{e}_3. \otimes$$

**Пример 2.4.7.** Найти  $\left( \overset{\wedge}{A} \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \overset{\wedge}{B} \vec{y} \right)$ , если

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3; \quad \vec{y} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3;$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** 1) Находим вектор  $\overset{\wedge}{A} \vec{x} + \vec{y}$  в координатном представлении:

$$A|\vec{x}\rangle + |\vec{y}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix};$$

$$\overset{\wedge}{A} \vec{x} + \vec{y} = 22\vec{e}_1 + 16\vec{e}_2 + 13\vec{e}_3.$$

2) Находим вектор  $\vec{x} + \overset{\wedge}{B} \vec{y}$  в координатном представлении:

$$|\vec{x}\rangle + B|\vec{y}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -17 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x} + \overset{\wedge}{B} \vec{y} = -19\vec{e}_1 - 17\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3.$$

3) Находим указанное в условии скалярное произведение:

$$\left( \overset{\wedge}{A} \overset{\rightarrow}{x} + \overset{\rightarrow}{y}, \overset{\rightarrow}{x} + \overset{\wedge}{B} \overset{\rightarrow}{y} \right) = 22 \cdot (-19) + 16 \cdot (-17) + 13 \cdot (-8) = -794. \otimes$$

**Пример 2.4.8.** Решить методом Гаусса СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 5, \\ x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ 3x^1 + x^2 - x^3 + 2x^4 = -1. \end{cases} \quad (1)$$

**Решение.** 1) Удобно поменять местами первое и второе уравнения системы (1), так как у второго уравнения коэффициент при первом неизвестном равен 1:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 5, \\ 3x^1 + x^2 - x^3 + 2x^4 = -1. \end{cases} \quad (2)$$

Выражаем из первого уравнения СЛАУ (2) неизвестное  $x^1$  и подставляем результат в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases} \quad (3)$$

Два последних уравнения в (3) одинаковы, поэтому одно уравнение можно отбросить:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases} \quad (4)$$

Принимаем в (4) неизвестные  $x^3, x^4$  за свободные неизвестные и, полагая  $x^3 = a$  и  $x^4 = b$ , выражаем через них  $x^2, x^1$ , имеем общее решение СЛАУ:

$$x^2 = -\frac{17}{5} + a - \frac{7}{5}x^4, \quad x^1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}b, \quad x^3 = a, \quad x^4 = b.$$

2) Приведём матричную реализацию метода Гаусса. Перепишем систему уравнений в виде расширенной матрицы и поменяем местами первую и вторую строки матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая мысленно первую строку матрицы первый раз на 2, а второй раз на 3 и вычитая в реальности последовательно из второй и третьей строки (как вектор-строку), получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья строки матрицы идентичны, то есть второе и третье уравнения системы одинаковы. Отбрасывая третью строку, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентная система уравнений имеет вид (4):

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases}$$

Дальше решение повторяет выполненные в первом пункте операции.

Дадим интерпретацию полученного общего решения СЛАУ, для чего запишем вектор-столбец решения так

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}b \\ -\frac{17}{5} + a - \frac{7}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если теперь переписать полученный результат в символическом виде

$$|x\rangle = |x_0\rangle + a|a\rangle + b|b\rangle,$$

где



$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}, |x_0\rangle = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |b\rangle = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

То становится очевидным, что общее решение системы уравнений с геометрической точки зрения представляет собой двумерное линейное многообразие проходящее через “точку”  $|x_0\rangle$  и имеющее направляющие векторы  $|a\rangle$  и  $|b\rangle$ .  $\otimes$

**Пример 2.4.9.** Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Решение. 1) Вычтем элементы первого столбца из соответствующих элементов второго и третьего столбцов, получим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -5 & -9 \end{vmatrix}.$$

2) В полученном определителе в первой строке отличен от нуля только один первый элемент.

Применяя формулу разложения определителя по элементам первой строки, получаем:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} = 45 - 5 = 40. \otimes$$

**Пример 2.4.10.** Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Определитель матрицы  $\det A = 5 \neq 0$ . Матрица  $A$  невырожденная, следовательно, обратная матрица  $A^{-1}$  существует.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$ :

$$A_1^1 = 1; A_2^1 = -3; A_3^1 = 1$$

$$A_1^2 = 3; A_2^2 = 1; A_3^2 = -2;$$

$$A_1^3 = -2; A_2^3 = 1; A_3^3 = 3.$$

Находим присоединённую матрицу:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка по формулам  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$  подтверждает правильность расчёта.  $\otimes$

**Пример 2.4.11.** Матричным методом решить СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 3x^2 = 0, \\ 2x^1 + 4x^2 = 6. \end{cases}$$

**Решение.** 1) Проверяем условие невырожденности основной матрицы системы уравнений, для чего вычисляем определитель основной матрицы системы:

$$\det A = -2 \neq 0.$$

Обратная матрица существует.

2) Перепишем СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3) Находим алгебраические дополнения элементов основной матрицы системы:

$$A_1^1 = 4, A_2^1 = -2, A_1^2 = -3, A_2^2 = 1.$$

4) Составляем матрицу алгебраических дополнений и, транспонируя её, находим присоединённую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

6) Находим значения неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^1 = 9, x^2 = -3. \otimes$$

**Пример 2.4.12.** Найти неизвестную матрицу  $X$  из уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Имеем матричное уравнение вида  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы его решить, нужно найти матрицу  $A^{-1}$  и умножить уравнение на неё слева. Тогда решение запишется в виде  $X = A^{-1}B$ .

1) Проверяем условие невырожденности. Определитель матрицы  $A$  равен:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0.$$

Матрица невырождена, следовательно, обратная матрица существует.

2) Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$ :

$$A_1^1 = 3, A_2^1 = -1, A_1^2 = -5, A_2^2 = 2.$$

Составляем союзную матрицу и находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Умножаем данное матричное уравнение на матрицу  $A^{-1}$  слева:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Проверка правильности вычислений осуществляется путём подстановки в исходное уравнение.  $\otimes$

**Пример 2.4.13.** Решить СЛАУ, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 + x^3 = 5, \\ 2x^1 + 3x^2 + x^3 = 1, \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 11. \end{cases}$$

**Решение.** 1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как  $\det A \neq 0$ , то система уравнений совместна и определённа.

2) Для нахождения её решения используем формулы Крамера:

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{12} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \frac{11}{12} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{40}{12} - \frac{5}{12} - \frac{11}{12} = \frac{24}{12} = 2. \end{aligned}$$

Аналогично находим  $x^2$  и  $x^3$ :

$$x^2 = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -2; \quad x^3 = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 3. \quad \otimes$$

**Пример 2.4.14.** Пусть  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ a_1, a_2, a_3, a_4 \end{matrix} \right\} \subset X^4$  – некоторый (старый) базис

пространства  $X^4$  и

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора  $\hat{T}: X^4 \rightarrow X^4$  в этом базисе. Найти матрицу линейного опера-

тора  $\hat{T}$  в новом базисе

$$\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ g_1, g_2, g_3, g_4 \end{matrix} \right\} \subset X^4,$$

если известно, что векторы нового базиса выражаются через векторы старого базиса разложениями:

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ g_1 = a_1, & g_2 = a_1 + a_2, & g_3 = a_1 + a_2 + a_3, & g_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4. \end{matrix}$$

**Решение.** Матрица перехода от старого базиса к новому имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица невырождена, так как  $\det A = 1$ . Следовательно, существует обратная матрица. Для нахождения обратной матрицы найдём сначала алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$

:

$$\begin{aligned}
A_1^1 &= 1; & A_2^1 &= -1; & A_3^1 &= 0; & A_4^1 &= 0; \\
A_1^2 &= 0; & A_2^2 &= 1; & A_3^2 &= -1; & A_4^2 &= 0; \\
A_1^3 &= 0; & A_2^3 &= 0; & A_3^3 &= 1; & A_4^3 &= -1; \\
A_1^4 &= 0; & A_2^4 &= 0; & A_3^4 &= 0; & A_4^4 &= 1.
\end{aligned}$$

Теперь обратная матрица находится по формуле  $\hat{A} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$  и имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При переходе от старого базиса к новому базису матрица оператора  $T$  преобразуется по формуле

$T' = (A^{-1})^T T A^T$ . Проводя вычисления, получаем матрицу  $T'$ :

$$\begin{aligned}
T' &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

## Практическое занятие 5. Общие свойства линейных операторов

### Предварительные сведения

**Ядро** оператора  $\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n$  – это множество векторов в  $X^m$ , удовлетворяющих условию

$$\hat{A}x = 0.$$

Размерность ядра – **дефект** оператора. Множество значений оператора – это множество образов  $\vec{y} \in Y^n$  векторов  $\vec{x} \in X^m$ . Размерность множества значений оператора – **ранг** оператора.

### Примеры с решением

**Пример 2.5.1.** Найти ядро  $K(\hat{A})$  линейного оператора  $\hat{A}: X^4 \rightarrow X^3$ , заданного в

некоторых базисах

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset X^4, \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\} \subset X^3$$

этих пространств матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** По определению ядро

$$K(\hat{A}) = \left\{ \vec{x} \in X^4 : \hat{A} \vec{x} = \vec{0} \right\},$$

поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда имеем СЛАУ вида

$$\begin{cases} x^1 + 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^4 = 0, \\ 3 \cdot x^2 + x^3 + 2 \cdot x^4 = 0, \\ -x^2 - 2 \cdot x^3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту СЛАУ, например, методом Гаусса, получаем:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Принимая неизвестное  $x^4$  за свободное неизвестное и, полагая  $x^4 = t$ , где  $t$  может принимать произвольные значения из  $R$ , получаем:

$$x^3 = \frac{2}{5}t, \quad x^2 = -\frac{4}{5}t, \quad x^1 = -\frac{24}{5}t.$$

Откуда для ядра оператора имеем

$$K(\hat{A}) = \left\{ \vec{x} \in X^4 : \vec{x} = t\vec{a}; t \in R \right\},$$

где

$$\vec{a} = -\frac{24}{5}\vec{e}_1 - \frac{4}{5}\vec{e}_2 + \frac{2}{5}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Таким образом, ядро оператора является одномерным линейным многообразием  $L\left\{ \vec{a} \right\}$  с

направляющим вектором  $\vec{a}$ .  $\otimes$

**Пример 2.5.2.** Пусть  $Y$  – множество симметричных матриц 2-го порядка с обычными матричными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Показать, что это множество является векторным подпространством векторного пространства всех квадратных матриц второго порядка.

**Решение.** Сначала покажем, что множество  $X$  квадратных матриц 2-го порядка вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$$

является векторным пространством. Для этого надо показать, что операция сложения, являясь алгебраической, удовлетворяет четырём аксиомам для операции сложения векторного пространства.

То, что операция сложения во множестве  $X$  алгебраическая, очевидно. Легко видеть, что операция сложения ассоциативна и коммутативна, то есть

$$A + B = B + A; \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$



Во множестве  $X$  имеется нейтральный элемент

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и противоположный элемент

$$-A = \begin{pmatrix} -a_1^1 & -a_2^1 \\ -a_1^2 & -a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить и выполнение аксиом для операции умножения на число.

Легко видеть, что во множестве  $X$  каноническим базисом является система матриц вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Действительно, произвольная матрица может быть записана в виде разложения по матрицам этой системы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество симметричных матриц  $Y$  вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

является подпространством векторного пространства  $X$ . Действительно, симметрические матрицы образуют подмножество пространства  $X$ . Операции сложения и умножения на число не нарушают свойства симметричности матрицы. Действительно, результат выполнения этих операций является, очевидно, снова симметричной матрицей:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 + b_1^1 & a_2^1 + b_2^1 \\ a_2^1 + b_2^1 & a_2^2 + b_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1^1 & \alpha \cdot a_2^1 \\ \alpha \cdot a_2^1 & \alpha \cdot a_2^2 \end{pmatrix}. \otimes$$

**Пример 2.5.3.** Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1. **Первый метод** (элементарные преобразования матрицы). Ранг матрицы подчинён неравенству  $r(A) \leq \min(m, n) = 3$  ( $n$  — число строк,  $m$  — число столбцов). Для нахождения ранга применим элементарные преобразования матрицы.

Вычтем первую строку матрицы из второй строки и, умножив её мысленно на 3, из третьей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычёркивая из матрицы третью строку, совпадающую со второй строкой, получаем

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Здесь символ  $\cong$  использован для обозначения эквивалентности матриц по рангу в процессе преобразований.

Видим, что наивысший порядок отличного от нуля минора равен 2 (левый угловой минор является треугольным). Таким образом, ранг матрицы  $r = 2$ .

2. **Второй метод** (окаймляющих миноров). Минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 5 \neq 0. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Минор, окаймляющий первый минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Следующий окаймляющий минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Все окаймляющие миноры равны нулю, следовательно, ранг матрицы

$$r(A) = 2. \otimes$$

**Пример 2.5.4.** Найти ранг  $r(\hat{A})$ , множество значений  $\hat{A}(X^5)$  и дефект  $d(\hat{A})$  линей-

ного оператора  $\hat{A}: X^5 \rightarrow X^3$ , если этот оператор в некоторых базисах пространств  $X^5$  и  $X^3$  имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Пусть отмечены базисы

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5 \right\} \subset X^5, \left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\} \subset X^3,$$

в которых матрица оператора имеет указанный вид.

1) Находим ранг матрицы оператора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Угловой минор третьего порядка преобразованной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

следовательно, ранг матрицы  $r(A) = 3$ .

2) Вектор-столбцы преобразованной матрицы, образующие её базисный минор, составлены из координат базисных векторов множества значений оператора, то есть базис множества значений имеет вид

$$|a\rangle_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_1 = \vec{g}_1,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{g}_2,$$

$$\vec{a}_3 = -2\vec{g}_1 + 10\vec{g}_2 - 9\vec{g}_3.$$

Множеством значений оператора является линейная оболочка системы векторов  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ :

$$\hat{A}(X^5) = \left\{ \vec{y} \in X^3 : (\forall \alpha, \beta, \eta \in R^1) \vec{y} = \alpha \cdot \vec{a}_1 + \beta \cdot \vec{a}_2 + \eta \cdot \vec{a}_3 \right\},$$

3) По теореме о связи ранга и дефекта линейного оператора имеем

$$r(\hat{A}) + d(\hat{A}) = 5,$$

откуда получаем  $d(\hat{A}) = 2$ . Итак,  $r(\hat{A}) = 3$ ,  $d(\hat{A}) = 2$ .  $\otimes$

**Пример 2.5.5.** Найти базисы суммы и пересечения подпространств

$$L_1 \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\} = \left\{ \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 \right\},$$

$$L_2 \left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \right\} = \left\{ \beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2 + \beta_3 \vec{b}_3 \right\},$$

если  $\alpha_k, \beta_k \in R^1$  и

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3; \\ \vec{b}_1 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Решение. Находим базисы подпространств:

$$\dim L_1 = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2, \text{ базисный минор } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\dim L_2 = r \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 2, \text{ базисный минор } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Базисом  $L_1$  является подсистема

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

а базисом  $L_2$  подсистема

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Чтобы найти базис подпространства  $L_1 + L_2$ , вычислим ранг матрицы, столбцами которой

являются векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ :

$$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3, \text{ базисный минор } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$\dim(L_1 + L_2) = 3$$

и базис подпространства  $L_1 + L_2$  есть система  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1 \right\}$ .

Теперь базис пересечения подпространств

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 4 - 3 = 1.$$

Таким образом, базис  $L_1 \cap L_2$  состоит из одного вектора.

Вектор  $\vec{b}_2$  разложим по базису  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1 \right\}$  подпространства  $L_1 + L_2$ :

$$\vec{b}_2 = \alpha_2^1 \vec{a}_1 + \alpha_2^2 \vec{a}_2 + \beta_2^1 \vec{b}_1.$$

Составляем систему уравнений, используя разложения векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Решение этой СЛАУ даёт:

$$\alpha_2^1 = 2, \quad \alpha_2^2 = 1, \quad \beta_2^1 = -1,$$

Таким образом,

$$\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{b}_1,$$

Следовательно, вектор

$$\vec{c} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

является базисом подпространства  $L_1 \cap L_2$ .  $\otimes$

**Пример 2.5.6.** Выяснить вопрос о совместности СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 = 3, \\ x^1 + 3x^2 - x^3 = 1, \\ 3x^1 - x^2 + x^3 = 7. \end{cases}$$

**Решение.** Выписываем основную и расширенную матрицы СЛАУ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{array} \right).$$

Минор второго порядка в левом верхнем углу (см. предыдущий пример) равен  $5 \neq 0$ . Все миноры третьего порядка, как у матрицы  $A$ , так и у матрицы  $B$ , равны нулю: ранги основной и расширенной матриц  $r(A) = r(B) = 2$ . Следовательно, СЛАУ совместна.  $\otimes$

**Пример 2.5.7.** Выяснить, при каких значениях параметра  $a$  СЛАУ с основной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и столбцом правых частей  $|b\rangle = (2 \ 1 \ a)^T$  является совместной.

**Решение.** Нетрудно видеть, что ранг матрицы  $A$  СЛАУ  $r(A) = 2$ . Расширенная матрица имеет вид

$$B = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & a \end{array} \right).$$

Вычеркнем в расширенной матрице третий и четвёртый столбцы. Так как ранг матрицы не изменится, то имеем

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix} = 3a + 6.$$

Если  $a \neq -2$ , то  $\det B \neq 0$  и  $r(B) = 3 \neq r(A)$  – СЛАУ несовместна. Если  $a = -2$ , то  $\det B = 0$ . Так как у матрицы  $B$  имеются отличные от нуля миноры, то  $r(B) = 2 = r(A)$ . Поэтому при  $a = -2$  СЛАУ совместна.  $\otimes$

### Задания для самостоятельной работы

1. Даны векторы  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ . Найти линейную комбинацию (вектор)

$$\vec{u} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z}$$

и норму (длину) вектора  $\vec{u}$ :

$$1) \vec{x} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = 1;$$

$$2) \vec{x} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{z} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\alpha = -4, \beta = 3, \gamma = -2;$$

$$3) \vec{x} = \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{y} = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{z} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3,$$

$$\alpha = 7, \beta = -5, \gamma = -1.$$

2. Найти косинус угла между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ , если:

$$1) A(2; -2; 3), B(1; -1; 2), C(4; -4; 5);$$

$$2) A(0; -2; 6), B(-12; -2; -3), C(-9; -2; -6);$$

$$3) A(2; 3; -1), B(4; 5; -2), C(3; 1; 1).$$

3. На плоскости  $R^2$  заданы своими координатами три вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  параллелограмма. Найти:

1) координаты четвёртой вершины  $D$ ;

2) косинус угла между сторонами  $AB$  и  $AC$ ;

3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

$$1) A(-1; 2; -2), B(3; 4; -5), C(1; 1; 0);$$

$$2) A(-2; -2; 0), B(-1; -2; 4), C(5; -2; 1);$$

$$3) A(3; 3; -1), B(3; 2; 0), C(4; 4; -1).$$



4. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства  $R^3$  своими координатами

заданы векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ . Найти  $\left( \alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \gamma \vec{x} + \lambda \vec{y} \right)$ , если дано:

$$1) \vec{x} = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = 1, \lambda = 2;$$

$$2) \vec{x} = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3,$$

$$\alpha = -2, \beta = -5, \gamma = -1, \lambda = -2;$$

$$3) \vec{x} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3, \vec{y} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3,$$

$$\alpha = 11, \beta = 6, \gamma = 2, \lambda = -7.$$

5. Найти  $\left( \vec{x} - 4\vec{y}, 6\vec{x} + \vec{y} \right)$ , если дано:

$$1) \|\vec{x}\| = 4, \|\vec{y}\| = 5, \left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\} = \frac{\pi}{4};$$

$$2) \|\vec{x}\| = 6, \|\vec{y}\| = 1, \left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\} = \frac{\pi}{3};$$

$$3) \|\vec{x}\| = 2,5, \|\vec{y}\| = 1,5, \left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\} = \frac{\pi}{6}.$$

6. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства  $R^3$  своими координатами

задан вектор  $\vec{x}$ . Найти направляющие косинусы и орт данного вектора, если дано:

$$1) \vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3;$$

$$2) \vec{x} = -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3;$$

$$3) \vec{x} = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3.$$

7. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах:

$$1) \vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \vec{y} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3;$$

$$2) \vec{x} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{z} = -\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3;$$

$$3) \vec{x} = 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = 2\vec{e}_2, \vec{z} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ , если дано:

$$1) \vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}, \|\vec{a}\| = 2, \|\vec{b}\| = 1, \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{6};$$

$$2) \vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = \vec{a} - 3\vec{b}, \|\vec{a}\| = 2, \|\vec{b}\| = 2, \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{4};$$

$$3) \vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}, \vec{y} = \vec{a} + 3\vec{b}, \|\vec{a}\| = 1, \|\vec{b}\| = 2, \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{2}.$$

9. В пространстве  $R^3$  получить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(2; 3; 1)$ ,  $C(3, 1, 2)$  и найти косинусы углов, образованных её нормальным вектором с осями координат. Построить эту плоскость.

10. Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей, проходящих через точки  $A_1(0; 0; 0)$ ;  $B_1(3; 3; 0)$ ;  $C_1(0; 3; 3)$  и  $A_2(4; 5; 0)$ ;  $B_2(1; 6; 3)$ ;  $C_2(2; 0; 7)$  соответственно.

11. В пространстве  $R^3$  получить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1; 7; 3)$  и имеющей нормальный вектор, заданный точками  $M_1(-2; -1; -8)$  и  $M_2(2; 1; 8)$ . Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{ON}_1$ ,  $\vec{ON}_2$  и  $\vec{ON}_3$ , где  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  — точки пересечения данной плоскости и осей координат.

12. В пространстве  $R^3$  найти угол между плоскостями, проходящими через точки  $M_1, M_2, M_3$  и  $N_1, N_2, N_3$ :

$$1) M_1(0; 7; -4); M_2(4; 8; -1); M_3(-2; 1; 3);$$

$$N_1(2; 3; 1); N_2(2; 0; 3); N_3(1; 2; 0);$$

$$2) M_1(1; -2; 2); M_2(-3; 2; 3); M_3(3; 0; 6);$$

$$N_1(0; 3; 5); N_2(0; -1; 3); N_3(4; 0; 0).$$

13. Найти точку пересечения прямой линии и плоскости:

$$1) \frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 3}{1} = \frac{x^3 + 1}{-4}, x^1 + x^2 + 3x^3 - 10 = 0;$$

$$2) \frac{x^1 + 1}{2} = \frac{x^2 - 3}{-4} = \frac{x^3 + 1}{5}, x^1 + 2x^2 - x^3 + 5 = 0.$$

14. Найти координаты проекции точки  $M_0$  на плоскость:

$$1) M_0(0; -3; -2); 2x^1 + 10x^2 + 10x^3 - 1 = 0;$$

$$2) M_0(1; 0; -1); 2x^2 + 4x^3 - 1 = 0.$$

15. В пространстве  $R^3$  найти расстояние от точки  $M_0$  до плоскости, проходящей через точки  $M_1, M_2$  и  $M_3$ :

$$1) M_1(0; 7; -4), M_2(4; 8; -1), M_3(-2; 1; 3), M_0(-10; 11; 13);$$

$$2) M_1(5; 8; 3), M_2(10; 5; 6), M_3(8; 7; 4), M_0(7; 17; 14);$$

$$3) M_1(1; 3; 5), M_2(-5; 5; 2), M_3(7; -1; 8), M_0(0; 0; 0).$$

16. Пусть  $\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \end{matrix} \right\} \subset X^n$  – некоторый базис в векторном пространстве  $X^n$ , и

$\left\{ \begin{matrix} \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \end{matrix} \right\}$  – некоторая система векторов в этом пространстве. Используя метод Гаусса,

найти базу и размерность этой системы векторов.

$$1) \dim X^n = 4:$$

$$\vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = 4\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 10\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.$$

2)  $\dim X^n = 5$ :

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_4 = 6\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_5 = -5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5.$$

17. Пусть  $L\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  и  $L\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  – некоторые подпространства векторного про-

странства  $X^4$ , и пусть  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\} \subset X^4$  – некоторый его базис. Найти базис суммы

и пересечения этих подпространств.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \vec{b}_1 = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{array} \right.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \vec{b}_1 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 8\vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4. \end{array} \right.$$

18. Пусть  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$  – некоторый базис в евклидовом пространстве  $E^4$ , и

$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$  – некоторая система векторов в этом пространстве. Показать, что эта система ортого-

нальна и представить пространство в виде ортогональной суммы

$$E^4 = L_1^2 \oplus L_2^2,$$

где  $L_1^2 = L\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ , а  $L_2^2 = L_1^{2\perp}$ .

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{array} \right. 2) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 3\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4; \end{array} \right.$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \end{array} \right. 4) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + = -6\vec{e}_3. \end{array} \right.$$

19. Пусть  $\vec{a} \neq \vec{0}$  – некоторый фиксированный вектор из  $R^3$ , а операторы  $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$  и

$\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$ , действуют по правилам  $\left( \forall \vec{x} \in R^3 \right)$

$$1) \hat{A} \vec{x} = \left( \vec{a}, \vec{x} \right) \vec{a}, 2) \hat{A} \vec{x} = \left[ \vec{a}, \vec{x} \right].$$

Показать, что эти операторы линейные и найти их матрицы.

20. Показать, что операторы

$$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3, \hat{B}: R^3 \rightarrow R^3, \hat{C}: R^3 \rightarrow R^3,$$

действие которых задано координатными соотношениями

$$1) \hat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix},$$

$$2) \hat{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_2 - 3 \end{pmatrix},$$

$$3) \hat{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 \\ 3x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

являются линейными и записать их матрицы.

21. В каноническом базисе трёхмерного пространства  $R^3$  действия операторов  $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$  и  $\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$  на произвольный вектор  $\vec{x} \in R^3$  заданы соотношениями:

$$\hat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}; \hat{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора:

$$1) \left( \hat{A}^2 + 2\hat{B} \right) \vec{x}; 2) \left( 2\hat{A}^2 + 3\hat{B}^2 \right) \vec{x}; 3) \left( \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \right) \vec{x}.$$

22. Найти матрицы, обратные данным матрицам:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; б) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; в) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Решить СЛАУ матричным методом и по формулам Крамера:

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$$

24. Найти решение СЛАУ по формулам Крамера:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

25. Разложить вектор  $\vec{x}$  по системе векторов  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ :

$$1) \vec{a}_1 = -\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3,$$

$$\vec{x} = -2\vec{e}_1 + 9\vec{e}_3.$$

$$2) \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = -\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$$

$$\vec{x} = 5\vec{e}_1 - 12\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

$$3) \vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{a}_2 = -3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{x} = 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

26. В каноническом базисе пространства  $R^3$  дана линейно независимая система векторов

$$\vec{x}_1 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,$$

$$\vec{x}_2 = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_3 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

и матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Будет ли линейно независимой система векторов  $\hat{A}\vec{x}_1, 2\hat{A}\vec{x}_2, 3\hat{A}\vec{x}_3$ ?

27. Проверить, что  $(AB)C = A(BC)$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

28. Вычислить многочлен

$$P(X) = X^3 - 3X + 2$$

от матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

29. Найти матрицу  $X$ , удовлетворяющую условию:

$$\text{а) } 5A + 2X = 0, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{и) } (-1)A + 3X = 2B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

30. Вычислить определители:



$$\text{ф) } \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}.$$

31. Решить уравнения:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \text{ б) } \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

32. Решить неравенства:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

33. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

34. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

35. Решить методом Гаусса СЛАУ:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x^1 - x^2 - x^3 = 4, \\ 3x^1 + 4x^2 - 2x^3 = 11, \\ 3x^1 - 2x^2 + 4x^3 = 11; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases} \text{ в) } \begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 - 2x^4 = 6, \\ 2x^1 - x^2 - 2x^3 - 3x^4 = 8, \\ 3x^1 + 2x^2 - x^3 + 2x^4 = 4, \\ 2x^1 - 3x^2 + 2x^3 + x^4 = -8. \end{cases}$$

36. Пространство  $R^3$  подвергается деформации под действием линейного оператора  $\hat{A}$ , заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти объём треугольной пирамиды с вершинами

$$A(0; 0; 0); B(3; 3; 0); C(0; 3; 3); D(3; 0; 3)$$

до и после деформации пространства.

37. Пусть  $\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \right\} \subset X^4$  – некоторый базис, а

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора  $\hat{T}: X^4 \rightarrow X^4$ . Найти матрицу оператора в базисе

$\left\{ \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} g_1, g_2, g_3, g_4 \right\} \subset X^4$ , если:

$$\text{а) } \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ g_1 = 2a_1 + a_2 + a_3 + a_4, & g_2 = 3a_1 + 2a_2 + 3a_3 + a_4, \end{matrix}$$

$$\vec{g}_3 = 4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 + \vec{a}_4, \vec{g}_4 = 5\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4;$$

$$\text{б) } \vec{g}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 3\vec{a}_4, \vec{g}_2 = 3\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4,$$

$$\vec{g}_3 = 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4, \vec{g}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4.$$

38. Используя понятие ранга матрицы и теоремы о совместности, выяснить вопрос о совместности следующих СЛАУ:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases} \text{б) } \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 2x^4 = 0, \\ x^1 - x^3 + 3x^4 = 0. \end{cases}$$

39. При каких значениях параметра  $a$  СЛАУ является совместной:

$$\text{а) } \begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 + x^4 = a, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 - x^4 = -1, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 + 5x^4 = 5; \end{cases} \text{б) } \begin{cases} 3x^1 - 5x^2 + 2x^3 + 4x^4 = 2, \\ 7x^1 - 4x^2 + x^3 + 3x^4 = a, \\ 5x^1 + ax^2 - 4x^3 - 6x^4 = 3. \end{cases}$$

40. Найти ядро оператора, заданного в пространстве  $R^3$  своей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дать геометрическую интерпретацию и получить параметрические уравнения ядра.

41. Найти ядро, дефект, ранг и множество значений линейного оператора  $\hat{A}: R^m \rightarrow R^n$ , заданного в некоторых базисах

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m \right\} \subset R^m, \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \right\} \subset R^n$$

своей матрицей:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \\
 & \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \text{ д) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix}; \text{ е) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

## Часть 2. ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

### ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА $E^n$

#### Практическое занятие 1. Подпространства. Специальные типы линейных операторов в евклидовом пространстве

##### Предварительные сведения

Пусть  $\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n)$  – линейный оператор. Тогда, если для вектора  $\vec{x} \in X^n$  ( $\vec{x} \neq \vec{0}$ )

и некоторого числа  $\mu$  выполняется соотношение

$$\hat{T} \vec{x} = \mu \vec{x},$$

то вектор  $\vec{x}$  называется **собственным вектором** оператора  $\hat{T}$ , соответствующим **собственному значению**  $\mu$ . Если в пространстве  $X^n$  зафиксирован базис, то последнее равенство сводится к однородной СЛАУ

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \dots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (t_1^1 - \mu)x^1 + t_2^1 x^2 + \dots + t_n^1 x^n = 0, \\ t_1^2 x^1 + (t_2^2 - \mu)x^2 + \dots + t_n^2 x^n = 0, \\ \dots, \\ t_1^n x^1 + t_2^n x^2 + \dots + (t_n^n - \mu)x^n = 0. \end{cases}$$

Система  $\left\{ \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \dots \\ \vec{x}_m \end{matrix} \right\}$  собственных векторов линейного оператора

$\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n)$ , соответствующих попарно различным собственным значениям  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ , линейно независима.

Линейный оператор  $\hat{T}$ , действующий в  $n$ -мерном пространстве  $X^n$  и имеющий  $n$  попарно различных собственных значений, называется **оператором простой структуры**. Матрица оператора простой структуры имеет диагональный вид.

Из критерия нетривиальной совместности однородной СЛАУ следует, что

$$T(\mu) \stackrel{def}{=} \det(t_j^i - \mu \delta_j^i) = \begin{vmatrix} t_1^1 - \mu & t_2^1 & \dots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 - \mu & \dots & t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_n^n - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Это равенство есть **характеристическое уравнение**, а многочлен в левой части – **характеристический многочлен**. Из характеристического уравнения определяются собственные значения линейного оператора, а из однородной СЛАУ его собственные векторы.

Подпространство  $X_{inv} \subset X^n$  называется **инвариантным подпространством оператора**

$$\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n), \text{ если } \left( \forall \vec{x} \in X_{inv} \right) \vec{y} = \hat{T} \vec{x} \in X_{inv}.$$

Пусть  $\hat{T}: E^m \rightarrow E^n$  – некоторый линейный оператор. Оператор  $\hat{T}^*: E^n \rightarrow E^m$  называется **сопряжённым по отношению к оператору  $\hat{T}$** , если  $\left( \forall \vec{x} \in E^m, \forall \vec{y} \in E^n \right)$

выполняется условие

$$\left( \hat{T} \vec{x}, \vec{y} \right) = \left( \vec{x}, \hat{T}^* \vec{y} \right).$$

Матрица оператора, сопряжённого с оператором  $\hat{T}: E^n \rightarrow E^m$  связана следующим соотношением:

$$t_j^{k*} = \overline{t_k^j}.$$

В случае вещественных пространств комплексное сопряжение отсутствует.

Если  $\hat{T}: E^m \rightarrow E^n$ ,  $\hat{R}: E^m \rightarrow E^n$  – некоторые операторы и  $\beta \in \mathbb{C}$  – произвольное число, то справедливы следующие пять свойств сопряжённого оператора:

$$1) \left( \hat{T}^* \right)^* = \hat{T}; 2) \left( \hat{T}^* \right)^{-1} = \left( \hat{T}^{-1} \right)^*; 3) \left( \beta \hat{T} \right)^* = \overline{\beta} \hat{T}^* ;$$

$$4) \left( \hat{T} + \hat{R} \right)^* = \hat{T}^* + \hat{R}^* ; 5) \left( \hat{T} \hat{R} \right)^* = \hat{R}^* \hat{T}^* .$$

Линейный оператор  $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$  называется **самосопряжённым (эрмитовым)**, если  $\hat{T}^* = \hat{T}$ . Матрица самосопряжённого оператора является симметрической, то есть связана с матрицей самого оператора соотношением

$$t_j^i = t_i^j .$$

Оператор  $\hat{T}$ , действующий в вещественном евклидовом пространстве  $E^n$ , называется **ортогональным**, если он сохраняет скалярное произведение, то есть

$$\left( \forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \right) \left( \hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \left( \vec{x}, \vec{y} \right) .$$

Ортогональные операторы  $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$  в вещественном евклидовом пространстве  $E^n$  обладают следующими свойствами:

- 1) единичный оператор является ортогональным;
- 2) композиция ортогональных операторов также является ортогональным оператором;
- 3) оператор, обратный ортогональному оператору, также является ортогональным;
- 4) если  $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$  – ортогональный оператор, то оператор  $\alpha \cdot \hat{T}$  является ортогональным в том и только в том случае, если  $\alpha = \pm 1$ .

Оператор  $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$  является ортогональным в том и только в том случае, если он переводит хотя бы один ортонормированный базис снова в ортонормированный базис.

Пусть  $\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n)$  и

$$F_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \in \mathbb{C}[x]$$

– некоторый многочлен. Тогда оператор

$$F_m(\hat{T}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{T} + a_2 \hat{T}^2 + \dots + a_m \hat{T}^m$$

называется многочленом от оператора  $\hat{T}$  или **операторным многочленом**.

### Примеры с решением

**Пример 2.1.1.** В каноническом базисе  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\} \subset R^2$  оператор  $\hat{T}$  задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора  $\hat{T}$ .

Решение. 1. Составляем характеристическое уравнение:

$$\det(T - \mu \cdot I) = 0; \mu^2 - 7 \cdot \mu + 10 = 0.$$

Откуда получаем собственные значения оператора  $\mu_1 = 2, \mu_2 = 5$ .

2. Находим собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\mu_1 = 2$ , для чего решаем СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_1^1 = -1, x_1^2 = 1 \Rightarrow |x_1\rangle = c|a_1\rangle, c \in R^1 \Rightarrow |a_1\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c \vec{a}_1$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

3. Аналогично находим собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\mu_2 = 5$ , решая СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_2^1 = c/2, x_2^2 = c, c \in R^1 \Rightarrow |x_2\rangle = c|a_2\rangle \Rightarrow |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c \vec{a}_2$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Оператор имеет два одномерных собственных подпространства

$$L\left\{\vec{a}_1\right\} = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1; t \in R^1\right\}$$

и

$$L\left\{\vec{a}_2\right\} = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2; t \in R^1\right\},$$

с образующими векторами

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{a}_2 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2. \otimes$$

**Пример 2.1.2.** Найти матрицу, собственные значения и собственные подпространства оператора (аффинора) зеркального отражения относительно координатной плоскости  $X^1OX^2$  в пространстве  $R^3$ .

**Решение.** Оператор зеркального отражения в пространстве  $R^3$  относительно координатной плоскости  $X^1OX^2$ , очевидно, действует по правилу (рисунок 2.2.1)

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3\right) \vec{y} = \hat{R} \vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 - x^3 \vec{e}_3.$$

Поддействуем на базисные векторы оператором отражения:

$$\hat{R} \vec{e}_1 = \vec{e}_1; \hat{R} \vec{e}_2 = \vec{e}_2; \hat{R} \vec{e}_3 = -\vec{e}_3.$$



Следовательно, для матрицы оператора отражения относительно координатной плоскости

$X^1OX^2$  получаем:

$$R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен оператора  $\hat{R}$  имеет вид:

$$R(\mu) = \det \begin{pmatrix} 1-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & -1-\mu \end{pmatrix} = (1-\mu) \cdot (1-\mu) \cdot (-1-\mu).$$

Откуда видно, что многочлен имеет простой корень  $\mu_1 = -1$  и двукратный корень  $\mu_2 = 1$ .

1) Для собственного значения  $\mu_2 = -1$  имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

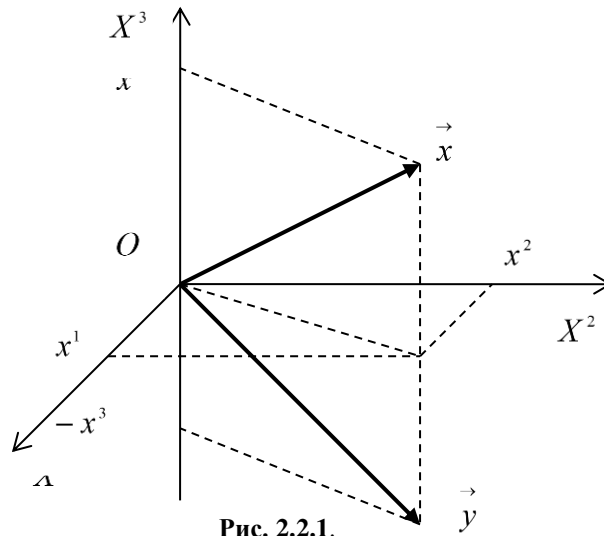
откуда

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, c \in R^1$$

– любое действительное число. Собственное подпространство, соответствующее собственному значению  $\mu_1 = -1$ , есть линейная оболочка вида

$$c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L\left\{ \vec{e}_3 \right\} = \left\{ \vec{x} \in R^3 : \vec{x} = c \cdot \vec{e}_3; c \in R^1 \right\},$$

то есть ось  $OX^3$ .



2) Для собственного значения  $\mu_2 = 1$  имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$|x\rangle \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $a, b \in \mathbb{R}^1$  – любые действительные числа. Получаем собственное подпространство, соответствующее собственному значению  $\mu_1 = 1$ , являющееся линейной оболочкой вида

$$L\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2; a, b \in \mathbb{R}^1 \right\},$$

то есть координатной плоскостью  $X^1OX^2$ . Это подпространство является прямой суммой двух собственных подпространств  $OX^1 \oplus OX^2$ .  $\otimes$

**Пример 2.1.3.** В евклидовом пространстве  $E^3$  в ортонормированном (каноническом) базисе

$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$  оператор  $\hat{T}: E^3 \rightarrow E^3$  задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора.

**Решение.** Составим характеристическое уравнение:

$$T - \mu I = \begin{pmatrix} 3-\mu & 0 & 0 \\ 1 & 2-\mu & -1 \\ 1 & -1 & 2-\mu \end{pmatrix} \Rightarrow (3-\mu)(\mu^2 - 4\mu + 3) = 0.$$

Собственные значения  $\mu_1 = 1, \mu_{2,3} = 3$ .

Собственный вектор, соответствующий  $\mu_1 = 1$  находится как решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^1 + 0x^2 + 0x^3 = 0, \\ x^1 + x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 + x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, соответствующий  $\mu_{2,3} = 3$  находится как решение системы уравне-

ний

$$\begin{cases} 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |x_3\rangle = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем два собственных подпространства:

$$X_1 = \{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1; t \in R^1\}; X_2 = \{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2 + \tau\vec{a}_3; t, \tau \in R^1\}. \otimes$$

**Пример 2.1.4.** Линейный оператор  $\hat{T} : E^3 \rightarrow E^3$  в некотором ортонормированном базисе  $\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \end{matrix} \right\}$  задан матрицей

$$T_e = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Построить в пространстве  $E^3$  ортонормированный базис собственных векторов оператора  $\hat{T}$  и записать матрицу оператора  $\hat{T}$  в этом базисе.

**Решение.** Составим характеристический многочлен оператора  $\hat{T}$ :

$$T(\mu) = \begin{vmatrix} 11-\mu & 2 & -8 \\ 2 & 2-\mu & 10 \\ -8 & 10 & 5-\mu \end{vmatrix} = -\mu^3 + 18\mu^2 + 81\mu - 1458.$$

Откуда характеристическое уравнение

$$\mu^3 - 18\mu^2 - 81\mu + 1458 = 0 \Rightarrow (\mu - 18)(\mu^2 - 81) = 0,$$

или

$$(\mu - 18)(\mu - 9)(\mu + 9) = 0.$$

Откуда собственные значения оператора

$$\mu_1 = -9, \mu_2 = 9, \mu_3 = 18.$$

Оператор является симметрическим, то есть самосопряжённым. Поэтому все собственные значения оператора различны, а собственные векторы ортогональны. Найдём собственные векторы

оператора  $\hat{T}$  в базисе  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ .

1) Для собственного значения  $\mu_1 = -9$  имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор – угловой. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 10x^1 + x^2 = 4a, \\ 2x^1 + 11x^2 = -10a; \end{cases} \det A = 108 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, первое собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^1 = L \left\{ \vec{a}_1 \right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Для собственного значения  $\mu_2 = 9$  имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 8a, \\ 2x^1 - 7x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -18 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, второе собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^2 = L \left\{ \vec{a}_2 \right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

3) Для собственного значения  $\mu_3 = 18$  имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения этой СЛАУ применим критерий нетривиальной совместности однородной СЛАУ.

Определитель СЛАУ

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} = 108.$$

Поэтому первые два уравнения СЛАУ линейно независимы. Принимая третью координату вектора за свободное неизвестное, то есть, полагая  $x^3 = a$ , где  $a$  – произвольное действительное число, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -7x^1 + 1x^2 = -5a, \\ 2x^1 - 16x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -54 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ \frac{1}{2}a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, третье собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^3 = L\left\{ \vec{a}_3 \right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

4) Найденные собственные векторы ортогональны. Нормируем их:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} \vec{a}_1 = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \vec{a}_2 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}} \vec{a}_3 = \frac{1}{3} \vec{e}_1 - \frac{2}{3} \vec{e}_2 + \frac{2}{3} \vec{e}_3.$$

5) Матрица перехода от старого базиса к новому базису

$$A: \left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \rightarrow \left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$$

имеет вид:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \det A = -1 \neq 0; A^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к матрице перехода от старого базиса к новому базису и транспонированная к ней имеют вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \operatorname{adg} A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; (A^{-1})^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора в новом базисе  $\left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$ :

$$\begin{aligned} T_a &= (A^{-1})^T T_e A^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \cdot \otimes \end{aligned}$$

**Пример 2.1.5.** В евклидовом пространстве  $E^3$  в ортонормированном (каноническом) базисе  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$  оператор  $\hat{T}: E^3 \rightarrow E^3$  задан матрицей



$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора  $\hat{T}^*$  в базисе

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{g}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{g}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

**Решение.** Находим матрицу сопряжённого оператора в старом (ортонормированном) базисе:

$$T_e^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записываем матрицу перехода от старого базиса к новому базису и транспонируем её:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу, обратную к матрице перехода от старого базиса к новому базису. Определитель матрицы

$$\det A = -2.$$

Алгебраические дополнения

$$A_1^1 = -2, A_2^1 = 0, A_3^1 = 0,$$

$$A_1^2 = 2, A_2^2 = -1, A_3^2 = -1,$$

$$A_1^3 = 0, A_2^3 = -1, A_3^3 = 1;$$

$$adgA = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора  $\hat{T}^*$  в новом базисе:

$$\begin{aligned}
T_g^* &= (A^{-1})^T T_e^* A^T = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \otimes
\end{aligned}$$

**Пример 2.1.6.** Ранее показано, что линейная оболочка  $L \left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2 \right\}$ , где элементы  $L$  вы-

числяются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x, \quad \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left( \vec{g}_1, \vec{g}_2 \right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2} \cdot (\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x, \quad \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

1) Найти матрицу оператора дифференцирования  $\hat{D}$  в базисе  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$  и матрицу сопря-

жённого оператора  $\hat{D}^*$ .

2) Выяснить, является ли оператор  $\hat{D}$  симметрическим.

**Решение.** Находим матрицу оператора дифференцирования в базисе

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\} \subset R^2.$$

Для чего находим образы базисных векторов  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$ :

$$\begin{aligned}\hat{D} \vec{e}_1 &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos x - \sin x) = \\ &= 0 \cdot \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \vec{e}_2;\end{aligned}$$

$$\hat{D} \vec{e}_2 = \frac{d}{dx} (\sin x - \cos x) = \cos x + \sin x = \sqrt{3} \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2.$$

Следовательно, матрица оператора  $\hat{D}$  в базисе  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$  имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Данное многообразие является вещественным пространством, поэтому матрица сопряжённого оператора  $\hat{D}^*$  равна транспонированной матрице оператора  $\hat{D}$ , то есть

$$D^* = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 \\ d_2^1 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в базисе  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$  для матрицы оператора  $\hat{D}$  имеем  $d_2^1 \neq d_1^2$ , оператор не является симметрическим.  $\otimes$

**Пример 2.1.7.** В евклидовом пространстве  $E^3$  линейный оператор  $\hat{T}$  переводит систему векторов  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$  в систему векторов  $\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\}$ . Является ли этот оператор самосопряжённым, если:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$|g_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; |g_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; |g_3\rangle = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. По условию задачи имеем

$$\hat{T} a_1 = g_1, \hat{T} a_2 = g_2, \hat{T} a_3 = g_3,$$

откуда для векторов-столбцов из координат получаем:

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t_2^1 + t_3^1 = 2, \\ t_2^2 + t_3^2 = 3, \\ t_2^3 + t_3^3 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t_1^1 + t_3^1 = -1, \\ t_1^2 + t_3^2 = 0, \\ t_1^3 + t_3^3 = 3; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t_1^1 + t_2^1 = -5, \\ t_1^2 + t_2^2 = 1, \\ t_1^3 + t_2^3 = 4. \end{cases}$$

Из последних равенств получаем три СЛАУ для элементов матрицы оператора:

для элементов первой строки

$$\begin{cases} t_2^1 + t_3^1 = 2, \\ t_1^1 + t_3^1 = -1, \\ t_1^1 + t_2^1 = -5; \end{cases}$$

для элементов второй строки

$$\begin{cases} t_2^2 + t_3^2 = 3, \\ t_1^2 + t_3^2 = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 = 1; \end{cases}$$

для элементов третьей строки

$$\begin{cases} t_2^3 + t_3^3 = 1, \\ t_1^3 + t_3^3 = 3, \\ t_1^3 + t_2^3 = 4. \end{cases}$$

Решая эти СЛАУ по формулам Крамера, получаем матрицу оператора:

$$T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что  $(\forall i \neq j = 1, 2, 3) t_i^j = t_j^i$ . Следовательно, оператор  $\hat{T}$  является самосопряжённым.  $\otimes$

**Пример 2.1.8.** Матрица линейного оператора  $\hat{T} : E^3 \rightarrow E^3$  в базисе векторов  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\} \subset E^3$  имеет вид:

$$T' = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, является ли оператор  $\hat{T}$  ортогональным, если в ортонормированном базисе

$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$  имеют место разложения

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Решение. 1) *Первый способ.* Проверим выполнение определения ортогональности, то есть выполнение условия

$$\left( \forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \right) \left( \hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \left( \vec{x}, \vec{y} \right).$$

Найдём скалярное произведение векторов  $\vec{x}, \vec{y} \in E^3$  в произвольном базисе

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\} \subset E^3 \text{ по формуле}$$

$$\left( \vec{x}, \vec{y} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} x^i y^j,$$

где

$$\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3, \quad \vec{y} = y^1 \vec{a}_1 + y^2 \vec{a}_2 + y^3 \vec{a}_3,$$

а матрица метрических коэффициентов имеет вид

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \left( \vec{a}_1, \vec{a}_1 \right) & \left( \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right) & \left( \vec{a}_1, \vec{a}_3 \right) \\ \left( \vec{a}_2, \vec{a}_1 \right) & \left( \vec{a}_2, \vec{a}_2 \right) & \left( \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right) \\ \left( \vec{a}_3, \vec{a}_1 \right) & \left( \vec{a}_3, \vec{a}_2 \right) & \left( \vec{a}_3, \vec{a}_3 \right) \end{pmatrix}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь получаем для скалярного произведения произвольных векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  следующий результат:

$$\begin{aligned} \left( \vec{x}, \vec{y} \right) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} x^i y^j = 2x^1 y^1 + x^1 y^2 + x^1 y^3 + \\ &+ x^2 y^1 + 2x^2 y^2 + x^2 y^3 + x^3 y^1 + x^3 y^2 + 2x^3 y^3. \end{aligned}$$

Находим координаты образов векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  при действии оператора  $\hat{T}$ :

$$\hat{T} \vec{x} = \vec{u} \Rightarrow T|x\rangle = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^1 + x^2 \\ -x^1 \\ \frac{2}{3}x^1 + x^3 \end{pmatrix};$$

$$\hat{T} \vec{y} = \vec{v} \Rightarrow T|y\rangle = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y^1 + y^2 \\ -y^1 \\ \frac{2}{3}y^1 + y^3 \end{pmatrix}.$$

После подстановки найденных координат образов векторов  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  и метрических коэффициентов  $g_{ij}$  в формулу для скалярного произведения

$$\left( \hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} u^i v^j$$

и сравнения с формулой для скалярного произведения преобразов, убеждаемся в справедливости равенства

$$\left( \hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \left( \vec{x}, \vec{y} \right).$$

2) *Второй способ.* Матрица перехода от старого (ортонормированного) базиса

$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$  к новому базису  $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$  и обратная к ней матрица имеют, соответ-

ственно, вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Так как формула преобразования матрицы оператора при переходе от старого базиса к новому базису имеет вид

$$T' = (A^{-1})^T T A^T,$$

то для матрицы оператора в старом базисе  $\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1, & \vec{e}_2, & \vec{e}_3 \end{matrix} \right\}$  получаем:

$$\begin{aligned} T &= A^T T' (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Убедиться в том, что полученная матрица является ортогональной, можно с помощью свойств ортогональных матриц. Например, умножая матрицу  $T$  на транспонированную матрицу  $T^T$ , получим

$$T T^T = T^T T = I.$$

Таким образом, выполняется свойство  $T^T = T^{-1}$ . Следовательно, оператор  $\hat{T}$  и, соответственно, его матрица являются ортогональными.  $\otimes$

**Пример 2.1.9.** Пусть  $\hat{T} : X \rightarrow X$ . Показать, что если  $X_{inv}^{(1)}, X_{inv}^{(2)}$  – инвариантные подпространства оператора  $\hat{T}$ , то  $X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}$  и  $X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}$  также являются инвариантными подпространствами оператора  $\hat{T}$ .

**Решение.** Пусть  $X_{inv}^{(1)}, X_{inv}^{(2)}$  – инвариантные подпространства оператора  $\hat{T}$ . Предположим, что вектор  $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}$ . Но тогда вектор  $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)}$  и  $\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}$ , следовательно, и его образ

$$\hat{T} \vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \wedge \hat{T} \vec{x} \in X_{inv}^{(2)}.$$



→

Теперь очевидно, что образ вектора  $\vec{x}$  принадлежит пересечению этих подпространств, то есть

$$\hat{T} \vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}.$$

Пусть теперь  $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}$ . Тогда, по определению суммы подпространств

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \quad \vec{x}_1 \in X_{inv}^{(1)}, \quad \vec{x}_2 \in X_{inv}^{(2)},$$

откуда в силу того, что снова  $\hat{T} \vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \wedge \hat{T} \vec{x} \in X_{inv}^{(2)}$ , получаем

$$\hat{T} \vec{x} = \hat{T} \vec{x}_1 + \hat{T} \vec{x}_2 \in X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}. \quad \otimes$$

**Пример 2.1.10.** Пусть  $\hat{T} : X \rightarrow X$ . Показать, что если оператор  $\hat{T}$  биективный, то его инвариантное подпространство  $X_{inv}$  является инвариантным подпространством и для обратного

оператора  $\hat{T}^{-1}$ .

**Решение.** Известно, что линейный оператор  $\hat{T} : X \rightarrow X$  взаимно однозначен (биективен) в том и только в том случае, если он невырожденный.

Пусть

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\} \subset X_{inv}^m$$

– базис в  $X_{inv}^m$ , тогда система образов векторов исходной системы

$$\left\{ \hat{T} \vec{a}_1, \hat{T} \vec{a}_2, \dots, \hat{T} \vec{a}_m \right\}$$

принадлежат тому же инвариантному подпространству и образуют в нём другой базис.

Покажем сначала, что система образов линейно независима. Для этого составим линейную комбинацию образов векторов

$$\left\{ \hat{T} \vec{a}_1, \hat{T} \vec{a}_2, \dots, \hat{T} \vec{a}_m \right\}$$

и потребуем, чтобы

$$\alpha_1 \hat{T} \vec{a}_1 + \alpha_2 \hat{T} \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \hat{T} \vec{a}_m = \vec{0}.$$

Далее получаем в силу линейности оператора  $\hat{T}$

$$\hat{T} \left( \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m \right) = \vec{0}.$$

Так как оператор невырожденный, то

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0}.$$

Последнее равенство, в силу линейной независимости системы

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\},$$

возможно только в случае одновременного обращения в нуль всех коэффициентов линейной комбинации. Что и доказывает линейную независимость системы образов.

Пусть теперь  $\left( \forall \vec{x} \in X_{inv}^m \right)$ . Разложим вектор  $\vec{x}$  по базису из образов векторов исход-

ного базиса подпространства  $X_{inv}^m$ , то есть представим вектор  $\vec{x}$  в виде

$$\vec{x} = x^1 \hat{T} \vec{a}_1 + x^2 \hat{T} \vec{a}_2 + \dots + x^m \hat{T} \vec{a}_m.$$

Так как для невырожденного линейного оператора обратный оператор снова линейный, то, действуя

на обе части оператором  $\hat{T}^{-1}$ , получаем

$$\begin{aligned} \hat{T}^{-1} \vec{x} &= x^1 \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_1 + x^2 \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_2 + \dots + x^m \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_m = \\ &= x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + \dots + x^m \vec{a}_m, \end{aligned}$$

причём

$$x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + \dots + x^m \vec{a}_m \in X_{inv}^m,$$

так как он разложен по базису  $X_{inv}^m$ .

Итак, получили, что если  $\vec{x} \in X_{inv}^m$ , то  $\hat{T}^{-1} \vec{x} \in X_{inv}^m$ .  $\otimes$

**Пример 2.1.11.** Показать, что любое инвариантное подпространство оператора  $\hat{T}: X^n \rightarrow X^n$  является инвариантным и для операторного многочлена

$$F_p(\hat{T}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{T} + a_2 \hat{T}^2 + \dots + a_p \hat{T}^p.$$

**Решение.** Пусть операторы  $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$  и  $\hat{B}: X^n \rightarrow X^n$  имеют одно и тоже инвариантное подпространство  $Y^m \subset X^n$ . Тогда

$$\left( \forall \vec{x} \in Y^m \right) \vec{y}_1 = \hat{A} \vec{x} \in Y^m \wedge \vec{y}_2 = \hat{B} \vec{x} \in Y^m.$$

Так как любые линейные комбинации векторов подпространства  $Y^m$  снова являются векторами этого же подпространства, то имеем

$$\alpha \cdot \vec{y}_1 + \beta \cdot \vec{y}_2 = \alpha \cdot \hat{A} \vec{x} + \beta \cdot \hat{B} \vec{x} = \left( \alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B} \right) \vec{x} \in Y^m.$$

То есть подпространство  $Y^m \subset X^n$ , инвариантное относительно операторов  $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$  и  $\hat{B}: X^n \rightarrow X^n$ , инвариантно и относительно оператора  $\alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B}$ . Далее, из того, что

подпространство  $Y^m \subset X^n$  является инвариантным относительно оператора  $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ , следует, что оно инвариантно и относительно степеней этого оператора  $\hat{A}^k$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ )

Теперь очевидно, что любое инвариантное подпространство оператора  $\hat{T}$  является инвариантным и относительно операторного многочлена

$$F_p(\hat{T}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{T} + a_2 \hat{T}^2 + \dots + a_p \hat{T}^p. \otimes$$

## Практическое занятие 2. Некоторые задачи геометрии

### евклидова пространства

#### Предварительные сведения

Система векторов  $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \subset E^n$  линейно зависима в том и только в том слу-

чае, если определитель Грама системы

$$G \left( \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_m \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vec{x}_2 & \vec{x}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{x}_2 & \vec{x}_2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{x}_2 & \vec{x}_m \end{pmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{pmatrix} \vec{x}_m & \vec{x}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{x}_m & \vec{x}_2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{x}_m & \vec{x}_m \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Рассмотрим в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E^n$  некоторое подпространство  $L^m$  размерности  $m < n$ . Пусть дан некоторый вектор  $\vec{x} \in E^n$ , причём  $\vec{x} \notin L^m$ . Можно показать, что справедливо представление вектора  $\vec{x}$  в виде следующего разложения

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp,$$

где вектор  $\vec{g}_L$  принадлежит подпространству  $L^m$ , а вектор  $\vec{h}^\perp$  ортогонален к этому подпространству. Векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{g}_L$  называются, соответственно, **наклонной** к подпространству  $L^m$  и **проекцией** наклонной  $\vec{x}$  на подпространство  $L^m$ . Вектор  $\vec{h}^\perp$  называется **перпендикуляром**, опущенным из конца наклонной  $\vec{x}$  на подпространство  $L^m$ .

Пусть в евклидовом пространстве  $E^n$  зафиксирована система векторов

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \quad (m < n).$$

Обозначим  $\vec{h}_m$  перпендикуляр, опущенный из конца вектора  $\vec{x}_{m+1}$  на подпространство

$$L\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\right\} \quad (m = 1, 2, \dots, n-1).$$

Формула для вычисления объёма  $m$ -мерного параллелепипеда в пространстве  $E^n$  имеет вид:

$$V^2 = G\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\right) \equiv \begin{vmatrix} \left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) & \dots & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_m\right) \\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) & \dots & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_m\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\vec{x}_m, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_2\right) & \dots & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_m\right) \end{vmatrix}.$$

### Примеры с решением

**Пример 2.2.1.** Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов

$$\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right\} \subset R^3, \text{ если имеют место разложения}$$

$$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{x}_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \quad \vec{x}_3 = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3.$$

**Решение.** Находим попарные скалярные произведения векторов системы:

$$\left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) = 14, \quad \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = 33, \quad \left(\vec{x}_1, \vec{x}_3\right) = 47.$$

$$\left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) = 33, \quad \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) = 78, \quad \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) = 111,$$

$$\left(\vec{x}_3, \vec{x}_1\right) = 47, \quad \left(\vec{x}_3, \vec{x}_2\right) = 111, \quad \left(\vec{x}_3, \vec{x}_3\right) = 158.$$

Составляем определитель Грама и вычисляем его значение:

$$\begin{vmatrix} 14 & 33 & 47 \\ 33 & 78 & 111 \\ 47 & 111 & 158 \end{vmatrix} = 14 \cdot \begin{vmatrix} 78 & 111 \\ 111 & 158 \end{vmatrix} - 33 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 111 \\ 47 & 158 \end{vmatrix} + 47 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 78 \\ 47 & 111 \end{vmatrix} = 0.$$

В соответствии с критерием Грама система векторов  $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \right\}$  является линейно зависимой.  $\otimes$

**Пример 2.2.2.** Радиус-вектор  $\vec{x}$  в пространстве  $R^3$  имеет разложение по стандартному базису (рисунок 1)

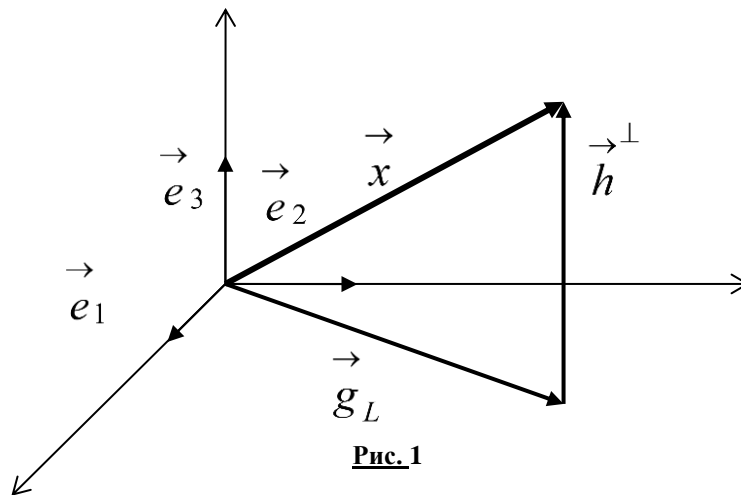
$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Обозначим координатную плоскость  $X^1OX^2$  как  $L^2$ .

Представить вектор  $\vec{x}$  в виде разложения

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp,$$

где  $\vec{g}_L \in L^2$ ,  $\vec{h}^\perp \in L^{2\perp}$ .



**Рис. 1**

**Решение.** Разложим вектор  $\vec{g}_L$  по базису подпространства  $L^2$ :

$$\vec{g}_L = g^1\vec{e}_1 + g^2\vec{e}_2.$$

Вектор

$$\vec{h}^\perp = \vec{x} - \vec{g}_L \in L^{2\perp}.$$

Следовательно, он ортогонален базису подпространства  $L^2$ . Запишем условия ортогональности

вектора  $\vec{h}^\perp$  подпространству  $L^2$ , состоящие в том, что вектор  $\vec{h}^\perp$  должен быть ортогонален всем векторам базиса  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$ :

$$\left( \vec{h}^\perp, \vec{e}_1 \right) = 0,$$

$$\left( \vec{h}^\perp, \vec{e}_2 \right) = 0.$$

Получаем СЛАУ

$$\begin{cases} \left( \vec{x} - \vec{g}_L, \vec{e}_1 \right) = 0, \\ \left( \vec{x} - \vec{g}_L, \vec{e}_2 \right) = 0, \end{cases}$$

которую перепишем в виде

$$\begin{cases} \left( g^1 \vec{e}_1 + g^2 \vec{e}_2, \vec{e}_1 \right) = \left( 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}_1 \right), \\ \left( g^1 \vec{e}_1 + g^2 \vec{e}_2, \vec{e}_2 \right) = \left( 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}_2 \right). \end{cases}$$

После простых преобразований имеем

$$\begin{cases} g^1 = 3, \\ g^2 = 4. \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$\vec{g}_L = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2.$$

Далее имеем:

$$\vec{h}^\perp = \vec{x} - \vec{g}_L = \left( 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \right) - \left( 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \right) = 5\vec{e}_3.$$

Окончательно получаем

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3. \otimes$$

**Пример 2.2.3.** В пространстве  $R^4$  опустить перпендикуляр из точки  $P(-1; 5; 3; 2)$  на гиперплоскость  $H^3$ , проходящую через заданные точки  $A_1(1; 4; 2; 0)$ ,  $A_2(3; 7; 3; 2)$ ,  $A_3(2; 6; 3; -1)$ ,  $A_4(1; 4; 5; 2)$ .

**Решение.** В пространстве  $R^4$  все координаты точек заданы в ортонормированном базисе, который обозначим  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$ . Неявное уравнение гиперплоскости получено выше в примере 3.14 и имеет вид

$$23x^1 - 14x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 29 = 0.$$

Там же записаны направляющие векторы гиперплоскости:

$$\vec{a}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.$$

Проверим, что точка  $P(-1; 5; 3; 2)$  не лежит в плоскости, для чего подставим координаты точки в неявное уравнение плоскости:

$$23 \cdot (-1) - 14 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 29 = -64 \neq 0.$$

Точка плоскости не принадлежит.

Поставим в соответствие точке  $P(-1; 5; 3; 2)$  её радиус-вектор

$$\vec{x} = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

– наклонную к плоскости. Представим наклонную в виде

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp,$$

где вектор  $\vec{g}_L \in H^3$ , а вектор  $\vec{h}^\perp \in H^{3\perp}$ .

Вектор

$$\vec{h}^\perp = \vec{x} - \vec{g}_L \in H^{3\perp}.$$

Следовательно, он ортогонален локальному базису подпространства  $H^3$ . Запишем условия орто-

гональности вектора  $\vec{h}^\perp$  подпространству  $H^3$  (плоскость проходит через начало системы коор-

динат), состоящие в том, что вектор  $\vec{h}^\perp$  должен быть ортогонален всем векторам базиса

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}:$$



$$\left( \begin{array}{c} \vec{h}^\perp \\ \vec{a}_1 \end{array} \right) = 0, \left( \begin{array}{c} \vec{h}^\perp \\ \vec{a}_2 \end{array} \right) = 0, \left( \begin{array}{c} \vec{h}^\perp \\ \vec{a}_3 \end{array} \right) = 0.$$

Получаем СЛАУ

$$\left( \begin{array}{c} \vec{x} - \vec{g}_L \\ \vec{a}_1 \end{array} \right) = 0,$$

$$\left( \begin{array}{c} \vec{x} - \vec{g}_L \\ \vec{a}_2 \end{array} \right) = 0,$$

$$\left( \begin{array}{c} \vec{x} - \vec{g}_L \\ \vec{a}_3 \end{array} \right) = 0.$$

Представляя наклонную  $\vec{g}_L$  разложением по направляющим векторам плоскости (по локальному базису), перепишем СЛАУ в виде

$$\left( \begin{array}{c} g^1 \vec{a}_1 + g^2 \vec{a}_2 + g^3 \vec{a}_3 \\ \vec{a}_1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{a}_1 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{c} g^1 \vec{a}_1 + g^2 \vec{a}_2 + g^3 \vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{a}_2 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{c} g^1 \vec{a}_1 + g^2 \vec{a}_2 + g^3 \vec{a}_3 \\ \vec{a}_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{a}_3 \end{array} \right),$$

или в виде

$$\left( \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_1 \end{array} \right) g^1 + \left( \begin{array}{c} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 \end{array} \right) g^2 + \left( \begin{array}{c} \vec{a}_3 \\ \vec{a}_1 \end{array} \right) g^3 = \left( \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{a}_1 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{array} \right) g^1 + \left( \begin{array}{c} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \end{array} \right) g^2 + \left( \begin{array}{c} \vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 \end{array} \right) g^3 = \left( \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{a}_2 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 \end{array} \right) g^1 + \left( \begin{array}{c} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{array} \right) g^2 + \left( \begin{array}{c} \vec{a}_3 \\ \vec{a}_3 \end{array} \right) g^3 = \left( \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{a}_3 \end{array} \right).$$

Далее, находим значения попарных скалярных произведений векторов локального базиса на плоскости

$$G^T = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1, \vec{a}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_2, \vec{a}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_3, \vec{a}_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vec{a}_1, \vec{a}_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_2, \vec{a}_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_3, \vec{a}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vec{a}_1, \vec{a}_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_2, \vec{a}_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_3, \vec{a}_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

и записываем СЛАУ в окончательном виде:

$$\begin{cases} 18g^1 + 7g^2 + 7g^3 = 20, \\ 7g^1 + 7g^2 + g^3 = 10, \\ 7g^1 + g^2 + 13g^3 = 13. \end{cases}$$

Решение СЛАУ ищем по формулам Крамера.

1) Находим определитель основной матрицы:

$$\det \begin{pmatrix} 18 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} = 738.$$

СЛАУ совместна и определённа.

2) Находим определители, соответствующие каждому неизвестному:

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 20 & 7 & 7 \\ 10 & 7 & 1 \\ 13 & 1 & 13 \end{pmatrix} = -6306,$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 18 & 20 & 7 \\ 7 & 10 & 1 \\ 7 & 13 & 13 \end{pmatrix} = 573,$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 18 & 7 & 20 \\ 7 & 7 & 10 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} = 471.$$

Записываем решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6306/738 \\ 573/738 \\ 471/738 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1051/123 \\ 191/123 \\ 157/123 \end{pmatrix}.$$

Записываем разложение проекции  $\vec{g}_L$  на плоскость по локальному базису:

$$\vec{g}_L = -\frac{1051}{123} \vec{a}_1 + \frac{191}{123} \vec{a}_2 + \frac{157}{123} \vec{a}_3.$$

Теперь находим перпендикуляр:

$$\vec{h} = \vec{x} - \vec{g}_L = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - \left( -\frac{1051}{123} \vec{a}_1 + \frac{191}{123} \vec{a}_2 + \frac{157}{123} \vec{a}_3 \right).$$

Если теперь подставить в последнее равенство разложения векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  по векторам ортонормированного базиса  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$ , то получим вектор  $\vec{h}$  – перпендикуляр, опущенный

из конца наклонной  $\vec{g}_L$  на плоскость  $H^3$ .  $\otimes$

**Пример 2.2.4.** \*) Записать матрицу оператора  $\hat{P}_{x^1ox^2}^{\wedge \perp}$  ортогонального проектирования на координатную плоскость  $X^1OX^2$  в пространстве  $R^3$ .

**Решение.** Этот оператор любому вектору пространства  $R^3$  ставит в соответствие его проекцию на координатную плоскость  $X^1OX^2$  параллельно координатной оси  $Ox^3$ . Согласно

изложенной выше теории, оператор  $\hat{P}_{x^1ox^2}^{\wedge \perp}$  является прямой суммой единичного оператора

$$\hat{I}_{x^1ox^2} : R_{x^1ox^2}^2 \rightarrow R_{x^1ox^2}^2$$

и нулевого оператора

$$\hat{O}_{ox^3} : R_{ox^3}^1 \rightarrow R_{ox^3}^1.$$

На главной диагонали его матрицы расположены  $2 \times 2$  клетка вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и  $1 \times 1$  клетка вида  $(0)$ . Остальные элементы равны нулю:

$$P_{x^1 O x^2}^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что оператор  $\hat{P}_{x^1 O x^2}^\perp$  является самосопряжённым.

Найдём, например, проекцию вектора  $\vec{x}$  из предыдущей задачи на координатную плоскость  $X^1 O X^2$ . Запишем для этого образ вектора

$$\vec{x} = 3 \vec{e}_1 + 4 \vec{e}_2 + 5 \vec{e}_3$$

при действии оператора  $\hat{P}_{x^1 O x^2}^\perp$  в координатной форме

$$P_{x^1 O x^2}^\perp |x\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Результат, очевидно, совпадает с результатом предыдущей задачи.  $\otimes$

### Практическое занятие 3. Поверхности второго порядка

#### Предварительные сведения

**Квадратичной формой**  $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$  от  $n$  переменных называется формальное выражение

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} x^i x^j,$$

где  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) – симметрические вещественные коэффициенты.

При изменении базиса в пространстве в пространстве  $R^n$  матрица квадратичной формы преобразуется по закону

$$\Phi' = A^T \Phi A.$$

Квадратичная форма, определённая на векторах пространства  $R^n$ , является положительно определённой в том и только в том случае, если в каком-либо базисе  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \subset R^n$  все

угловые миноры её матрицы  $\phi_{ij}(\vec{a}_i, \vec{a}_j)$  положительны, то есть

$$M_1 = \varphi_{11} > 0, M_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\dots, M_n = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

**Поверхностью второго порядка** в пространстве  $R^3$  называется множество точек  $\vec{x} \in R^3$ , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} x^i x^j + 2 \sum_{k=1}^3 b_k x^k + c = 0.$$

В пространстве  $R^2$  существуют две **кривые второго порядка**, называемые **центральными**. Эти кривые описываются каноническими уравнениями вида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$$

и называются, соответственно, **эллипсом** и **гиперболой**.

В пространстве  $R^3$  существует три типа **невырожденные**, центральные поверхности второго порядка, определяемых каноническими уравнениями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1.$$

Поверхности, задаваемые в пространстве  $R^3$  этими уравнениями, называются соответственно, **эллипсоидом**, **однополостным гиперboloидом** и **двуполостным гиперboloидом**.

В трёхмерном пространстве  $R^3$  существует **коническая поверхность** с каноническим уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0.$$

В пространстве  $R^3$  существуют две невырожденные нецентральные поверхности с каноническими уравнениями:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 2x_3$$

– эллиптический параболоид;

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 2x_3$$

– гиперболический параболоид.

В пространстве  $R^3$  общий вид **вырожденной поверхности** получается параллельным переносом вдоль оси  $OX_3$  какой-либо кривой второго порядка на плоскости  $X_1OX_2$ . При этом для эллипса, гиперболы и параболы получаются поверхности, носящие соответственно названия **эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры**. Пара параллельных, пересекающихся или слившихся прямых приводит, соответственно, к **паре параллельных, пересекающихся или слившихся плоскостей**

### Примеры с решением

**Пример 2.3.1.** Привести квадратичную форму, имеющую в пространстве  $R^3$  вид

$$\varphi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = 3(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 4x^1x^2 + 4x^1x^3 - 2x^2x^3,$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием.

**Решение.** Вид квадратичной формы задан в базисе

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{matrix} \right\} \subset R^3.$$

Запишем симметричную матрицу квадратичной формы, для чего слагаемые с перекрёстными произведениями представим в виде суммы двух равных слагаемых:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) &= \\ &= 3(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + (2x^1x^2 + 2x^2x^1) + (2x^1x^3 + 2x^3x^1) - (x^2x^3 + x^3x^2) = \\ &= 2x^1x^2 + 2x^1x^3 + 2x^2x^1 + 3(x^2)^2 - x^2x^3 + 2x^3x^1 - x^3x^2 + 3(x^3)^2. \end{aligned}$$

Теперь матрица квадратичной формы принимает вид:

$$\Phi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\mu & 2 & 2 \\ 2 & 3-\mu & -1 \\ 2 & -1 & 3-\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^3 - 6\mu^2 + 32 = 0.$$

Корни характеристического уравнения  $\mu_1 = -2$ ,  $\mu_{2,3} = 4$ .

Чтобы построить матрицу ортогонального преобразования найдём собственные векторы этого оператора. Для этого решим следующие системы линейных алгебраических уравнений.

1) Случай  $\mu_1 = -2$ . Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 + 5x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 + 5x^3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первый собственный вектор

$$\vec{x}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Случай  $\mu_{2,3} = 4$ . Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} -4x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} a+b \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, второй и третий собственные векторы

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Векторы  $x_2$  и  $x_3$  ортогональны вектору  $x_1$ , но не ортогональны между собой. Для ортогонализации системы собственных векторов применим алгоритм ортогонализации Шмидта. Положим

$$\vec{g}_1 = x_1, \vec{g}_2 = x_2, \vec{g}_3 = x_3 + \alpha x_2.$$

Так как должно быть  $(\vec{g}_2, \vec{g}_3) = 0$ , то

$$\left( x_2, x_3 + \alpha x_2 \right) = 0, \left( x_2, x_3 \right) + \alpha \left( x_2, x_2 \right) = 0.$$

Откуда

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \alpha = 0, \alpha = -\frac{1}{5}.$$

Приходим к ортогональной системе собственных векторов ассоциированного оператора:

$$\vec{g}_1 = -2e_1 + e_2 + e_3, \vec{g}_2 = \frac{1}{2}e_1 + e_2, \vec{g}_3 = \frac{2}{5}e_1 - \frac{1}{5}e_2 + e_3,$$

$$\|\vec{g}_1\| = \sqrt{6}, \|\vec{g}_2\| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \|\vec{g}_3\| = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Нормируя эту систему, получаем:

$$\vec{h}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}e_3,$$

$$\vec{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}e_2,$$

$$\vec{h}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}e_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}e_3.$$

Матрица ортогонального преобразования

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

осуществляет переход между ортонормированными базисами



$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \Rightarrow \left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$$

и, следовательно, является ортогональной. Учитывая, что для ортогональной матрицы выполняется условие

$$A^{-1} = A^T,$$

Запишем формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе от старого базиса к новому базису:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}^T.$$

Проводя вычисления, получаем

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обозначая координаты в базисе  $\left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$  как  $\{y^1, y^2, y^3\}$ , запишем канонический вид квадратичной формы

$$\phi \left( \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix} \right) = -2(y^1)^2 + 4(y^2)^2 + 4(y^3)^2. \otimes$$

**Пример 2.3.2.** Найти значения параметра  $\lambda$ , при которых является положительно определённой квадратичная форма

$$\phi \left( \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix} \right) = 4(x^1)^2 + 2x^1x^2 + (x^2)^2 + 4x^1x^3 - 6x^2x^3 + \lambda(x^3)^2.$$

**Решение.** Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Находя её главные миноры и применяя критерий Сильвестра, имеем:

$$M_1 = \varphi_{11} = 4 > 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda - 52 > 0.$$

Следовательно,  $\lambda > \frac{52}{3}$ .  $\otimes$

**Пример 2.3.3.** Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение перепишем в виде

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 5.$$

Вводим новые координаты по формулам

$$x_1' = x_1 + 1, \quad x_2' = x_2 - 2.$$

Эти формулы описывают параллельный перенос начала системы координат в точку  $O'(-1; 2)$ , в которой уравнение принимает вида

$$x_1'^2 + x_2'^2 = 5.$$

Это уравнение, очевидно, описывает окружность с центром в точке  $O'(-1; 2)$  радиуса

$$R = \sqrt{5}. \quad \otimes$$

**Пример 2.3.4.** Какую линию описывает уравнение

$$x_2 = 1 - \sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}.$$

Р е ш е н и е. Уравнение переписываем в виде

$$x_2 - 1 = -\sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}$$

и возводим обе части в квадрат (приобретаем новые корни)

$$(x_2 - 1)^2 = 11 - 4x_1 - x_1^2.$$

Преобразуем уравнение, выделяя полный квадрат:

$$x_1^2 + 4x_1 + 4 + (x_2 - 1)^2 = 15,$$

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 15.$$

Это уравнение описывает часть окружности с центром в точке  $O'(-2; 1)$  радиуса  $R = \sqrt{15}$ , лежащую ниже новой горизонтальной оси с уравнением  $x_2 = 1$ .  $\otimes$

**Пример 2.3.5.** Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 5 = 0.$$

Решение. Уравнение запишем в виде

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 0.$$

Это уравнение описывает точку  $M(2; 1)$ .  $\otimes$

**Пример 2.3.6.** Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$100x_1^2 + 25x_2^2 + 200x_1 - 100x_2 - 200 = 0.$$

Решение. Уравнение переписываем в виде

$$100(x_1 + 1)^2 + 25(x_2 - 2)^2 = 400$$

и делим обе части на 400:

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{4} + \frac{(x_2 - 2)^2}{16} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с центром в точке  $O'(-1; 2)$  и полуосями  $a = 2$  и  $b = 4$

.  $\otimes$

**Пример 2.3.7.** Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1 = -2\sqrt{-5 - 6x_2 - x_2^2}.$$

Решение. Уравнение преобразуем к виду

$$x_1^2 + 4(x_2 + 3)^2 = 16,$$

возводя обе части в квадрат. Делим обе части на 16:

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{(x_2 + 3)^2}{4} = 1.$$

Уравнение описывает часть эллипса с центром в точке  $O'(0; -3)$  и полуосями  $a = 4$  и  $b = 2$ , лежащую слева относительно оси  $OX_2$ .  $\otimes$

**Пример 2.3.8.** Линия второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1, \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \right\} \subset R^2 \text{ уравнением}$$

$$11(x^1)^2 - 20x^1x^2 - 4(x^2)^2 - 20x^1 - 8x^2 + 1 = 0.$$

Привести уравнение линии к каноническому виду и определить её тип.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi \left( \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix} \right) = 11(x^1)^2 - 20x^1x^2 - 4(x^2)^2 =$$

$$= 11(x^1)^2 - 10x^1x^2 - 10x^2x^1 - 4(x^2)^2$$

Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Квадратичной форме  $\varphi\left(\begin{smallmatrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{smallmatrix}\right)$  ставим в соответствие симметрический оператор  $\hat{T}$  с мат-

рицей  $T = \Phi$  и записываем характеристическое уравнение:

$$\det \begin{pmatrix} t_1^1 - \mu & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 - \mu \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 11 - \mu & -10 \\ -10 & -4 - \mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \mu^2 - 7 \cdot \mu - 144 = 0.$$

Корни характеристического уравнения  $\mu_1 = -9$  и  $\mu_2 = 16$ . Находим собственные векторы опе-

ратора  $\hat{T}$ , соответствующие собственным значениям  $\mu_1 = -9$  и  $\mu_2 = 16$ , для чего решаем две однородные СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 20x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 + 5x^2 = 0, \end{cases} \\ \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 - 20x^2 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений первой СЛАУ приводит к первому собственному вектору

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

а фундаментальная система решений второй – ко второму собственному вектору

$$\vec{x}_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Эти векторы ортогональны, но не нормированы. Нормируем их:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\|\vec{x}_1\|} \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_2;$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{\|\vec{x}_2\|} \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_2.$$

Матрица перехода от старого базиса к новому базису имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Преобразование от нового базиса к старому осуществляется при помощи обратной матрицы, которая в силу ортогональности матрицы  $A$  равна транспонированной к ней, то есть

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Координаты в новом базисе выражаются через координаты в старом базисе при помощи матрицы

$$(A^{-1})^T = (A^T)^T = A,$$

обратный переход от новых координат к старым производится при помощи матрицы  $A^{-1}$ . Имеем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

В базисе  $\left\{ \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{matrix} \right\}$  квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\mu_1(y^1)^2 + \mu_2(y^2)^2 = -9(y^1)^2 + 16(y^2)^2.$$

Линейные слагаемые преобразуются так:

$$-20x^1 = -\frac{20}{\sqrt{5}}y^1 + \frac{40}{\sqrt{5}}y^2;$$

$$-8x^2 = -\frac{16}{\sqrt{5}}y^1 - \frac{8}{\sqrt{5}}y^2.$$

Подстановка в уравнение приводит его к виду:

$$-9(y^1)^2 + 16(y^2)^2 - \frac{36}{\sqrt{5}}y^1 + \frac{32}{\sqrt{5}}y^2 + 1 = 0.$$

Выделяя полный квадрат по  $y^1$ ,  $y^2$  и приводя подобные члены, получаем каноническое уравнение линии в виде

$$-9\left(y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 16\left(y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5 = 0,$$

Откуда совершая параллельный перенос, то есть полагая

$$z^1 = y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad z^2 = y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

окончательно имеем:

$$\frac{(z^1)^2}{5/9} - \frac{(z^2)^2}{5/16} = 1.$$

Получили каноническое уравнение линии второго порядка – гиперболы. Отметим, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

перехода от старого базиса к новому базису является матрицей оператора (аффинора) поворота системы координат на такой угол  $\varphi$ , что  $\cos \varphi = 1/\sqrt{5}$  и  $\sin \varphi = 2/\sqrt{5}$ . Далее, в соответствии с формулами

$$z^1 = y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad z^2 = y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

осуществляется параллельный перенос начала системы координат в новое положение – точку с координатами  $O' \left( -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ .  $\otimes$

**Пример 2.3.9.** Поверхность второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \subset R^3$  уравнением

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 - 12\sqrt{30}x_1 - 14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 + 506 = 0.$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду и определить её тип.

**Решение.** Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi \left( \vec{x}, \vec{x} \right) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Матрица квадратичной формы

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения ассоциированного оператора  $\mu_1 = -2$ ,  $\mu_{2,3} = 4$ . Собственные векторы

$$\vec{x}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_2 + 0 \vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}} \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{30}} \vec{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{30}} \vec{e}_3.$$

Это ортонормированная система. Матрица перехода от старого базиса к новому базису получается непосредственно из приведённых разложений:

$$A = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

и является ортогональной ( $A^{-1} = A^T$ ).

Преобразование координат осуществляется с помощью матрицы  $A$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

и приводит квадратичную форму к виду

$$\varphi \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{pmatrix} = 4x_1'^2 - 2x_2'^2 + 4x_3'^2.$$

Линейные члены преобразуются так:

$$-12\sqrt{30}x_1 - 14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 = -40\sqrt{6}x_1' + 12\sqrt{5}x_2'.$$

В новой системе координат уравнение поверхности принимает вид:

$$4x_1'^2 - 2x_2'^2 + 4x_3'^2 - 40\sqrt{6}x_1' + 12\sqrt{5}x_2' + 506 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, приводим уравнение к виду

$$4(x_1' - 5\sqrt{6})^2 - 2(x_2' - 3\sqrt{5})^2 + 4x_3'^2 - 4 = 0.$$

Вводя обозначения  $y_1 = x_1' - 5\sqrt{6}$ ,  $y_2 = x_2' - 3\sqrt{5}$ ,  $y_3 = x_3'$ , получаем следующий вид уравнения:

$$y_1^2 - \frac{y_2^2}{2} + y_3^2 = 1.$$

Получили уравнение однополостного гиперboloида.  $\otimes$

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора

$$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3,$$

имеющего в каноническом базисе пространства  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \subset R^3$  матрицу:

$$1) A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}; 2) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора

$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ , действие которого задано приведёнными ниже координатные равенства:

$$\left( \forall \vec{x} \in R^3 \right)$$

$$1) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 2x^2 \\ 3x^3 \end{pmatrix}; 2) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^1 + x^2 \\ x^1 + x^2 + x^3 \end{pmatrix};$$

$$3) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x^2 \\ 0 \\ x^1 + x^2 \end{pmatrix}; 4) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$5) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}; 6) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

3. Линейный оператор  $\hat{T}: E^3 \rightarrow E^3$  в некотором ортонормированном базисе  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$

задан матрицей:



$$1) T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; 2) T = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix};$$

$$3) T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}; 4) T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Построить в пространстве  $E^3$  ортонормированный базис собственных векторов оператора  $\hat{T}$  и записать матрицу оператора  $\hat{T}$  в этом базисе.

4. Пусть в пространстве зафиксирован канонический базис

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1, \\ \vec{e}_2, \\ \vec{e}_3 \end{matrix} \right\} \subset R^3$$

и пусть дан некоторый линейный оператор  $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ . Показать, что линейные оболочки следующего вида

$$L\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \right\}, L\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \end{matrix} \right\}, L\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{matrix} \right\}, L\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1, \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \right\}, L\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1, \\ \vec{e}_3 \end{matrix} \right\}, L\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_2, \\ \vec{e}_3 \end{matrix} \right\}$$

являются инвариантными подпространствами относительно оператора  $\hat{A}$ .

5. Пусть подпространства  $L_1 \subset X^n$  и  $L_2 \subset X^n$  инвариантны относительно оператора

$$\hat{A}: X^n \rightarrow X^n.$$

Показать, что подпространства  $L_1 + L_2$  и  $L_1 \cap L_2$  также инвариантны относительно оператора

$$\hat{A}.$$

6. Показать, что если  $L \subset X^n$  – инвариантное подпространство оператора

$$\hat{A}: X^n \rightarrow X^n,$$

то  $L$  является инвариантным подпространством и относительно операторного многочлена

$$\hat{F}(\hat{A}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{A} + a_2 \hat{A}^2 + \dots + a_m \hat{A}^m.$$

7. Пусть  $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$  – некоторый линейный оператор. Доказать, что если оператор  $\hat{A}$  биективный, то его инвариантные подпространства являются инвариантными и относительно оператора  $\hat{A}^{-1}$ .

8. Пусть  $\hat{T}: R^2 \rightarrow R^2$  имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора  $\hat{T}$ , если

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Пусть  $\hat{T}: R^3 \rightarrow R^3$  имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора  $\hat{T}$ , если

$$1) T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; 2) T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Пусть  $\hat{T}: R^4 \rightarrow R^4$  имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти все собственные значения и собственные подпространства оператора  $\hat{T}$ .

Показать, что линейная оболочка

$$L \left\{ \overset{\rightarrow}{e}_1 + 2 \overset{\rightarrow}{e}_2, \overset{\rightarrow}{e}_2 + \overset{\rightarrow}{e}_3 + 2 \overset{\rightarrow}{e}_4 \right\}$$

является инвариантным подпространством оператора  $\hat{T}$ .

11. Получить параметрические и неявные уравнения плоскости  $H^m \subset R^n$ , проходящей через заданные точки

$$A_1(0; 6; 3; 5; 1), A_2(-3; 2; 4; 1; 0), \\ A_3(5; 1; 4; 3; 2), A_4(-1; 3; -4; 2; -1).$$

12. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \right\} \subset R^3:$$

$$1) \vec{x}_1 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_2 = 6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

$$2) \vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_2 = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_3 = 7\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3.$$

13. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4 \right\} \subset R^4:$$

$$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{x}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{x}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4,$$

$$\vec{x}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4.$$

14. Пусть  $L^3 \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$  – линейное многообразие в  $E^4$ , а  $\vec{x}$  – наклонная к многообразию

$L^3$ . Найти наименьший угол между вектором  $\vec{x}$  и многообразием  $L^3$ , если:

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_4.$$

15. В ортонормированном базисе  $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$  пространства  $E^4$  задана система векто-

ров

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_3 - 13\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 9\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, является ли эта система векторов линейно независимой.

2) Найти объём параллелепипеда, построенного на тройке векторов

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}.$$

3) Используя процесс ортогонализации Шмидта, построить на их основе новый ортонормированный базис пространства  $R^4$ .

16. В пространстве  $R^5$  найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

$$1) \vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 - \vec{e}_5;$$

$$2) \vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 - 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_5.$$

17. Систему строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

дополнить двумя строками так, чтобы вся система стала ортогональной.

18. В пространстве  $R^4$  даны две плоскости  $H_1$  и  $H_2$  с направляющими векторами

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\} \subset H_1, \left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2 \right\} \subset H_2,$$

соответственно. Найти наименьший угол, образованный векторами первой плоскости с векторами второй плоскости, если:

$$1) \vec{a}_1 = \vec{e}_1, \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$$

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{b}_2 = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4;$$

$$2) \vec{a}_1 = \vec{e}_1, \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$$

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{b}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$$

19. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение:

$$1) x_2 = -1 - \frac{3}{5} \sqrt{26 - 2x_1 + x_1^2};$$

$$2) x_1 = -4x_2^2 + 8x_2 - 1;$$

$$3) x_1 = 2 - \sqrt{3 - x_2}.$$

20. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка:

$$1) 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2 - 80 = 0;$$

$$2) 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 16 = 0.$$

21. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

$$1) 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{16}{3}x_2 + \frac{32}{3}x_3 + 10 = 0;$$

$$2) \alpha x_1 - 3\sqrt{2}x_2 + 2\sqrt{3}x_3 - 7 = 0,$$

где  $\alpha = 5$  или  $\alpha = 0$ .

## ЧАСТЬ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

#### Практическое занятие 1. Понятие предела числовой последовательности

##### Предварительные сведения

Если каждому натуральному числу  $n$  по некоторому закону ставится в соответствие вполне определённое действительное число, то говорят, что задана **бесконечная числовая последовательность**

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$$

Числа  $a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) называются **элементами (членами)** последовательности  $(a_n)$ .

Числовая последовательность  $(a_n)$  называется **монотонно возрастающей (монотонно убывающей)**, если

$$(\forall n \in N): a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1}),$$

и **строго монотонно возрастающей (строго монотонно убывающей)**, если

$$(\forall n \in N): a_n < a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}).$$

Пусть  $\varepsilon \in R^1$  ( $\varepsilon > 0$ ) и  $x_0 \in R^1$ . Тогда множество

$$U_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in R^1 : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

называется  **$\varepsilon$ -окрестностью** числа (точки)  $x_0$ .

Последовательность  $(x_n)$  действительных чисел **сходится к действительному числу  $x_0$** , если для каждого (сколь угодно малого) положительного числа  $\varepsilon$  найдётся номер  $n_0$ , такой, что начиная с этого номера, то есть, для всех номеров  $n \geq n_0$ , выполняется неравенство

$$|x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Пусть  $(x_n)$  и  $(y_n)$  – числовые последовательности, сходящиеся, соответственно, к пределам  $x_0$  и  $y_0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $x_n \equiv c$ , где  $c$  – некоторая постоянная величина (число), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c;$$

2) существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ , причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 + y_0;$$

3) существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$ , причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 y_0;$$

4) если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ , то существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}$ , причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{1}{x_0}.$$

### Примеры с решением

**Пример 3.1.1.** Показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ .

**Решение.** Действительно, для произвольного  $\varepsilon > 0$  имеем:

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n+1-n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, для любого наперед заданного  $\varepsilon > 0$  мы нашли номер  $n_0 = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ , такой, что

$$(\forall n \geq n_0) \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon, \text{ следовательно, } 1 \text{ является пределом данной последовательности.}$$

⊗

**Пример 3.3.1.2.** Доказать существование предела последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1}.$$

**Решение.** Покажем, что данная последовательность монотонна и ограничена. Из формулы общего члена последовательности имеем:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^{n+1}+1} \Rightarrow x_{n+1} > x_n,$$

то есть последовательность монотонно возрастает и ограничена снизу, например, первым элементом  $x_1$ .

При любом  $n$ , очевидно,  $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$ . Последовательность ограничена сверху:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1. \end{aligned}$$

Последовательность монотонна и ограничена, следовательно, по критерию сходимости имеет предел. ⊗

**Пример 3.3.1.3.** Доказать, что последовательность  $(x_n)$  есть бесконечно малая последовательность, если

$$1) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad 2) x_n = \frac{2n}{n^3+1}; \quad 3) x_n = \frac{1}{n!}; \quad 4) x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n.$$

Составить для каждого случая таблицу следующего вида:

$\varepsilon$	0,1	0,001	0,0001	...
$n_0$				

Решение. 1) По определению

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}): (\forall n \geq n_0) \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] \Rightarrow n_0 = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1.$$

Таким образом, по произвольному положительному числу  $\varepsilon$  мы нашли номер  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например,  $\varepsilon = 0,1$ . Тогда

$$n_0 = \left[ \frac{1}{1/10} \right] + 1 = 11.$$

И так далее, для указанных в таблице значений  $\varepsilon$ . Искомая таблица принимает вид:

$\varepsilon$	0,1	0,001	0,0001	...
$n_0$	11	1001	10001	...

2) По определению

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}): (\forall n \geq n_0) \left| \frac{2n}{n^3 + 1} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left| \frac{2n}{n^3 + 1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2n}{n^3} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n^2}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Rightarrow n > \left[ \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right] \Rightarrow n_0 = \left[ \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right] + 1.$$



Таким образом, по произвольному положительному числу  $\varepsilon$  мы нашли номер  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3 + 1} = 0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например,  $\varepsilon = 0,1$ . Тогда

$$n_0 = \left[ \sqrt{\frac{2}{1/10}} \right] + 1 \approx [4,472] + 1 = 5.$$

И так далее, для указанных в таблице значений  $\varepsilon$ . Искомая таблица принимает вид:

$\varepsilon$	0,1	0,001	0,0001	...
$n_0$	5	46	142	...

Остальные примеры решаются аналогично и предлагаются для самостоятельного решения.

⊗

**Пример 3.3.1.4.** Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2 - 1}.$$

**Решение.** Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2 - 1} = 2 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Используя правила действий с пределами последовательностей, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 - 1} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 2. \quad \otimes$$

**Пример 3.3.1.5.** Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{(2n+1) \cdot (3n+1)}{n^2}.$$

**Решение.** Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{(2n+1) \cdot (3n+1)}{n^2} = \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{3n+1}{n} = \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right).$$

Используя правила действий с пределами, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot (3n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 2 \cdot 3 = 6. \otimes$$

**Пример 3.3.1.6.** Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

**Решение.** Имеем неопределённость вида  $[\infty - \infty]$ . Преобразуем формулу для общего члена:

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Вычисляем предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}. \otimes$$

**Пример 3.3.1.7.** Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

**Решение.** Преобразуем формулу для общего члена последовательности:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \otimes$$

**Пример 3.3.1.8 (неперово число  $e$ ).** Показать, что последовательность с общим членом

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

сходится, то есть, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**Решение.** Приведём значение этого числа, применяемое в обычных расчётах, не требующих слишком большой точности:  $e = 2,71828\dots$

Приступим к строгому исследованию данного предела. Докажем сходимость последователь-

ность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Покажем, что

$$(\forall b > -1) \wedge (\forall n \in N) (1+b)^n \geq 1+nb.$$

Для этого применим индукцию по  $n$ :

1) при  $n = 1$  имеем  $1+b \geq 1+b$ , что всегда выполняется;

2) предположим, что  $(\forall n = k) (1+b)^k \geq 1+kb$ ;

3) покажем, что  $(\forall b > -1) \wedge (n = k+1) (1+b)^{k+1} \geq 1+(k+1)b$ .

Справедливость заключения следует из цепочки выкладок:

$$(1+b)^{k+1} = (1+b)^k (1+b) \geq (1+b)(1+kb) = 1+kb+b+kb^2 \geq 1+(k+1)b,$$

так как  $kb^2 > 0$ .

Так как неравенство справедливо при  $n = 1$ , оно справедливо и при любом  $n \in N$ . Итак,  $(\forall b > -1)$  и  $(\forall n \in N)$

$$(1+b)^n \geq 1+nb. \quad (1)$$

Рассмотрим последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Для этой последовательности

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1} \cdot (n-1)}{(n-1)^n \cdot (n+1)^{n+1} \cdot (n-1)} = \\ &= \frac{(n^2)^{n+1} \cdot (n-1)}{(n^2-1)^{n+1} \cdot n} = \frac{(n^2-1+1)^{n+1} \cdot n-1}{(n^2-1)^{n+1} \cdot n} = \\ &= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \{используем(1)\} \geq \\ &\geq \left(1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\forall n \in N) \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1$$

а, следовательно,  $y_n \leq y_{n-1}$ , то есть, последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

монотонно убывает. Так как

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1,$$

эта последовательность ограничена снизу. Но тогда по критерию сходимости ограниченной последовательности данная последовательность сходится.

Далее имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

где использовано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Так как предел в правой части равенства существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

то существует и предел левой части. Итак, предел существует и обозначается

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \otimes$$

**Пример 3.3.1.9.** Доказать неравенство Бернулли:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

**Решение.** Неравенство справедливо при  $n = 1, 2$ , что легко проверяется.

Например, для  $n = 2$  имеем:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 \geq 1 + x_1 + x_2.$$

Предположим, что неравенство справедливо при  $n = k$ , то есть

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

и покажем, что оно справедливо и при  $n = k + 1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\geq (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)(1 + x_{k+1}) = \\ &= 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} + (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)x_{k+1} \geq \\ &\geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}. \end{aligned}$$

По заключению индукции неравенство справедливо при любом  $k = n$ .  $\otimes$

**Пример 3.3.1.10.** Показать, что если  $x > -1$ , то

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1),$$

причём знак равенства имеет место только при  $x = 0$ .

Решение. Полагая в неравенстве предыдущего примера

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x,$$

получаем требуемое неравенство.  $\otimes$

**Пример 3.3.1.11.** Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = n[\ln(n+3) - \ln n].$$

Решение. Преобразуем формулу для общего члена:

$$x_n = n[\ln(n+3) - \ln n] = \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = 3 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n/3}\right)^{n/3}.$$

Переходя к пределу, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n/3}\right)^{n/3} = 3 \cdot \ln e = 3. \quad \otimes$$

**Пример 3.3.1.12.** Доказать, что последовательность  $(a^n)$  является:

- 1) бесконечно большой последовательностью при  $|a| > 1$ ;
- 2) бесконечно малой последовательностью при  $|a| < 1$ .

Решение. 1) Пусть  $|a| > 1$ . Покажем, что последовательность  $(a^n)$  удовлетворяет определению бесконечно большой последовательности, то есть  $(\forall A > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}): (\forall n \geq n_0)$

$$|a|^n > A. \quad (1)$$

Зададимся произвольным числом  $A > 0$ . Для нахождения номера  $n_0$  решим неравенство (1) относительно номера. Получим

$$\log_{|a|}|a|^n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \lfloor \log_{|a|} A \rfloor.$$

Следовательно, выполнение неравенства (1) начинается с номера

$$n_0 = \lfloor \log_{|a|} A \rfloor + 1.$$

Что и требовалось доказать.

2) Пусть  $|a| < 1$ . Если  $a = 0$ , то  $(\forall n \in \mathbb{N}) a^n = 0$  и, следовательно, последовательность  $(a^n)$  бесконечно малая. Пусть  $a \neq 0$ . Тогда

$$a^n = \left( \left( \frac{1}{a} \right)^n \right)^{-1}. \quad (2)$$

Так в этом случае  $\frac{1}{|a|} > 1$ , то последовательность  $\left( \frac{1}{a^n} \right)$  является бесконечно большой последовательностью, последовательность

$$a^n = \left( \left( \frac{1}{a} \right)^n \right)^{-1}$$

– бесконечно малой последовательностью. Поэтому в силу (2) при  $|a| < 1$  последовательность  $(a^n)$  – бесконечно малая последовательность.  $\otimes$

**Пример 3.3.1.13.** Показать, что если  $(x_n)$  – сходящаяся последовательность, а  $(y_n)$  – бесконечно большая последовательность, то последовательность

$$(z_n) = (x_n + y_n)$$

– бесконечно большая последовательность.

**Решение.** Покажем, что

$$(\forall A > 0) (\exists n_0 \in N): (\forall n \geq n_0) |x_n + y_n| > A.$$

В силу критерия сходимости последовательности сходящаяся последовательность  $(x_n)$  ограничена, то есть

$$(\exists M > 0): (\forall n \in N) |x_n| < M. \quad (1)$$

Пусть задано произвольное  $A > 0$ . Так как последовательность  $(y_n)$  бесконечно большая, то для числа  $A + M$

$$(\exists n_0 \in N): (\forall n \geq n_0) |y_n| > A + M. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем:  $|x_n + y_n| \geq |y_n| - |x_n| > A + M - M = A$ .

Что и требовалось доказать.  $\otimes$

**Пример 3.3.1.14.** Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cos n. \quad (1)$$

**Решение.** Так как  $(\forall x \in R^1) |\cos x| < 1$ , то последовательность  $(\cos n)$  ограничена.

Покажем, что последовательность  $\left( \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right)$  – бесконечно малая последовательность. Действи-

тельно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 0.$$

По свойствам бесконечно малых последовательностей произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность, то есть последовательность с общим членом (1), является бесконечно малой последовательностью и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cos n = 0. \otimes$$

## Практическое занятие 2. Непрерывность и предел функции

### Предварительные сведения

Функция  $f : M \rightarrow f(M)$  называется **непрерывной в точке**  $x_0 \in M$ , если для каждой последовательности  $(x_n)$  точек множества  $M$ , сходящейся к точке  $x_0$ , последовательность  $(f(x_n))$  соответствующих значений функции  $f$  сходится к значению  $f(x_0)$  функции в этой точке (определение непрерывности по Гейне).

Функция  $f : M \rightarrow f(M)$  называется **непрерывной в точке**  $x_0 \in M$ , если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0): |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(определение непрерывности по Коши).

Говорят, что функция  $f$ , определённая на множестве  $M$ , имеет **предел**  $C$  при  $x \rightarrow x_0$ , и пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C,$$

если для каждой последовательности точек

$$x_n \in M - \{x_0\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

последовательность  $(f(x_n))$  соответствующих значений функции сходится к точке (числу)  $C$ , то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = C.$$

Говорят, что функция  $f$ , определённая на множестве  $M$ , имеет **предел**  $C$  при  $x \rightarrow x_0$ , и при этом пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C,$$

если для произвольного числа  $\varepsilon > 0$  найдётся такое число  $\delta > 0$ , что для всех точек  $x$  удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство

$$|f(x) - C| < \varepsilon.$$

Пусть  $x_0$  – предельная точка множества  $M$ . Функция  $\alpha: M \rightarrow \alpha(M)$  называется **бесконечно малой функцией** при условии  $x \rightarrow x_0$ , если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0): |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Пусть  $f$  и  $g$  – две действительные функции, имеющие одно и то же множество определения

$M \subset \mathbb{R}^1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  – некоторое действительное число, а  $x_0$  – предельная точка множества  $M$ . Тогда

если пределы этих функций в точке  $x_0$  существуют и соответственно равны

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b,$$

где  $a, b \in \mathbb{R}^1$ , то справедливы следующие правила выполнения рациональных операций с пределами функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha a;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = ab;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{a}{b}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

### Примеры с решением

**Пример 3.3.1.15.** Вычислить предел функции в точке:  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 5)$ .

**Решение.** Выбираем произвольную последовательность значений аргумента  $(x_n)$ , сходящуюся к 1, то есть такую, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . Используем определение по Гейне:



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 5) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n^2 + x_n + 5) = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 3 + 1 + 5 = 9. \otimes\end{aligned}$$

**Пример 3.3.1.16.** Показать, что  $\lim_{x \rightarrow 6} (2x - 5) = 7$ .

**Решение.** Выбираем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Найдём для него такое  $\delta > 0$ , что из неравенства

$$|x - 6| < \delta \Rightarrow 6 - \delta < x < 6 + \delta. \quad (1)$$

будет следовать неравенство

$$|(2x - 5) - 7| < \varepsilon.$$

Производя тождественные преобразования, получаем:

$$\begin{aligned}|(2x - 5) - 7| < \varepsilon &\Rightarrow |2x - 12| < \varepsilon \Rightarrow 2|x - 6| < \varepsilon \Rightarrow |x - 6| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow 6 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 6 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)\end{aligned}$$

Сравнивая (1) и (2), получаем, что

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Последнее и доказывает, что  $\lim_{x \rightarrow 6} (2x - 5) = 7$ .  $\otimes$

**Пример 3.3.1.17.** Показать, что

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} = 8.$$

**Решение.** По определению предела нужно чтобы выполнялось условие:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0): \left| x - \frac{1}{3} \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство

$$\left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{15 \left( x - \frac{1}{3} \right) \left( x + \frac{1}{5} \right)}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|15x - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{15} < x < \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{15}.$$

Таким образом, как только

$$x \in \left( \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{15}, \frac{1}{3} \right) \cup \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{15} \right),$$

так сразу

$$\left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon.$$

Из этого следует, что  $\delta = \frac{\varepsilon}{15}$ . Итак,

$$(\forall \varepsilon > 0) \left| x - \frac{1}{3} \right| < \frac{\varepsilon}{15} \Rightarrow \left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon,$$

а значит  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} = 8$ .  $\otimes$

**Пример 3.3.1.18.** Найти предел функции в точке:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4}$ .

Р е ш е н и е. Непосредственно перейти к пределу в числителе и знаменателе нельзя, так как

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4} = \left[ \frac{0}{0} \right], \text{ то есть получаем так называемую } \textit{неопределённость вида } \frac{0}{0}. \text{ Для «рас-}$$

крытия» этой неопределённости разложим числитель и знаменатель на множители, предварительно приравняв их к нулю ( $x^2 - 3x + 2 = 0$ ,  $3x^2 + x - 4 = 0$ ) и решив соответствующие квадратные уравнения. В результате получаем:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{3(x-1)\left(x + \frac{4}{3}\right)}.$$

Так как  $x \rightarrow 1$ , но  $x \neq 1$ , то на множитель  $(x-1)$ , дающий в пределе  $x \rightarrow 1$  нуль, можно сократить. В результате получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)}{3\left(x + \frac{4}{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{4}{3}\right)} = -\frac{1}{7}. \otimes$$

**Пример 3.3.1.19.** Пользуясь определением непрерывности по Коши, показать, что функция  $f(x) = 5x^2 + 5$  непрерывна в точке  $x_0 = 8$ .

Р е ш е н и е. Значение функции в точке  $x_0 = 8$  равно  $f(8) = 325$ . По определению функция будет в точке  $x_0 = 8$  непрерывной, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0): |x - 8| < \delta \Rightarrow |5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon.$$

Решаем последнее неравенство, чтобы найти промежуток числовой оси  $M$  такой, что как только  $x \in M$ , так сразу  $|5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon$ . Имеем:

$$|5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon \Rightarrow |5x^2 - 320| < \varepsilon \Rightarrow 64 - \frac{\varepsilon}{5} < x^2 < 64 + \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow$$

$$\sqrt{64 - \frac{\varepsilon}{5}} < x < \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}}.$$

Таким образом,

$$x \in \left( \sqrt{64 - \frac{\varepsilon}{5}}, \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}} \right) \Rightarrow |(5x^2 + 5) - 325| < \varepsilon,$$

а это и означает, что функция в точке  $x_0 = 8$  непрерывна.  $\otimes$

**Пример 3.3.1.20.** Найти и классифицировать точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 0; \\ \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**Решение.** Функция непрерывна в промежутках

$$(-\infty, 0], \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right).$$

Исследуем функцию в точках  $0$  и  $\frac{\pi}{2}$ .

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (2 - x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \cos x = 1,$$

то  $x = 0$  является точкой разрыва первого рода, в ней функция испытывает скачок

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 2.$$

Далее имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \cos x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} 0 = 0.$$

Так как  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

и функция в точке  $x = \frac{\pi}{2}$  непрерывна. Таким образом, функция непрерывна на всей числовой оси

$\mathbb{R}$ , кроме точки  $x = 0$ , которая является точкой разрыва первого рода.  $\otimes$

**Пример 3.3.1.21.** Найти точки разрыва функции, определённой формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x^2 - 9}, & x \neq 3, \\ 1, & x = 3. \end{cases}$$

Если точки разрыва существуют, то дать их классификацию.

**Решение.** Вычислим односторонние пределы при  $x \rightarrow 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{3x^2 - 9} = \frac{1}{18};$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{3x^2 - 9} = \frac{1}{18}.$$

Итак, пределы слева и справа существуют, равны, но не равны значению функции в точке  $x = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \frac{1}{18} \neq 1.$$

Имеем точку разрыва первого рода, а именно, точку устранимого разрыва.  $\otimes$

**Пример 3.3.1.22.** Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin x}{1 - \cos x}.$$

**Решение.** Непосредственно вычислить предел нельзя. Поэтому заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x \cdot \sin x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0.$$

Таким образом, функции в числителе и знаменателе при  $x \rightarrow 0$  являются бесконечно малыми функциями.

Для нахождения предела их отношения заменим эти функции эквивалентными бесконечно малыми при  $x \rightarrow 0$  функциями. Вспомним, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

то есть,  $\sin x \approx x$  при  $x \rightarrow 0$ .

Далее, вспоминая, что  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  и заменяя  $\sin \frac{x}{2} \approx \frac{x}{2}$ , получим, что

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \approx 2 \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}.$$

Теперь предел легко находится как предел отношения эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x}{x^2 / 2} = 4. \quad \otimes$$

### Практическое занятие 3. Дифференцируемость функции одного переменного

#### Предварительные сведения

Пусть  $M \subset R^1$  – допустимое множество. Действительная функция  $f : M \rightarrow f(M)$  называется **дифференцируемой в точке**  $x_0 \in M$ , если выполняется условие:

$$(\exists U(x_0) \subset M) : (\forall x \in U(x_0))$$

$$f(x) = f(x_0) + D(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0),$$

где  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0$ .

Пусть  $f$  – функция, определённая на множестве  $M \subset R^1$  и дифференцируемая в точке  $x_0 \in M$ . Тогда величина  $D(x_0)$ , определённая предельным соотношением

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D(x_0),$$

называется **первой производной функции  $f$  в точке  $x_0$**  и обозначается

$$\frac{df}{dx}(x_0) \equiv f'(x_0) \equiv f^{(1)}(x_0).$$

Линейная по смещению  $x - x_0$  часть

$$df(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) \equiv f'(x_0)(x - x_0)$$

приращения функции

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

дифференцируемой в точке  $x_0$  функции  $f$ , называется **первым дифференциалом** этой функции в точке  $x_0$ .

Пусть функции  $f, f_1, f_2$  определены на одном и том же множестве  $M$  и дифференцируемы в точке  $x_0 \in M$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) сумма  $f_1 + f_2$  дифференцируема в точке  $x_0$  и имеет место формула

$$\frac{d(f_1 + f_2)}{dx}(x_0) = \frac{df_1}{dx}(x_0) + \frac{df_2}{dx}(x_0);$$

2) если  $c \in \mathbb{R}^1$ , то функция  $cf$  дифференцируема в точке  $x_0$  и имеет место формула

$$\frac{d(cf)}{dx}(x_0) = c \frac{df}{dx}(x_0);$$

3) произведение  $f_1 f_2$  дифференцируемо в точке  $x_0$  и имеет место формула

$$\frac{d(f_1 f_2)}{dx}(x_0) = \frac{df_1}{dx}(x_0) f_2(x_0) + f_1(x_0) \frac{df_2}{dx}(x_0);$$

4) если  $f(x_0) \neq 0$ , то функция  $1/f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и имеет место формула

$$\frac{d\left(\frac{1}{f}\right)}{dx}(x_0) = -\frac{1}{[f(x_0)]^2} \frac{df}{dx}(x_0);$$

5) если  $f_2(x_0) \neq 0$ , то частное  $f_1/f_2$  дифференцируемо в точке  $x_0$  и имеет место формула

$$\frac{d\left(\frac{f_1}{f_2}\right)}{dx}(x_0) = \frac{1}{[f_2(x_0)]^2} \left[ \frac{df_1}{dx}(x_0) f_2(x_0) - f_1(x_0) \frac{df_2}{dx}(x_0) \right].$$

### Примеры с решением

**Пример 3. 2.1.** Найти производную функцию и дифференциал для функции, определённой формулой

$$f(x) = 4x^5 - 25x^{1/5} - 2\sqrt{x^3} + 7\sqrt[4]{x^{16}}.$$

**Решение.** Для решения задачи используем правило вычисления производной суммы (дифференцируемых) функций, правило вычисления производной функции на число, а также табличную

производную  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( 4x^5 - 25x^{1/5} - 2\sqrt{x^3} + 7\sqrt[4]{x^{16}} \right)' = \\ &= \left( 4x^5 - 25x^{1/5} - 2x^{3/2} + 7x^4 \right)' = 20x^4 - 5x^{-4/5} - 3x^{1/2} + \frac{119}{4}x^{13/4} = \end{aligned}$$

$$= 20x^4 - \frac{5}{\sqrt[5]{x^4}} - 3\sqrt{x} + \frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}}.$$

Так как дифференциал функции (в произвольной точке  $x$ )  $df(x) = f'(x)dx$ , то имеем:

$$df(x) = \left( 20x^4 + 9x^2 - \frac{5}{\sqrt[5]{x^4}} - 3\sqrt{x} + \frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}} \right) dx. \otimes$$

**Пример 3. 2.2.** Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}.$$

**Решение.** В этом примере следует воспользоваться правилом дифференцирования частного двух (дифференцируемых) функций

$$f'(x) = \left( \frac{g_1}{g_2} \right)'(x) = \frac{g_1'(x) \cdot g_2(x) - g_1(x) \cdot g_2'(x)}{[g_2(x)]^2},$$

для чего вычислим сначала производные числителя и знаменателя:

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 3)' = 2x - 2, \quad g'(x) = (x^2 + 2x + 5)' = 2x + 2$$

(здесь мы воспользовались тем, что согласно таблице производных производная постоянной равна нулю, а производная степенной функции вычисляется по формуле  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ).

Теперь используем правило дифференцирования частного:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[ \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \right]' = \frac{g_1'(x) \cdot g_2(x) - g_1(x) \cdot g_2'(x)}{[g_2(x)]^2} = \left[ \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5} \right]' = \\ &= \frac{(2x - 2)(x^2 + 2x + 5) - (x^2 - 2x + 3)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 5)^2} = \\ &= \frac{4x^2 + 4x - 16}{(x^2 + 2x + 5)^2} = 4 \frac{x^2 + x - 4}{(x^2 + 2x + 5)^2}. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 3. 2.3.** Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = a^2 \cdot (x - a) \cdot (x^2 + ax + a^2) + x^2 - 2bx + b^2,$$

и вычислить  $f'(5)$  при  $a = 3, b = 10$ .



Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[ a^2 \cdot (x-a) \cdot (x^2 + ax + a^2) + x^2 - 2bx + b^2 \right]' = \\ &= a^2(x^3 - a^3)' + (x^2 - 2bx + b^2)' = 3a^2x^2 + 2(x-b). \end{aligned}$$

Далее получаем при  $a = 3$ ,  $b = 10$ :

$$f'(5) = 3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot (5 - 10) = 675 - 10 = 665. \otimes$$

**Пример 3. 2.4.** Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 \cos x}{\sin x}.$$

Решение. Используя правило дифференцирования частного двух функций и табличные производные для синуса и косинуса, имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{x^2 + 2 \cos x}{\sin x} \right] = \frac{(2x - 2 \sin x) \cdot \sin x - (x^2 + 2 \cos x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{2x \sin x - x^2 \cos x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{2x \sin x - x^2 \cos x - 2}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{2x}{\sin x} - x^2 \frac{\operatorname{ctgx}}{\sin x} - \frac{2}{\sin^2 x}. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 3. 2.5.** Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Решение. Используя правило дифференцирования частного двух функций и формулу дифференцирования композиции функций

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

имеем:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)' \sqrt{x^2+1} - (\sqrt{x^2+1})'(2x-1)}{(\sqrt{x^2+1})^2} =$$

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (x^2+1)'(2x-1) \\
= & \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (x^2+1)'(2x-1)}{x^2+1} = \\
& \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} 2x(2x-1)}{x^2+1} = \frac{2x^2+2-2x^2+x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \\
= & \frac{x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+2}{(x^2+1)^{3/2}}. \otimes
\end{aligned}$$

**Пример 3. 2.6.** Найти производную функцию для функции, действие которой определено формулой

$$f(x) = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}).$$

**Решение.** Используя правила рациональных операций с производными функций и табличную производную от логарифма, получаем:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[ \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}) \right]' = \\
&= \frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot (x+1+\sqrt{x^2+2x+3})' = \\
&= \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot 2 \cdot (x+1)}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}} = \\
&= \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}{(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}) \cdot (\sqrt{x^2+2x+3})} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}. \otimes
\end{aligned}$$

**Пример 3. 2.7.** Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ и вычислить производные } f'(e), f'\left(\frac{1}{e}\right), f'(e^2).$$

**Решение.** Сначала находим производную функцию:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Вычисляем производные в указанных точках:

$$f'(e) = \frac{1 - \ln e}{e^2} = 0; \quad f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1 - \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\left(\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{1 + 1}{\frac{1}{e^2}} = 2e^2;$$

$$f'(e^2) = \frac{1 - 2 \ln e}{(e^2)^2} = \frac{1 - 2}{e^4} = -e^{-4}. \quad \otimes$$

**Пример 3. 2.8.** Найти производную функцию  $f''(x)$  для функции  $f$ , если  $f(x) = e^{-x^2}$ .

**Решение.** Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$f'(x) = (e^{-x^2})' = e^{-x^2} \cdot (-1) \cdot 2x = -2x \cdot e^{-x^2},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2x \cdot e^{-x^2})' = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot (-2x \cdot e^{-x^2}) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2} = \\ &= 2 \cdot (2x^2 - 1) \cdot e^{-x^2}. \quad \otimes \end{aligned}$$

**Пример 3. 2.9<sup>\*</sup>**). Найти производную функцию  $f'''(x)$  для функции  $f$ , если

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x.$$

**Решение.** Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$f'(x) = (x^2 \cdot \sin x) = 2x \sin x + x^2 \cos x;$$

$$f''(x) = 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x;$$

$$f'''(x) = 6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x. \quad \otimes$$

Рассмотрим случай мультипликативных функций, которые могут быть записаны в виде

$$(\forall x \in M)$$

$$f(x) = g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \dots g_m^{\alpha_m}(x),$$

где  $M \subset R^1$  – общее множество определения для функций  $g_k^{\alpha_k}(x)$ , а числа  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) – показатели степени. Предположим, что функция  $f$  удовлетворяет условию

$$(\forall x \in M) f(x) = g_1^{\alpha_1}(x)g_2^{\alpha_2}(x)\dots g_m^{\alpha_m}(x) > 0.$$

Найти производную функции  $f(x)$ , очевидно, затруднительно даже для малых ( $k = 1, 2, \dots$ ). Поступим следующим образом.

Введём новую функцию:

$$u(x) = \ln f(x) = \ln[g_1^{\alpha_1}(x)g_2^{\alpha_2}(x)\dots g_m^{\alpha_m}(x)].$$

Нетрудно видеть, что эта функция имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln f(x) = \ln[g_1^{\alpha_1}(x)g_2^{\alpha_2}(x)\dots g_m^{\alpha_m}(x)] = \\ &= \alpha_1 \ln g_1(x) + \alpha_2 \ln g_2(x) + \dots + \alpha_m \ln g_m(x). \end{aligned}$$

Дифференцируя функцию

$$u(x) = \ln f(x)$$

с учётом последнего равенства, получаем:

$$u'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot u'(x);$$

$$u'(x) = \alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \dots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)}.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot u'(x) = \\ &= g_1^{\alpha_1}(x)g_2^{\alpha_2}(x)\dots g_m^{\alpha_m}(x) \left[ \alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \dots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)} \right]. \end{aligned}$$

Выражение

$$u' = (\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

называется *логарифмической производной функции*  $f(x)$ .

**Пример 3. 2.10.** Найти производную функцию для функции

$$f(x) = \frac{x}{(x+1) \cdot (x+2)}.$$

Решение. Имеем:

$$u = \ln f = \ln x - \ln(x+1) - \ln(x+2).$$

Далее получаем:

$$u' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{-(x^2-2)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)}.$$

Используя формулу для логарифмической производной, имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot u'(x) = \\ &= \frac{x}{(x+1) \cdot (x+2)} \cdot \frac{-(x^2-2)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)} = \frac{-(x^2-2)}{(x+1)^2 \cdot (x+2)^2}. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 3. 2.11** \*) . Найти производную функцию для функции

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.$$

Решение. Логарифмируя, имеем:

$$u(x) = \ln f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{2} \ln(2x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1).$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{8x^2 + 7x - 4}{2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot (2x-1)}, \\ f'(x) &= x^2 \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \cdot \frac{8x^2 + 7x - 4}{2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot (2x-1)} = \frac{x \cdot (8x^2 + 7x - 4)}{2 \cdot (x+1) \cdot (2x-1)} \cdot \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}. \otimes \end{aligned}$$

Если функция, определённая формулой  $y = f(x)$ , задана неявно, то есть посредством уравнения  $F(x, y) = 0$ , то для нахождения производной функции нужно продифференцировать это уравнение (то есть, обе его части) по  $x$ , помня, что  $y = f(x)$ , и разрешить уравнение относительно  $y'$ .

**Пример 3. 2.12.** Найти первую производную функцию для функции  $y = f(x)$ , заданной неявно уравнением

$$y = \cos(x + y).$$

Решение. Дифференцируем обе части уравнения

$$y = \cos(x + y),$$

помня, что  $y = f(x)$ , получаем:

$$y' = (\cos(x + y))' = -\sin(x + y) \cdot (1 + y'),$$

откуда имеем  $y' = \frac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$ .  $\otimes$

**Пример 3. 2.13.** Найти вторую производную функцию для функции  $y = f(x)$ , заданной неявно уравнением

$$y^3 - 3y + 3x = 1.$$

Решение. Дифференцируя по  $x$  обе части уравнения, имеем

$$3y^2 y' - 3y' + 3 = 0 \Rightarrow y^2 y' - y' + 1 = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{1 - y^2}.$$

Дифференцируя ещё раз, получаем

$$2yy' y' + y^2 y'' - y'' = 0,$$

откуда имеем

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 - y^2}.$$

Заменяя  $y'$  полученным выше выражением, получаем окончательно:

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 - y^2} = \frac{2y}{(1 - y^2)^3}. \otimes$$

Пусть функция  $y = f(x)$  задана параметрически, то есть

$$\begin{cases} y = \psi(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Тогда

$$dy = \psi'(t)dt, \quad dx = \varphi'(t)dt,$$

откуда имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right).$$

**Пример 3. 2.14.** Найти первую и вторую производную функцию для функции  $y$ , заданной параметрически

$$\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t^3 + 5. \end{cases}$$

**Решение.** Непосредственно находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2}{3t^2}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3t^2}\right) = -\frac{2}{3t^3}.$$

Так как из второго уравнения для  $x$  имеем  $t = \sqrt[3]{x-5}$ , отсюда получаем:

$$y_x'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-5)^2}}. \quad \otimes$$

**Пример 3. 2.15** <sup>\*</sup>). Найти первую производную функцию для функции  $y$ , заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 3 \sin t, \\ x = 3 \cos t. \end{cases}$$

**Решение.** Имеем:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{3 \cos t}{3 \sin t} = -\operatorname{ctgt}. \quad \otimes$

**Пример 3. 2.16.** Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x) = \frac{3 \cdot \cos x}{2x + 1}.$$

Решение. Находим дифференциал функции  $y$ , используя определение:

$$dy = y'(x)dx = -3 \frac{2x \sin x + \sin x + 2 \cos x}{(2x + 1)^2} dx. \otimes$$

**Пример 3. 2.17.** Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x) = e^{x^3}.$$

Решение. Путём непосредственного дифференцирования получаем:

$$dy = y'(x)dx = (e^{x^3})' = 3x^2 e^{x^3} dx. \otimes$$

**Пример 3. 2.18.** Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции, определённой формулой

$$y = f(x) = (2x^2 - 3)^5.$$

Решение. Для первого дифференциала имеем:

$$df(x) = 5 \cdot (2x^2 - 3)^4 \cdot 4x \cdot dx = 20x(2x^2 - 3)^4 dx.$$

Аналогично, для второго и третьего дифференциалов получаем:

$$d^2 df(x) = \left[ 20x(2x^2 - 3)^4 \right] (dx)^2 = 60 \cdot (2x^2 - 3)^3 (6 \cdot x^2 - 1) \cdot (dx)^2;$$

$$d^3 df(x) = \left[ 12 \cdot x \cdot (2x^2 - 3)^2 \cdot (6x^2 - 1) + 12 \cdot x \cdot (2x^2 - 3)^3 \right] \cdot (dx)^3 =$$

$$= 720x \cdot (2x^2 - 3)^2 \cdot (8x^2 - 4) \cdot (dx)^3 =$$

$$= 2880 \cdot x \cdot (2x^2 - 3)^2 \cdot (2x^2 - 1) \cdot (dx)^3. \otimes$$

**Пример 3. 2.19.** Вычислить приближённо  $\sin 32^\circ$ .

Решение. Используя приближённую формулу

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

получаем:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + df(x_0).$$



Определяя функцию  $f$  формулой  $f(x) = \sin x$ , видим, что нам нужно вычислить значение

$f(x)$  в точке  $x = 32^0$  при  $x_0 = 30^0$ , или в радианах  $x = \frac{\pi}{180} \cdot 32$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ . Учитывая, что

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos x, \text{ имеем:}$$

$$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x - x_0),$$

или

$$\begin{aligned} \sin 32^0 &\approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \left( \frac{32}{180} \cdot \pi - \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \approx 0,5 + \frac{1,73 \cdot 3,14}{90} \approx 0,5 + 0,03 = 0,53. \end{aligned}$$

Для сравнения табличное значение с точностью до четырёх знаков  $\sin 32^0 = 0,5299$ .  $\otimes$

**Пример 3. 2.20** \*) . Вывести приближённую формулу

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}.$$

Найти приближённо значения  $\sqrt{101}$ ,  $\sqrt{1,04}$ .

**Р е ш е н и е.** Рассмотрим функцию  $f$ , определив её формулой  $f(x) = \sqrt{x}$ . По приближённой формуле

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

имеем:

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x.$$

Полагая здесь  $x_0 = a^2$ ,  $\Delta x = h$ , получаем требуемую формулу:

$$\sqrt{a^2 + h} \approx \sqrt{a^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2}} \cdot h = a + \frac{h}{2a}.$$

Вычислим  $\sqrt{101}$  и  $\sqrt{1,04}$ :

$$\sqrt{101} = \sqrt{100+1} = \sqrt{10^2 + 1} \approx 10 + \frac{1}{20} = 10,05;$$

$$\sqrt{1,04} = \sqrt{1+0,04} \approx 1 + \frac{0,04}{2} = 1,02. \otimes$$

**Пример 3. 2.21** \*) . Найти приближённо приращение

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$$

функции, определённой формулой  $y = x^2$  при  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = x - x_0 = 0,01$ .

**Решение.** Из приближённой формулы

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

имеем

$$f(x) - f(x_0) \approx \frac{df}{dx}(x_0) \cdot (x - x_0) = df(x_0).$$

Подставляя в формулу  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = x - x_0 = 0,01$ , получаем:

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = (2 + 0,01)^2 - 2^2 \approx 2 \cdot 2 \cdot 0,01 = 0,04. \otimes$$

## Практическое занятие 4. Основные теоремы дифференциального исчисления

### Предварительные сведения

Говорят, что функция  $f : M \rightarrow f(M)$  имеет в точке  $x_0 \in M$  **локальный максимум** (**локальный минимум**), если существует такая окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$ , что

$$f(x_0) = \max_{U \cap M} f \quad \left( f(x_0) = \min_{U \cap M} f \right).$$

**Теорема Ферма.** Если функция  $f$  определена и дифференцируема на открытом множестве  $J = (a, b)$  и имеет в точке  $x_0 \in J$  локальный экстремум (всё равно, максимум или минимум),

то  $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$ .

**Теорема Ролля.** Если функция  $f$  определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке  $\bar{J} = [a, b]$  и дифференцируема на соответствующем открытом промежутке  $J = (a, b)$ , причём  $f(a) = f(b) = c$ , то

$$(\exists x_0 \in J): \frac{df}{dx}(x_0) = 0.$$

**Теорема Лагранжа.** Если функция  $f$  определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке  $\bar{J} = [a, b]$  и дифференцируема на соответствующем открытом промежутке  $J = (a, b)$ , то

$$(\exists x_0 \in (a, b)): f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Теорема Коши.** Если функции  $f$  и  $g$  непрерывны на замкнутом и ограниченном промежутке  $\bar{J} = [a, b]$  и дифференцируемы на открытом промежутке  $J = (a, b)$ , причём

$$(\forall x \in J) \frac{dg}{dx}(x) \neq 0,$$

то  $g(b) \neq g(a)$  и

$$(\exists x_0 \in J): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

**Теорема Тейлора.** Если функция  $f: J \rightarrow f(J)$  непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке  $[x_0, x] \subset J$  и  $n+1$  раз дифференцируема на соответствующем открытом промежутке  $(x_0, x)$ , а её производные до порядка  $n$  включительно имеют предельные значения  $f^{(k)}(x_0)$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ), то существует точка  $\xi \in (x_0, x)$  такая, что для функции  $f$  справедливо представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

### Примеры с решением

**Пример 3.3.1.** Выяснить, удовлетворяет ли функция, заданная формулой

$$f(x) = 3 - x^2$$

условиям теоремы Ферма на промежутке  $(1, 4)$ .

**Решение.** Данная функция на промежутке  $(1, 4)$  монотонно убывает и, следовательно, достигает своего максимума в точке 1, а минимума в точке 4. Следовательно, в промежутке  $(1, 4)$  не существует точки  $x_0$  локального экстремума, в которой  $f'(x_0) = 0$ . Поэтому данная функция условиям теоремы Ферма на данном промежутке не удовлетворяет.  $\otimes$

**Пример 3.3.2.** Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x) = 3 + 2x - x^2,$$

на промежутке  $[0, 4]$  условиям теоремы Ферма. Если функция условиям теоремы Ферма удовлетворяет, найти точку  $x_0 \in (0, 4)$ , в которой  $f'(x_0) = 0$ .

**Решение.** На промежутке  $(0, 4)$  функция дифференцируема, следовательно  $(\exists x_0 \in (0, 4)) f'(x_0) = 0$ . Находим эту точку:

$$f'(x) = 2 - 2x \Rightarrow 2 - 2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1. \otimes$$

**Пример 3.3.3.** Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x) = x^2 + 6x - 35,$$

на промежутке  $[-5, -1]$  условиям теоремы Ролля. Если функция условиям теоремы Ролля удовлетворяет, найти точку  $x_0 \in (-5, -1)$ , в которой  $f'(x_0) = 0$ .

**Решение.** Функция представляет собой многочлен, который непрерывен и дифференцируем на всей числовой оси. Кроме этого, имеем

$$f(-5) = f(-1) = -40.$$

Поэтому условия теоремы Ролля для данной функции выполнены, следовательно точка  $x_0 \in (-5, -1)$ , в которой  $f'(x_0) = 0$ , существует. Найдём её:

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 + 6 = 0 \Rightarrow x_0 = -3. \otimes$$

**Пример 3.3.4.** На дуге кривой, определяемой уравнением

$$y = x^3 - 3x$$

найти точку, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки  $A(-1; 2)$  и  $B(3; 18)$ .

**Решение.** Функция определена на промежутке  $[-1, 3]$ , непрерывна на этом промежутке и дифференцируема на открытом промежутке  $(-1, 3)$ . Условия теоремы Лагранжа выполнены. Следовательно, по теореме Лагранжа найдётся такая точка  $x_0 \in (-1, 3)$ , что

$$f'(x_0) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = 4.$$

Так как  $f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$ , то имеем  $3x^2 - 3 = 4$ . Из этого уравнения находим

$$x_{01} = +\sqrt{\frac{7}{3}}, \quad x_{02} = -\sqrt{\frac{7}{3}}. \text{ Так как из этих двух точек } x_{01} \in [-1, 3] \text{ а } x_{02} \notin [-1, 3], \text{ то}$$

$$x_0 = x_{01} = \sqrt{\frac{7}{3}}. \quad \otimes$$

**Пример 3.3.5.** В какой точке касательная к кривой, определённой уравнением

$$y = f(x) = x^2 - 8x,$$

параллельна хорде, стягивающей точки  $A(-1; 9)$ ,  $B(5; -15)$ .

**Решение.** На промежутке  $[-1, 5]$  функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа.

Поэтому имеем:

$$\frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{-24}{6} = -4 \Rightarrow f'(x_0) \equiv 2x_0 - 8 = -4 \Rightarrow x_0 = 2.$$

Подставляя это значение  $x$  в формулу для функции, получаем

$$y = f(2) = -12.$$

Таким образом, искомой является точка  $C(2; -12)$ .  $\otimes$

**Пример 3.3.6.** Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2$$

на промежутке  $[1, 2]$ . Если теорема Коши справедлива, найти точку  $x_0$ , в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

**Решение.** Обе функции непрерывны на промежутке  $[1, 2]$  и дифференцируемы на промежутке  $(a, b) = (1, 2)$ , причём  $(\forall x \in (a, b))g'(x) \neq 0$ . Поэтому условия теоремы Коши выполнены. Так как

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 2x,$$

то из условия

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{7}{3}$$

находим

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{3x_0^2}{2x_0} = \frac{3}{2}x_0 = \frac{7}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{14}{9}. \otimes$$

**Пример 3.3.7.** Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$$

на промежутке  $[1, 4]$ . Если теорема Коши справедлива, найти точку  $x_0$ , в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

**Решение.** Обе функции на данном промежутке непрерывны и дифференцируемы. Производные функций, соответственно равны

$$f'(x) = 2x - 2, \quad g'(x) = 3x^2 - 14x + 20.$$

Кроме этого, производная функции  $g$  в точках промежутка  $(1, 4)$  не обращается в нуль, так как для дискриминанта уравнения  $3x^2 - 14x + 20 = 0$  имеем  $D = b^2 - 4ac = -44 < 0$  (график функции  $g$  не имеет точек пересечения с осью  $OX$ ). Следовательно, теорема Коши для данных функций справедлива. Поэтому имеем:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \frac{11-2}{27-9} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2x_0-2}{3x_0^2-14x_0+20} = \frac{1}{2}.$$

Откуда получаем

$$x_0^2 - 6x_0 + 8 = 0 \Rightarrow x_{01} = 4, \quad x_{02} = 2$$

Так как из этих двух точек промежутку  $(1, 4)$  принадлежит только точка  $x_{02} = 2$ , то она и является искомой точкой.  $\otimes$

**Пример 3.3.8.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$ .

**Решение.** Имеем неопределённость

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \left[ \frac{0}{0} \right].$$

Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x^{-x}}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( (e^x + x^{-x}) \cdot (1+x) \right) = 2. \otimes$$

**Пример 3.3.9.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3}$ .

**Решение.** Имеем неопределённость

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right].$$

Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 1}{9x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 4}{18x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{18} = \frac{1}{3}. \otimes$$

**Пример 3.3.10.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x)$ .

**Решение.** Имеем неопределённость вида  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x) = [-\infty \cdot 0]$ . Для раскрытия не-

определённости заменим переменную:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x) = \{x = -t\} = \lim_{t \rightarrow \infty} (-t^3 \cdot e^{-t}) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3}{e^t} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right].$$

Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3}{e^t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^2}{e^t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6t}{e^t} = -6 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0. \otimes$$

**Пример 3.3.11.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ .

**Решение.** Имеем неопределённость вида  $[\infty - \infty]$ . Для раскрытия неопределённости при-

водим выражения, стоящие в скобках, к общему знаменателю:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x-1-\ln x}{x \cdot \ln x - \ln x} \right).$$

Получаем неопределённость вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ . Применяя правило Лопиталья два раза, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x-1-\ln x}{x \cdot \ln x - \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \cdot \ln x + 1 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 3.3.12.** Разложить многочлен

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$$

по степеням  $x - 1$  по формуле Тейлора.

**Решение.** В нашем случае формула Тейлора имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \\ &+ \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n, \end{aligned}$$

где  $x_0 = 1$ . Находим значение многочлена и его производных в точке  $x_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1, & P(1) &= 0; \\ P^{(1)}(x) &= 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 2, & P^{(1)}(1) &= 0; \\ P^{(2)}(x) &= 20x^3 - 24x^2 + 6x - 2, & P^{(2)}(1) &= 0; \\ P^{(3)}(x) &= 60x^2 - 48x + 6, & P^{(3)}(1) &= 18; \\ P^{(4)}(x) &= 120x - 48, & P^{(4)}(1) &= 72; \\ P^{(5)}(x) &= 120, & P^{(5)}(1) &= 120. \end{aligned}$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$P(x) = 3 \cdot (x-1)^3 + 3 \cdot (x-1)^4 + (x-1)^5. \otimes$$



**Пример 3.3.13.** Разложить многочлен

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$$

по степеням  $x + 1$  по формуле Тейлора.

**Решение.** Вычисляя значение многочлена и его производных в точке  $x_0 = -1$ , получаем:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4, & P(-1) &= -9; \\ P^{(1)}(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 16x + 4, & P^{(1)}(-1) &= 22; \\ P^{(2)}(x) &= 12x^2 + 12x - 16, & P^{(2)}(-1) &= -16; \\ P^{(3)}(x) &= 24x + 12, & P^{(3)}(-1) &= -12; \\ P^{(4)}(x) &= 24, & P^{(4)}(-1) &= 24. \end{aligned}$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$\begin{aligned} P(x) &= -9 + \frac{22}{1!} \cdot (x+1) + \frac{-16}{2!} \cdot (x+1)^2 + \frac{-12}{3!} \cdot (x+1)^3 + \\ &+ \frac{24}{4!} \cdot (x+1)^4 = -9 + 22 \cdot (x+1) - 8 \cdot (x+1)^2 - \\ &- 2 \cdot (x+1)^3 + (x+1)^4. \quad \otimes \end{aligned}$$

**Пример 3.3.14.** Представить функцию  $f(x) = e^x$  в виде разложения по формуле Маклорена.

**Решение.** Формула Маклорена имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f}{dx^k}(0) \frac{x^k}{k!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Очевидно выполнение равенств:  $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$f(0) = \frac{df}{dx}(0) = \frac{d^2 f}{d^2 x}(0) = \dots = \frac{d^n f}{d^n x}(0) = e^0 = 1.$$

Кроме этого, очевидно, что  $\frac{d^{n+1} f}{d^{n+1} x}(x) = e^x$ .

Тогда формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа принимает вид:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В этой формуле можно положить  $\xi = \theta \cdot x$ , где  $0 < \theta < 1$ .  $\otimes$

Приведём вид формулы Тейлора с **остаточным членом в форме Пеано**:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \cdot \frac{x-x_0}{1!} + \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \\ + \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Здесь многочлен Тейлора

$$T_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \frac{(x-x_0)^1}{1!} + \\ + \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!},$$

а остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n(x, n) = f(x) - T_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^k}{k!}.$$

При условии  $\Delta x \rightarrow 0$  выполняется

$$R_n(x, n) = f(x) - T_n(x_0, x) = o((x-x_0)^n) = o((\Delta x)^n).$$

Теперь формулу Тейлора можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + o((\Delta x)^n).$$

Последняя форма записи называется **формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано**.

**Пример 3.3.15.** Разложить функцию  $f(x) = \sin x$  по формуле Маклорена.

**Решение.** Рассмотрим производные функции  $f(x) = \sin x$  в точке  $x$ :

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin x = \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

.....;

$$\frac{d^k}{dx^k} \sin x = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Кроме этого, имеем

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \sin(\theta x) = \sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \cos \theta x.$$

Действительно, видим, что

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + \theta x\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \theta x\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta x\right) = (-1)^n \cos \theta x.$$

Здесь мы положили  $\xi = \theta x$ , где  $0 < \theta < 1$ ,  $x \in (a, b)$ .

Формула Маклорена принимает вид

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \alpha^{(2n+1)}(x) = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x. \end{aligned}$$

В виде разложения по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано это разложение записывается так:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}). \otimes$$

Аналогично можно получить и разложение по формуле Маклорена функции  $f(x) = \cos x$ :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

**Пример 3.3.16.** Найти предел:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ .

**Решение.** Записываем для  $\sin x$  разложение по формуле Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

Подставляя это разложение, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} - x + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3!} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6}. \otimes$$

**Пример 3.3.17.** Найти предел:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \cdot \sin x}$ .

**Решение.** Используем разложение для  $e^x$ ,  $\sin x$  и  $\cos x$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \cdot \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^3 \cdot (x + \alpha_{(2)}(x))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x^4 + o(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^5)}{x^4}} = \frac{1}{12}. \otimes \end{aligned}$$

## Практическое занятие 5. Исследование функций одного переменного

### Предварительные сведения

Пусть функция  $f: J \rightarrow f(J)$  дифференцируема на множестве  $J = (a, b)$  и монотонно возрастает (монотонно убывает) на нём. Тогда на этом множестве её производная неотрицательна (неположительна), то есть

$$(\forall x \in (a, b)) f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

Пусть функция  $f: J \rightarrow f(J)$  дифференцируема на  $J = (a, b)$  и существует точка  $x_0 \in (a, b)$  такая, что  $f'(x_0) = 0$ . Тогда если при переходе через точку  $x_0$  в направлении

роста аргумента  $x$  производная  $f'$  функции  $f$  меняет знак с «плюса» на «минус» (с «минуса» на «плюс»), то в точке  $x_0$  функция имеет локальный максимум (локальный минимум). Если же знак производной  $f'$  при переходе через точку  $x_0$  не меняется, то функция в точке  $x_0$  экстремума не имеет.

График  $G_f$  функции  $f : J \rightarrow f(J)$ , дифференцируемой на  $J = (a, b)$ , называется **выпуклым в окрестности  $U(x_0)$  точки  $x_0 \in J$** , если точки  $(x; f(x))$ , где  $x \in U(x_0)$ , графика лежат ниже касательной к графику в точке  $x_0$ . Если же все точки  $(x; f(x))$ , где  $x \in U(x_0)$ , графика  $G_f$  функции лежат выше касательной к нему в точке  $x_0$ , то график называется **вогнутым в окрестности  $U(x_0)$  точки  $x_0$** . •

Пусть функция  $f : J \rightarrow f(J)$  определена и дифференцируема на множестве  $J = (a, b)$  и  $x_0 \in (a, b)$ . Тогда если при переходе через точку  $x_0$  (в направлении роста аргумента  $x$ ) график функции  $G_f$  меняет выпуклость на вогнутость (или наоборот), то точка  $(x_0; f(x_0))$  называется **точкой перегиба** графика функции.

Пусть  $f : J \rightarrow f(J)$ , где  $J = (a, b)$ . Тогда, если вторая производная функция  $f''$  для функции  $f$  во всех точках множества  $J$  положительна (отрицательна), то график функции  $G_f$  является вогнутым (выпуклым) на этом множестве.

Пусть дана функция  $f : M \rightarrow f(M)$  и  $G_f$  – её график. Прямая линия, с уравнением  $x = a$ , где  $a \in M$ , называется **вертикальной асимптотой графика функции  $f$** , если хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

не существует.

Прямая линия с уравнением

$$y = kx + b$$

называется **наклонной асимптотой графика  $G_f$  функции  $f : M \rightarrow f(M)$**  (правой при  $x \rightarrow +\infty$  и **левой** при  $x \rightarrow -\infty$ ), если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Справедливо представление

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x),$$

где  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$ . Нетрудно видеть также, что справедливы формулы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx].$$

### Примеры с решением

**Пример 3.4.1.** Найти промежутки монотонности функции, определённой формулой

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2.$$

**Решение.** Множеством определения функции является вся числовая ось. Находим первую производную функции

$$f' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x+1)^2 - 12.$$

Поэтому имеем:

$$f' > 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+1)^2 - 12 > 0;$$

$$f' < 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+1)^2 - 12 < 0.$$

Корни уравнения

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

есть

$$x_1 = -3, x_2 = 1.$$

График функции – парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = -12$ . Следовательно, неравенство  $f'(x) > 0$  выполняется при  $x < -3$  и  $x > 1$ , а неравенство  $f'(x) < 0$  при  $-3 < x < 1$ .

На множестве  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$  функция строго монотонно возрастает, а на множестве  $(-3, 1)$  строго монотонно убывает.  $\otimes$

**Пример 3.4.2.** Предприятие производит  $x$  единиц продукции в месяц. Зависимость финансовых накоплений предприятия от объёма выпуска выражается формулой

$$\Phi = -0,01 \cdot x^3 + 300 \cdot x - 500.$$

Определить количество единиц продукции, начиная с которого финансовые накопления предприятия начинают убывать.

**Решение.** Производная от  $\Phi$  равна:

$$\Phi' = -0,03 \cdot x^2 + 300.$$

Финансовые накопления убывают, если

$$\Phi' = -0,03 \cdot x^2 + 300 < 0,$$

откуда имеем  $x^2 - 10000 > 0$ . Из последнего неравенства получаем:  $x_1 > 100$ ,  $x_2 < -100$ . Имеет экономический смысл только неравенство  $x_1 > 100$ . Следовательно, при  $x > 100$  финансовые накопления предприятия начинают убывать, то есть повышать выпуск продукции свыше 100 единиц становится экономически не выгодно.  $\otimes$

**Пример 3.4.3.** Исследовать на наличие локальных экстремумов функцию, заданную формулой  $f(x) = x^3 - 5x + 2$ .

Р е ш е н и е. 1) Производная функция для функции  $f$  есть

$$f'(x) = 3x^2 - 5.$$

2) Находим критические точки функции, решая уравнение

$$3x^2 - 5 = 0.$$

Корни уравнения (критические точки) есть  $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$ ,  $x_2 = +\sqrt{\frac{5}{3}}$ .

3) Выясняем вопрос о наличии локальных экстремумов функции согласно теореме, для чего определяем знаки производной  $f'(x)$  справа и слева от каждой критической точки, результаты заносим в таблицу:

$x$	$x < -\sqrt{\frac{5}{3}}$	$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$	$-\sqrt{\frac{5}{3}} < x < \sqrt{\frac{5}{3}}$	$x_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$	$x > \sqrt{\frac{5}{3}}$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f$		Максимум $f(x_1) = 6,3$		Минимум $f(x_2) = -2,3$	

4. Вычисляем значения функции в точках  $x_1$ ,  $x_2$  и результаты вычислений тоже заносим в таблицу.

Получаем следующий результат: функция имеет в точке

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

локальный максимум  $f(x_1) = 6,3$ , а в точке

$$x_2 = +\sqrt{\frac{5}{3}}$$

– локальный минимуму  $f(x_2) = -2,3$ .  $\otimes$

**Пример 3.4.4.** Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + 3.$$

**Решение.** Множеством определения функции является вся числовая ось  $R$ .

1) Находим производную функции:

$$f'(x) = x^2 + 5x + 4.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение

$$x^2 + 5x + 4 = 0.$$

В результате решения имеем корни:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -4$ . Критические точки разбивают  $R^1$  на промежутки

$$-\infty < x < -4, \quad -4 < x < -1, \quad -1 < x < \infty.$$

3) Исследуем поведение первой производной функции в полученных промежутках:

в промежутке  $(-\infty, -4)$  имеем  $y' > 0$ ;

в промежутке  $(-4, -1)$  имеем  $y' < 0$ ;

в промежутке  $(-1, \infty)$  имеем  $y' > 0$ .

Следовательно, в точке  $-4$  имеем **максимум**; в точке  $-1$  имеем **минимум**.

4) Вычисляем экстремальные значения функции:

$$\max f(x) = f(-4) \approx 5,67; \quad \min f(x) = f(-1) = 1,17. \quad \otimes$$

**Пример 3.4.5.** Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 10.$$

**Решение.** 1) Находим производную функции:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение



$$15x^4 - 15x^2 = 0, x^4 - x^2 = 0, x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0.$$

Имеем три корня:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -1$ .

3) Находим вторую производную функцию:

$$f''(x) = 60 \cdot x^3 - 30 \cdot x.$$

4) Находим вторую производную в критических точках:

$$f''(0) = 0; f''(1) = 30; f''(-1) = -30.$$

В точке  $x_2 = 1$  функция имеет **минимум**, а в точке  $x_3 = -1$  - **максимум**. В точке  $x_1 = 0$  функция экстремума не имеет, так как первая производная при переходе через эту точку не меняет своего знака.  $\otimes$

Промежутки выпуклости и вогнутости и асимптоты графика функции

**Пример 3.4.6.** Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = (x^2 + 7x) \cdot \sqrt[3]{x} - 5x - 8.$$

Р е ш е н и е. Множество определения функции  $M = R$ . Преобразованная формула

$$f(x) = x^{\frac{7}{3}} + 7 \cdot x^{\frac{4}{3}} - 5x - 8.$$

1) Находим нули и точки разрыва второй производной функции, для чего находим  $f''(x)$ :

$$f'(x) = \frac{7}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}} + \frac{28}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} - 5;$$

$$f''(x) = \frac{28}{9} \cdot x^{\frac{1}{3}} + \frac{28}{9} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{28}{9} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Очевидно, что точка  $x = -1$  является нулём второй производной  $f''(x)$ , а точка  $x = 0$  является точкой разрыва второго рода второй производной  $f''(x)$ . Эти точки делят множество определения функции  $f(x)$  на промежутки

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, +\infty).$$

2) Определяем знак второй производной в полученных промежутках:

$$(\forall x \in (-\infty, -1)) f''(x) < 0;$$

$$(\forall x \in (-1, 0)) f''(x) > 0;$$

$$(\forall x \in (0, +\infty)) f''(x) > 0.$$

Следовательно: на  $(-\infty, -1)$  график функции *выпуклый*; на  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$  график функции *вогнутый*.

3) Так как функция в точке  $x_0 = -1$  определена, а  $f''(-1) = 0$ , то в точке  $x_0 = -1$  график функции испытывает перегиб, а точка

$$(x_0; f(x_0)) = (-1; 3)$$

является точкой перегиба графика функции.  $\otimes$

**Пример 3.4.7.** Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 7x}{x - 3}.$$

Решение. 1) Точка  $x = 3$  является точкой разрыва второго рода, следовательно, график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением  $x = 3$ .

2) По определению асимптоты, функция может быть представлена в виде

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x),$$

где  $\alpha(x)$  – бесконечно малая функция при неограниченном удалении точки графика от начала системы координат более высокого порядка, чем  $x$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = 0.$$

Чтобы записать функцию в указанном виде, разделим числитель на знаменатель с остатком:

$$\frac{-x^2 + 7x}{x - 3} = -x + 4 + \frac{12}{x - 3}.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12}{x - 3} = 0,$$

график функции имеет наклонную асимптоту с уравнением  $y = -x + 4$ .  $\otimes$

**Пример 3.4.8.** Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - 2x.$$

**Решение.** 1) Так как функция определена на всей числовой оси, вертикальных асимптот нет.

2) Из представления функции в виде

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x)$$

Следует, что для нахождения наклонных асимптот нужно найти правый и левый пределы, которые равны соответственно

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx],$$

$$k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx].$$

Правый предел:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - 2 \right) = -1;$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - 2x + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0. \end{aligned}$$

Правая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$$y = -x.$$

Левый предел:

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - 2x}{x} = \{x = -z\} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+z^2} + 2z}{-z} = \\ &= - \lim_{z \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{\frac{1}{z^2} + 1} + 2 \right) = -3; \end{aligned}$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2} - 2x + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0.$$

Левая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$$y = -3x. \otimes$$

**Пример 3.4.9.** Исследовать функцию, заданную формулой  $y(x) = x \cdot e^{-x}$ .

**Решение.** 1) Множеством определения функции служит всё множество действительных чисел  $\mathbb{R}$ .

2) Нуль функции – точка  $x = 0$ , причём  $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0$ . Следовательно, функция в точке

$x = 0$  асимптот не имеет.

3) Находим критические точки функции:

$$y'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (1 - x) \Rightarrow x = 1.$$

4) Имеем два промежутка  $(-\infty, 1)$  и  $(1, \infty)$ . На этих промежутках

$$(\forall x \in (-\infty, 1)) y'(x) > 0,$$

$$(\forall x \in (1, \infty)) y'(x) < 0,$$

соответственно. Следовательно, при  $x \in (-\infty, 1)$  функция строго монотонно возрастает, а при  $x \in (1, \infty)$  функция строго убывает.

5) Вторая производная функции равна

$$y''(x) = -e^{-x} \cdot (1 - x) - e^{-x} = e^{-x} \cdot (x - 2).$$

Так как в точке  $x = 1$  вторая производная равна

$$y''(1) = \frac{1-2}{e} = -\frac{1}{e} < 0,$$

то функция в этой точке имеет локальный максимум, равный  $\frac{1}{e}$ .

6) Вторая производная функции в точке  $x = 2$  обращается в нуль, а при переходе через эту точку меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, график функции при  $x = 2$  имеет перегиб,

причём при  $x < 2$  график функции выпуклый, а при  $x > 2$  – вогнутый. Значение функции в точке перегиба равно

$$y(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2}. \otimes$$

## Практическое занятие 6. Интегрируемость функции одного переменного

### Предварительные сведения

Определённым интегралом от определённой на промежутке  $[a, b]$  функции  $f$  называется предел последовательности интегральных сумм Римана

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{def}{=} \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

если он существует. Можно показать, что этот предел существует для непрерывной на  $[a, b]$  функции.

Свойства определённого интеграла:

- 1)  $\int_a^a f(x) dx = 0$ ;
- 2)  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ ;
- 3)  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ ;
- 4)  $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$ ;
- 5)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  при  $a < c < b$ ;
- 6)  $\int_a^b f(x) dx > 0$ , если  $(\forall x \in [a, b]) f(x) > 0$ .

Пусть  $f$  и  $F$  – две функции, определённые на открытом промежутке  $M = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$ . Функция  $F$  называется **первообразной (примитивной) функцией** для функции  $f$  на промежутке  $M$ , если она дифференцируема на этом промежутке и выполняется следующее условие:

$$(\forall x \in (a, b)) \frac{d}{dx} F(x) = f(x).$$

**Неопределённым интегралом** от функции  $f$  на промежутке  $(a, b)$  действительной числовой оси называется бесконечное множество  $H(x)$  всех её первообразных. Неопределённый интеграл обозначается так:

$$H(x) = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Если  $F$  – первообразная функция для функции  $f$  на промежутке  $\bar{J} = [a, b]$ , то определённый интеграл от функции  $f$  по заданному промежутку равен разности значений первообразной на концах промежутка (формула Ньютона-Лейбница):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

### Примеры с решением

**Пример 3.5.1.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \sqrt[3]{x^2} dx.$$

**Решение.** Непосредственно имеем:

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + C. \otimes$$

**Пример 3.5.2.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int (6x^2 - 3\sqrt{x} + 5) dx.$$

**Решение.** Используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных, получаем:

$$\begin{aligned} \int (6x^2 - 3\sqrt{x} + 5) dx &= 6 \int x^2 dx - 3 \int x^{1/2} dx + 5 \int dx = \\ &= 2x^3 - 2x^{3/2} + 5x + C = 2x^3 - 2\sqrt{x^3} + 5x + C, \end{aligned}$$

где все постоянные интегрирования объединены в одну постоянную  $C$ .  $\otimes$

**Пример 3.5.3.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \left( 5x^2 + 11 - 3\sin x + \frac{2}{x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$$

**Решение.** Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, имеем:

$$\begin{aligned} \int \left( 5x^2 + 11 - 3\sin x + \frac{2}{x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx &= \\ &= 5 \int x^2 dx + 11 \int dx - 3 \int \sin x dx + 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{3}x^3 + 11x + 3\cos x + 2\ln|x| + \operatorname{ctgx} + C. \otimes$$

По определению логарифмической производной имеем:

$$y(x) = \ln(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\ln(f(x))) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df}{dx}(x) \equiv \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Тогда по определению неопределённого интеграла имеем:

$$\int (\ln f(x))' dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln(f(x)) + C.$$

Этот метод нахождения неопределённого интеграла называется *методом подведения под дифференциал*.

**Пример 3.5.4.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x+1}.$$

**Решение.** Замечая, что  $dx = d(x+1)$  и, используя табличную первообразную для

функции  $\frac{1}{x}$ , в соответствии с формулой подведения под дифференциал получаем:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + C. \otimes$$

**Пример 3.5.5.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{ax+b}.$$

**Решение.** Замечая, что  $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$ , имеем:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C. \otimes$$

**Пример 3.5.6.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{x dx}{1+x^2}.$$

Решение. Так как  $x dx = \frac{1}{2} d(1+x^2)$ , получаем:

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \otimes$$

**Пример 3.5.7.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{3x+2}{x+5} dx.$$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{3x+2}{x+5} \equiv \frac{3x+15-13}{x+5} = \frac{3(x+5)}{x+5} - \frac{13}{x+5} = 3 - \frac{13}{x+5}.$$

Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x+5} dx &= \int \left( 3 - \frac{13}{x+5} \right) dx = 3 \int dx - 13 \int \frac{1}{x+5} dx = \\ &= 3x - 13 \ln|x+5| + C. \otimes \end{aligned}$$

Пусть функция  $x = \varphi(t)$  определена на промежутке  $\bar{J} \in [\alpha, \beta]$ , имеет непрерывную производную на  $(\alpha, \beta)$  и принимает значения в промежутке  $\bar{M} \in [a, b]$ , а функция  $f: \bar{M} \rightarrow f(\bar{M})$  – непрерывная функция, определённая при всех  $x \in \bar{M}$ . Тогда в неопределённом интеграле

$$I = \int f(x) dx + C$$

можно заменить переменную  $x$  функцией  $\varphi(t)$  от переменной  $t$ , причём  $dx$  заменяется на  $\frac{d\varphi}{dt}(t) dt$ , то есть, справедлива формула замены переменной

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \frac{d\varphi}{dt}(t) dt + C.$$

Если функции  $u$  и  $v$  имеют непрерывные производные  $\frac{du}{dx}$  и  $\frac{dv}{dx}$ , то

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$$

(формула интегрирования по частям).

**Пример 3.5.8.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \sqrt{x+3} dx.$$



Р е ш е н и е. Заменяя переменную по формуле  $t = x + 3 \Rightarrow dx = dt$ , получаем:

$$\int \sqrt{x+3} dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(x+3)^3} + C. \otimes$$

**Пример 3.5.9.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^4} dx.$$

Р е ш е н и е. Заменяя переменную

$$t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2 + 1} dt,$$

получаем:

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^4} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{9t^3} + C = -\frac{1}{9(x^3 + 3x + 1)^3} + C. \otimes$$

**Пример 3.5.10.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \cos x dx.$$

Р е ш е н и е. Замечая, что  $\cos x dx = d(\sin x)$  и используя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos x dx \equiv d(\sin x), \quad v = \sin x \end{array} \right\} = \\ &= x \cdot \sin x - \int \sin x dx + C = x \cdot \sin x + \cos x + C. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 3.5.11.** Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \ln x dx.$$

Р е ш е н и е. Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx + C = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 3.5.12.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

по формуле Ньютона-Лейбница, дать геометрическую интерпретацию.

**Решение.** Проводя непосредственное интегрирование и применяя формулу Ньютона-Лей-

бница, получаем:  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ . Полученное число  $\frac{1}{3}$  имеет смысл площади криволиней-

ного треугольника с вершинами в точках

$$O(0, 0), A(1, 1), B(1, 0). \otimes$$

**Пример 3.5.13.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

**Решение.** Используя таблицу первообразных и формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}. \otimes$$

**Пример 3.5.14.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_1^2 2^{3x-4} dx.$$

**Решение.** Используем методом “подведения под дифференциал”:

$$\begin{aligned} \int_1^2 2^{3x-4} dx &= \left\{ dx = \frac{1}{3} d(3x-4) \right\} = \frac{1}{3} \int_1^2 2^{3x-4} d(3x-4) = \\ &= \left\{ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \right\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{3x-4}}{\ln 2} \Big|_1^2 = \frac{1}{3 \ln 2} \left( 4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6 \ln 2}. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 3.5.15.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x \cdot (2 - x^2)^5 dx.$$

**Решение.** Для решения воспользуемся методом замены переменной. Введём новую переменную  $t = 2 - x^2$ . Дифференциал новой переменной равен

$$dt = d(2 - x^2) = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dt.$$

Пределы изменения новой переменной определяются так:

$$x = 0 \Rightarrow t = 2; \quad x = 1 \Rightarrow t = 1.$$

Учитывая эти формулы, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot (2 - x^2)^5 dx &= \left\{ \begin{array}{l} dt = d(2 - x^2) = -2x dx; \quad x dx = -\frac{1}{2} dt; \\ x = 0 \Rightarrow t = 2; \quad x = 1 \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \int_2^1 t^5 dt = \frac{1}{2} \int_1^2 t^5 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot t^6 \Big|_1^2 = \frac{1}{12} \cdot (64 - 1) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}. \quad \otimes \end{aligned}$$

**Пример 3.5.16.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

**Решение.** Используя замену переменной интегрирования  $t = \ln x$ , имеем:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x, \\ dt = \frac{dx}{x}, \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow t = 0, \\ x = e \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad \otimes$$

**Пример 3.5.17.** Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx.$$

**Решение.** Данный интеграл вычисляется методом «интегрирования по частям»:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^{-x} dx, \quad v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}. \end{array} \right\} = \\ &= x \cdot e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} d(-x) = -x \cdot e^{-x} \Big|_0^1 - e^{-x} \Big|_0^1 = \end{aligned}$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2 \cdot e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} = e - \frac{2}{e}. \otimes$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Выяснить тип монотонности последовательностей:

$$1) \left( \frac{n}{2n+1} \right); 2) \left( \frac{n}{5^n} \right); 3) \left( \frac{n}{4n-3} \right); 4) \left( \frac{n}{n+1} \right); 5) \left( 1 + \frac{1}{2^n} \right).$$

2. Используя определение, показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , если:

$$1) x_n = \frac{3n+1}{5n+2}, x_0 = \frac{3}{5}; 2) x_n = \frac{2n-2}{3n-1}, x_0 = \frac{2}{3};$$

$$3) x_n = \frac{4n-2}{2n+3}, x_0 = 2; 4) x_n = \frac{4n^2+1}{n^2+2}, x_0 = 4;$$

$$5) x_n = \frac{3-n^3}{1+n^3}, x_0 = -1; 6) x_n = \frac{6n-2}{2n+1}, x_0 = 3;$$

$$7) x_n = \frac{3+8n^2}{1+4n^2}, x_0 = 2; 8) x_n = \frac{5n+2}{3n+1}, x_0 = \frac{5}{3}.$$

3. Вычислить предел последовательности:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n}; 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+5};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5-n)^2 + (5+n)^2}{(5-n)^2 - (5+n)^2}; 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^2 - (2+n)^4};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3+n)^2 - (2+n)^2}{(2+n)^2 - (1-n)^2}; 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^3}{(n+2)^2 - (n+1)^3};$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n+5)^3}{(3-n)^3}; 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \frac{n}{2^n}}{n^2 - 1};$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3}{n^2 + 1} - \frac{3n^2}{3n - 1} \right); 10) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{a^2 n^2 + bn} - an \right);$$

$$11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt{3n^2} + \sqrt[4]{4n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}}; 12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{2n^2 + 3}}{\sqrt[3]{n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^5 + 2}};$$

$$13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - \sqrt{n^3 + 2}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}; 14) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{8n^3 + 3}}{\sqrt[4]{n+5} + n};$$

$$15) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5^{n+1}}{2^n + 5^n}; 16) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{-n} \sin x);$$

$$17) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n-1} \right)^n; 18) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right)^{n^2};$$

$$19) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + n + 3}{n^2 + n - 1} \right)^{-n^2}; 20) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + n + 5}{2n^2 + n + 1} \right)^{3n^2};$$

$$21) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}; 22) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{3n} \right)^n.$$

23. Найти множество определения  $M$  и множество значений  $f(M)$  функции  $f(x) = \lg x$ .

24. Найти множество определения  $M$  следующих функций:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; 2) f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x + 4}; 3) f(x) = (x - 2) \cdot \sqrt{\frac{x+1}{1-x}};$$

$$4) f(x) = \lg(x - 2) - \sqrt{\frac{x+2}{1-x}}; 5) f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^3 - 3x^2 + x}.$$

25. Выяснить, какие из данных функций являются чётными, а какие нечётными:

$$1) f(x) = 1 - x; 2) f(x) = x^3 + x; 3) f(x) = \sqrt{2x - x^2};$$

$$4) f(x) = x^5 - x^3 + x; 5) f(x) = x^2 + x - 1.$$

26. Выяснить, является ли данная функция периодической и если функция является периодической, то найти её период:

1)  $f(x) = 5$ ; 2)  $f(x) = \sin(5x + 3)$ ; 3)  $f(x) = \cos x^2$ ;

4)  $f(x) = 2[x] + 1$ , где  $[x]$  – целая часть  $x$ .

27. Используя определение непрерывности функции по Гейне, доказать, что функция  $f(x) = x^2 + 3x + 3$  непрерывна в любой точке действительной числовой оси  $(-\infty, +\infty)$ .

28. Используя определение непрерывности по Коши показать, что следующие функции непрерывны в заданных точках  $x_0$ :

1)  $f(x) = 3x - 5$ ,  $x_0 = 2$ ; 2)  $f(x) = 4x^2 - 1$ ,  $x_0 = 2$ ;

3)  $f(x) = -3x^2 + 8$ ,  $x_0 = 4$ ; 4)  $f(x) = 4x^2 + 1$ ,  $x_0 = 8$ ;

5)  $f(x) = \sin x - \cos 2x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

29. Решить неравенство  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 1} < 0$ .

30. Найти предел данной функции при  $x \rightarrow x_0$ :

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^3 - 3x^2 + x}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}{x^2 - x - 2}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x - 2}$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^4 - x^3 + x - 1}$ ;

5)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x^3 - a^3}$ ; 7)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos 2x}$ ;

8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 3x}$ ; 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 5x - \cos 3x}$ ; 10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + x3^x}{1 + x2^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ ;

12)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln \cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ .

31. Используя свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, найти следующие пределы:

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+5}{x-5}; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \cos \frac{1}{x} \right); \\
& 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)^2}; 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x^2 - 4}; \\
& 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{4x^5 + x + 1}; 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}; \\
& 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right); 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}; 10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{5}{x} \right)^{3x}.
\end{aligned}$$

32. Используя таблицу производных, найти первую производную функцию для заданной функции и, если требуется, её значение в заданных точках:

$$\begin{aligned}
& 1) f(x) = \ln \frac{5 - 4x^2}{3 + 7x^2}, x_0 = 3; 2) f(x) = \ln \frac{(1 + x^2) \cdot (1 - 2x)^3}{(x^2 - 5)^2}; \\
& 3) f(x) = x \cdot \ln x, x = 1, x = 1x = e, x = \frac{1}{e}, x = \frac{1}{e^2}; \\
& 4) f(x) = \sqrt[8]{x^3} - 4x^6 + 5 \ln x - 7 \cos x + \operatorname{tg}(3x^2 + 2) + \operatorname{ctg} 6x; \\
& 5) f(x) = \ln^2(1 - \cos x); 6) f(x) = \frac{3^x (\sin x + \cos x \cdot \ln 3)}{1 + \ln^2 3}; \\
& 7) f(x) = \ln \sin 3 - \frac{\cos^2 x}{\sin x}; 8) f(x) = \ln(1 + \sqrt{\operatorname{th} x}).
\end{aligned}$$

33. Найти первую производную и дифференциал функции

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sin x} + (1 + x^2) \cdot \operatorname{ctg} x.$$

34. Найти  $f'(0)$  и  $df(0)$ , если  $f(x) = \frac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$ .

35. Найти  $f'(x)$  и  $df(x)$ , если  $f(x) = \ln(5e^x + 7)$ .

36. Пусть функции  $f$  и  $g$ , определённые на одном и том же множестве  $M \subset R$ ,  $n$ -раз дифференцируемы на этом множестве. Показать, что сумма и произведение этих функций также  $n$ -раз дифференцируемы на  $M$ .

37. Найти производные указанных порядков для данных функций:

1)  $f(x) = \ln(2x - 3)$ ,  $f''(x) = ?$ ;

2)  $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$ ,  $f'''(x) = ?$ ;

3)  $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}$ ,  $f'''(x) = ?$ ;

4)  $f(x) = \ln(3x+1)$ ,  $f'''(x) = ?$ ;

5)  $f(x) = 3^{2x+1}$ ,  $f'''(x) = ?$ ;

6)  $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ ,  $f^{(3)} = ?$ .

38. Найти производные и дифференциалы указанных порядков:

1)  $f(x) = \cos^2 x$ ,  $f''(x) = ?$ ,  $d^2 f(x) = ?$ ;

2)  $f(x) = e^x \cos x$ ,  $f^{(3)}(x) = ?$ ,  $d^{(3)} f(x) = ?$ .

30. Проверить справедливость теоремы Ферма для функции  $f(x) = 3x^2 - 1$  на промежутке  $[1, 2]$ .

40. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции  $f(x) = x$  на промежутке  $[0, 1]$ .

41. Проверить справедливость первой теоремы о среднем для функции  $f(x) = 2x - x^2$  на про-

межутке  $[1, 3]$ . Найти точку  $\xi$ , удовлетворяющую условию  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ .

42. Раскрыть неопределённости по правилам Лопиталья:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right]$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = [\infty - \infty]$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right]$ ;



$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3} = \left[ \frac{0}{0} \right]; 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right].$$

43. Найти неопределённые интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных:

$$1) \int (x^6 - 6x^5 + 40x^3 - 24x^2) dx; 2) \int \sqrt[3]{x^2} (8\sqrt[3]{x} - 1) dx;$$

$$3) \int \frac{(4 - 3\sqrt{x})^2}{x^2} dx; 4) \int \frac{x+2}{x+3} dx; 5) \int \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right) dx;$$

$$6) \int (2x^2 + 1)^3 dx; 7) \int (1 + \sqrt{x})^4 dx; 8) \int \frac{(x+1) \cdot (x^2 - 3)}{3x^2} dx;$$

$$9) \int \frac{(x - \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx; 10) \int (5^x - 1)(5^{-x} + 1) dx;$$

$$11) \int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx; 12) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx; 13) \int \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\cos 4x} dx;$$

$$14) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; 15) \int \frac{dx}{2 + 3x^2} dx.$$

44. Найти неопределённые интегралы методом подведения под дифференциал:

$$1) \int \frac{dx}{ax + b}, \text{ где } a, b \text{ – постоянные};$$

$$2) I = \int \frac{xdx}{1 + x^2};$$

$$3) \int \sqrt{x + 3} dx \text{ (Указание: использовать подстановку } t = x + 3);$$

$$4) I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \text{ (Указание: использовать подстановку } t = e^x);$$

$$5) \int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^4} dx; 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$$

$$7) \int \frac{3\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x+x}} dx; 8) \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$9) \int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^3} dx; 10) \int \frac{\sin 2x - \cos x}{(\cos^2 x + \sin x)^2} dx.$$

45. Найти неопределённые интегралы методом подстановки:

$$1) \int x \cdot e^{x^2} dx \text{ (Указание: использовать подстановку } t = x^2);$$

$$2) \int \frac{\ln^3 x}{x} dx; 3) \int (12x - 5)^7 dx; 4) \int e^{4-3x} dx;$$

$$5) \int 6^{5x+2} dx; 6) \int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}} dx; 7) \int \frac{e^x dx}{2e^x+7}; 8) \int \frac{dx}{x \ln x};$$

$$9) \int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x} dx; 10) \int \frac{e^{5x}}{4-e^{10x}} dx; 11) \int \sin x \cos^2 x dx;$$

$$12) \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx; 13) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x \sqrt{\cos x}} dx;$$

$$14) \int \frac{\sqrt{5 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx; 15) \int e^{4 \cos x - 1} \sin x dx.$$

46. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям:

$$1) \int x^2 \cdot \cos x dx; 2) \int x^2 \cdot \sin x dx; 3) \int x \cdot e^x dx;$$

$$4) \int (x^2 + 2x + 3) \cdot \cos x dx; 5) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx; 6) \int e^{2x} \cos x dx;$$

$$7) \int x^2 e^x dx; 8) \int x \ln x dx.$$

47. Найти определённый интеграл:

$$1) \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx; 2) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx; 3) \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3} dx; 5) \int_1^e \frac{1 + \ln^3 x}{x} dx; 6) \int_{-2}^5 \sqrt[3]{5x+2} dx;$$

$$\begin{aligned}
& 7) \int_{0,5}^{0,5} \frac{3^x}{1+9^x} dx; \quad 8) \int_0^{0,5} e^{\sin \pi x} \cos \pi x dx; \quad 9) \int_0^1 x e^{-x} dx; \\
& 10) \int_0^\pi e^x \cos^2 x dx; \quad 11) \int_0^\pi (\pi - x) \sin x dx; \quad 12) \int_{-1}^0 (2x + 3) e^{-x} dx; \\
& 13) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}; \quad 14) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{3 + \cos x} dx; \quad 15) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx; \quad 16) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.
\end{aligned}$$

## ЧАСТЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ

### НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

#### РЯДЫ

#### Практическое занятие 1. Дифференцируемость функций

##### нескольких переменных

##### Предварительные сведения

Функция  $f : R^n \rightarrow R^1$  называется дифференцируемой в области  $\Omega \subset R^n$ , если выполняется следующее условие:

$$\left( \forall x_0 \in \Omega \right) \left( \exists U \left( \vec{x}_0 \right) \subset \Omega \right) : \left( \forall x \in U \left( \vec{x}_0 \right) \right) \\
f \left( \vec{x} \right) = f \left( \vec{x}_0 \right) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k} \left( \vec{x}_0 \right) \cdot \Delta x^k + o \left( \left\| \Delta \vec{x} \right\| \right).$$

Здесь

$$\Delta \vec{x} = \sum_{k=1}^m (x^k - x_0^k) \vec{e}_k \equiv \sum_{k=1}^m \Delta x^k \vec{e}_k,$$

$$\lim_{\left\| \Delta \vec{x} \right\| \rightarrow 0} \frac{o \left( \left\| \Delta \vec{x} \right\| \right)}{\left\| \Delta \vec{x} \right\|} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x_0 \end{matrix} \right) \equiv \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1} + \Delta x^k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_0^k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^m)}{\Delta x^k}$$

частная производная по переменной  $x^k$  первого порядка.

Частные производные функции нескольких переменных высших порядков находятся посредством рекуррентной формулы:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2} \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{\partial f}{\partial x_p} \right); \quad \frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k} \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \right).$$

Вторая формула даёт выражение для смешанной частной производной второго порядка.

Справедлива следующая теорема.

Пусть  $f: M \rightarrow f(M)$  ( $M \subset R^n$  и  $f(M) \subset R^1$ ) – некоторая дифференцируемая в окрестности  $U \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x_0 \end{matrix} \right) \subset M$  точки  $x_0 \in M$  функция. Тогда, если в окрестности  $U \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x_0 \end{matrix} \right)$  существуют (смешанные) частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k} \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \right),$$

непрерывные в точке  $x_0$ , то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k} \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x_0 \end{matrix} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x_0 \end{matrix} \right).$$

Теорема обобщается и на смешанные производные любого порядка, вычисленные одинаковое число раз по одним и тем же переменным, даже в разном порядке.

Высшие дифференциалы определяются аналогично высшим производным посредством рекуррентной формулы следующего вида

$$d^n f \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \right) \stackrel{\text{def}}{=} d \left( d^{n-1} f \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \right) \right).$$

Так, например, второй дифференциал функции  $f: M \rightarrow f(M)$  в точке  $x \in M \subset R^n$  вычисляется по формуле:

$$d^2 f \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \right) = d \left( df \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \right) \right) = d \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \right) dx_k \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \left( \begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \right) dx_k \right) dx_j.$$

### Примеры с решением

**Пример 4.1.1.** Используя определение, найти первые частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$z(x, y) = x^2 y + 4x - 2y + 5,$$

в точке  $M_0(5; 1)$ .

**Решение.** Для частной производной по переменной  $x$  имеем по определению:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Фиксируя значение  $y = y_0$ , находим сужение функции  $z(x, y)$  на прямую линию  $y = y_0$ , параллельную оси  $Ox$ . На этой прямой сужение

$$z(x, y_0) = y_0 x^2 + 4x - 2y_0 + 5$$

функции  $z(x, y)$  является функцией одной переменной  $x$ . Используем схему нахождения производной функции одного переменного для сужения  $z(x, y_0)$ .

1) Придавая переменной  $x$  приращение  $\Delta x$  в точке  $(x_0; y_0)$ , получим:

$$\begin{aligned} z(x_0 + \Delta x, y_0) &= x_0^2 y_0 + 2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + \\ &+ 4x_0 + 4 \cdot \Delta x - 2y_0 + 5. \end{aligned}$$

2) Находим приращение функции  $z(x, y_0)$  в точке  $(x_0; y_0)$ , придавая переменной  $x$  приращение  $\Delta x$ :

$$z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0) = 2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + 4 \cdot \Delta x.$$

3) Находим предел конечно-разностного отношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + 4\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 y_0 + 4. \end{aligned}$$

4) Подставляя координаты точки  $(x_0; y_0) = (5; 1)$ , получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(5, 1) = (2x_0 y_0 + 4) \Big|_{\substack{x_0=5 \\ y_0=1}} = 14.$$

Аналогично находим частную производную в точке  $(x_0; y_0) = (5; 1)$  по второй переменной  $y$ :

$$\frac{\partial z}{\partial y}(5, 1) = (x_0^2 - 2) \Big|_{\substack{x_0=5 \\ y_0=1}} = 23. \otimes$$

**Пример 4.1.2.** Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = x^3 + 3x^2 y - y^3.$$

**Решение.** Фиксируя переменные и используя формулу вычисления производной степенной функции, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 6xy; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - 3y^2. \otimes$$

**Пример 4.1.3.** Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = \frac{xy}{x + y}.$$

**Решение.** Фиксируя переменные и используя формулы вычисления производной частного и произведения двух функций, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xy}{x + y} \right) = \frac{y^2}{(x + y)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{xy}{x + y} \right) = \frac{x^2}{(x + y)^2}. \otimes$$

**Пример 4.1.4.** Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = (1 - x)^{y^2}.$$

**Решение.** Для вычисления частной производной по переменной  $x$  фиксируем переменную  $y$  и используем формулу для производной степенной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -y^2(1-x)^{y^2-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной  $y$  фиксируем переменную  $x$  и используем формулу  $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ , получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y \cdot (1-x)^{y^2} \cdot \ln(1-x). \otimes$$

**Пример 4.1.5.** Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = x^3 y^2 + 2x \ln y + x^y.$$

**Решение.** Используя таблицу производных, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^2 + 2 \ln y + yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2x^3 y + \frac{2x}{y} + x^y \ln x. \otimes$$

**Пример 4.1.6.** Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = (1 + xy)^y.$$

**Решение.** Фиксируя переменную  $y$  и используя формулу дифференцирования степенной функции, для частной производной по переменной  $x$  получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = y(1 + xy)^{y-1} \cdot y = y^2(1 + xy)^{y-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной  $y$  фиксируем переменную  $x$  и используем понятие логарифмической производной:

$$z = \ln u(x, y) = y \ln(1 + xy) \rightarrow z'_y = \ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \rightarrow$$

$$z' = \frac{u'}{u} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (1 + xy)^y \cdot \ln(1 + xy) + (1 + xy)^y \frac{xy}{1 + xy} =$$

$$= (1 + xy)^y \left[ \ln(1 + xy) + \frac{x \cdot y}{(1 + xy)} \right]. \otimes$$

**Пример 4.1.7.** Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных, заданной формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

в точке  $M_0(1; -1; -2)$ .

**Решение.** Для нахождения частных производных используем таблицу производных и правила дифференцирования функций:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} \frac{2x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} \frac{2x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{1}{2} \frac{2x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_3}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(1; -1; -2) = -\frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(1; -1; -2) = \frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(1; -1; -2) = -\frac{2}{\sqrt{216}}. \otimes$$

**Пример 4.1.8.** Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных

$$u(x_1, x_2, x_3) = \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \equiv e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

в точке  $M(0; 1; 2)$ .



**Решение.** Для нахождения частных производных, используя таблицу производных и правила дифференцирования функций, дифференцируем сужения функции на отрезки прямых, параллельных осям системы координат:

$$1) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) =$$

$$= 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M) = 0;$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) =$$

$$= 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(M) = 2e^5;$$

$$3) \frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_3} e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \frac{\partial}{\partial x_3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) =$$

$$= 2x_3 e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(M) = 4e^5. \otimes$$

**Пример 4.1.9.** Показать, что функция, заданная формулой

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

удовлетворяет уравнению

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**Решение.** Находим частные производные функции в произвольной точке  $(x, y)$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Подставляя в правую часть уравнения, получаем

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0. \quad \otimes$$

**Пример 4.1.10.** Показать, что функция

$$u(x_1, x_2) = x_2 \ln(x_1^2 - x_2^2)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{u}{x_2^2}.$$

**Решение.** Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \ln(x_1^2 - x_2^2) = x_2 \frac{1}{x_1^2 - x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2 - x_2^2) = \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 - x_2^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 - x_2^2) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \ln(x_1^2 - x_2^2) =$$

$$= \ln(x_1^2 - x_2^2) + x_2 \frac{1}{x_1^2 - x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^2 - x_2^2) = \ln(x_1^2 - x_2^2) - \frac{2x_2^2}{x_1^2 - x_2^2}.$$

Полученные выражения подставим в левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_1} \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 - x_2^2} + \frac{1}{x_2} \left[ \ln(x_1^2 - x_2^2) - \frac{2x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \right] = \\ & = \frac{2x_2}{x_1^2 - x_2^2} - \frac{2x_2}{x_1^2 - x_2^2} + \frac{\ln(x_1^2 - x_2^2)}{x_2} = \frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к тождеству:

$$\frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2} = \frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2}.$$

То есть функция  $u(x_1, x_2) = x_2 \ln(x_1^2 - x_2^2)$  удовлетворяет данному уравнению

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{u}{x_2^2}. \quad \otimes$$

**Пример 4.1.11.** Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных, заданной формулой:

$$u(x, y) = x^4 + 5x^2y^2 + 6xy + 5.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 10xy^2 + 6y; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 10x^2y + 6x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 + 10y^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 10x^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = 20xy + 6. \quad \otimes$$

**Пример 4.1.12.** Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x, y) = e^x \ln y.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \ln y; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = e^x \ln y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{e^x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y}. \quad \otimes$$

**Пример 4.1.13.** Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных  $u(x, y) = \sin(x + y)$ .

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos(x + y); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \cos(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -\sin(x + y); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\sin(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = -\sin(x + y). \otimes$$

**Пример 4.1.14.** Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x_1, x_2) = x_1^{x_2}.$$

Решение. 1) Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 x_1^{x_2-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^{x_2} \ln x_1.$$

2) Находим частные производные второго порядка, дифференцируя частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = x_2(x_2 - 1)x_1^{x_2-2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = x_1^{x_2-1} + x_2 x_1^{x_2-1} \ln x_1 = x_1^{x_2-1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = x_2 x_1^{x_2-1} \ln x_1 + x_1^{x_2} \frac{1}{x_1} = x_1^{x_2-1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1^{x_2} (\ln x_1)^2. \otimes$$

**Пример 4.1.15.** Вычислить полный дифференциал функции двух переменных, заданной формулой

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

в точке  $M_0(1; -1)$ .

Решение. Находим частные производные функции:

$$1) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$3) dz(1, -1) = -\frac{\sqrt{2}}{4} dx + \frac{\sqrt{2}}{4} dy. \otimes$$

**Пример 4.1.16.** Вычислить приближённо  $(0,98)^{2,01}$ .

**Решение.** Рассмотрим функцию  $z = x^y$ . В точке  $(1; 2)$  значение функции  $z(1; 2) = 1$ . Вычислим значение функции в точке  $(0,98; 2,01)$ . Имеем  $\Delta x = -0,02$ ,  $\Delta y = 0,01$ . Найдём частные производные функции  $z = x^y$  в точке  $(1; 2)$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 0.$$

Получаем:

$$(0,98)^{2,01} = z(1; 2) + \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} \cdot \Delta y = 1 - 0,04 = 0,96. \otimes$$

**Пример 4.1.17.** Найти дифференциал функции

$$f = f(x + y^2, y + x^2)$$

в точке  $M(-1; 1)$ .

**Решение.** Обозначим, например,

$$u = x + y^2, v = y + x^2.$$

Для нахождения дифференциала используем формулу дифференциала и правило нахождения производной композиции функций:

$$df(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) - \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) + \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2).$$

Подставляя в выражение для полного дифференциала, получаем:

$$\begin{aligned} df(M) &= \frac{\partial f}{\partial x}(M) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M) dy = \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) - 2 \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2) \right] dx + \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) + \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2) \right] dy. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 4.1.18.** Найти дифференциал второго порядка функции

$$f = f(x + y, xy).$$

**Решение.** Обозначим  $u = x + y$ ,  $v = xy$ . Теперь находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, xy) \cdot y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, xy) \cdot x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot xy + \frac{\partial f}{\partial v} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x+y) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot x^2 = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \otimes
\end{aligned}$$

Пусть функция  $u = f(x, y)$  задана *параметрическим способом*, то есть, с помощью формул

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Тогда функция  $u$  является функцией одного переменного  $t$ :

$$u = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Пусть функции  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$  дифференцируемы в некоторой точке  $t$ , то есть, существуют производные

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} &= \frac{d\varphi}{dt}(t), \\
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} &= \frac{d\psi}{dt}(t).
\end{aligned}$$

Если функция  $u = f(x, y)$  дифференцируема, то придавая переменной  $t$  приращение  $\Delta t$ , видим, что все функции получают соответствующие приращения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta u$ , причём по определению дифференцируемости

$$\begin{aligned}
\Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y
\end{aligned}$$

где  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta = 0$ . Из последнего равенства вытекает, что

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Итак, имеем формулу:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если  $x = \varphi(t, s)$  и  $y = \psi(t, s)$ , то имеем две формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

**Пример 4.1.19.** Найти  $\frac{dz}{dt}$ , если

$$z = x^3 - x^2 y, \quad x = 1 - t^2, \quad y = t^4.$$

**Решение.** Находим непосредственно:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (3x^2 - 2xy)2t + (-x^2)4t^3 = \\ &= 4t^7 + 2t^6 + 8t^5 + 4t^4 - 4t^3 - 12t^2 + 2t. \quad \otimes \end{aligned}$$

**Пример 4.1.20.** Найти  $\frac{du}{dt}$ , если

$$u = \ln \frac{x_1 - x_2 + x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sin(x_1 + x_2 + x_3),$$

$$x_1 = a \sin t, \quad x_2 = b \cos t, \quad x_3 = ce^{-kt},$$

где  $a, b, c, k$  – некоторые постоянные.

**Пример 4.1.21.** Найти  $\frac{\partial z}{\partial t}$  и  $\frac{\partial z}{\partial s}$  для функции  $z = x^3 e^y$ , если

$$x = ts, \quad y = t^2 - s^2.$$

**Решение.**



$$1) \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = e^{t^2-s^2} t^2 s^3 (3+2t^2).$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = e^{t^2-s^2} t^3 s^2 (3-2s^2). \otimes$$

Пусть функция  $y = f(x)$  задана неявно посредством уравнения

$$F(x, y) = 0,$$

тогда её производная находится с использованием правила дифференцирования сложной функции путём прямого дифференцирования уравнения, определяющего функцию:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

где учтено, что  $\frac{dx}{dx} = 1$ . Если  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ , то получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}.$$

Пусть теперь уравнение

$$F(x, y, u) = 0$$

задаёт функцию двух переменных  $u = \varphi(x, y)$ . Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

**Пример 4.1.22.** Найти частные производные функции  $z = z(x, y)$ , заданной неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y - 1 = 0.$$

**Решение.** Здесь

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y - 1,$$

следовательно, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y - 4; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Используя формулы дифференцирования неявно заданной функции, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{x+y}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{2-x-y}{z}. \quad \otimes$$

## Практическое занятие 2. Исследование функции нескольких переменных

### Предварительные сведения

Пусть  $f : M \rightarrow f(M)$  – некоторая функция  $n$  переменных, дифференцируемая в области  $M \subset R^n$ , а  $N_0$  и  $N$  – точки множества её определения. Тогда **производной по направлению** вектора  $\vec{N}_0 N = t \vec{h}$ , где  $t \in R^+ \cup \{0\}$ , в точке  $N_0$  (с радиус-вектором  $\vec{x}_0$ ) функции  $f$  называется правый предел

$$\frac{\partial f}{\partial h} \left( \vec{x}_0 \right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f \left( \vec{x}_0 + t \vec{h} \right) - f \left( \vec{x}_0 \right)}{t}.$$

Градиентом функции  $f : M \rightarrow f(M)$  в точке  $\vec{x}_0 \in M$  называется вектор, имеющий в каноническом базисе пространства  $R^n$  координаты  $\frac{\partial f}{\partial x_k} \left( \vec{x}_0 \right)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), то

есть вектор

$$\vec{\text{grad}} f \left( \vec{x}_0 \right) \equiv \vec{\nabla} f \left( \vec{x}_0 \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \left( \vec{x}_0 \right) \vec{e}_k.$$

Связь производной по направлению и градиента даётся формулой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h} \left( \vec{x}_0 \right) &= \left( \vec{\nabla} f \left( \vec{x}_0 \right), \vec{h} \right) = \left\| \vec{\nabla} f \left( \vec{x}_0 \right) \right\| \cdot \left\| \vec{h} \right\| \cdot \cos \left\{ \vec{\nabla} f \left( \vec{x}_0 \right), \vec{N}_0 N \right\} = \\ &= \left\| \vec{\nabla} f \left( \vec{x}_0 \right) \right\| \cdot \cos \left\{ \vec{\nabla} f \left( \vec{x}_0 \right), \vec{N}_0 N \right\}. \end{aligned}$$

Внутренняя точка  $\vec{x}_0 \in M$  называется **точкой локального минимума** (точкой локального максимума) функции  $f$ , если существует окрестность  $U(\vec{x}_0)$  такая, что

$\left( \forall \vec{x} \in U(\vec{x}_0) \right)$  выполняется неравенство

$$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \left( f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \right).$$

Справедлива теорема, позволяющая исследовать на экстремум функцию двух переменных.

Пусть функция  $f : M \rightarrow f(M)$ ,  $M \subset R^2$ ,  $f(M) \subset R^1$  непрерывна вместе со сво-

ими частными производными первого и второго порядка в некоторой окрестности точки  $\vec{x}_0 \in M$  и удовлетворяет условию

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Составим определитель следующего вида

$$D(\vec{x}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{x}_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда в точке  $\vec{x}_0$  функция  $f$ :

- 1) имеет локальный минимум, если  $D(\vec{x}_0) > 0$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) > 0$ ;
- 2) имеет локальный максимум, если  $D(\vec{x}_0) > 0$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) < 0$ ;
- 3) не имеет экстремума, если  $D(\vec{x}_0) < 0$ .

### Примеры с решением

**Пример 4.2.1.** Найти  $\vec{\text{grad}} f$  и  $\left\| \vec{\text{grad}} f \right\|$  для функции, определённой формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

в точке  $M_0(1; -1; 2)$ .

**Решение.** Находим частные производные и их значение в указанной точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2z;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 2) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 2) = -4.$$

Теперь имеем:

$$\vec{\text{grad}} f(M_0) = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3,$$

$$\left\| \vec{\text{grad}} f \right\| = \sqrt{4 + 4 + 16} = 2\sqrt{6}. \otimes$$

**Пример 4.2.2.** Найти производную функции, заданной формулой

$$u(x, y, z) = x^2 - 2xz + y^2$$

в точке  $M_0(1; 2; -1)$  по направлению вектора  $\vec{M_0M}$ , где  $M(2; 4; -3)$ .

**Решение.** Находим вектор

$$\vec{M_0M} : \vec{M_0M} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Далее, находим градиент функции в произвольной точке и в точке  $M_0(1; 2; -1)$ :

$$\vec{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_3 = (2x - 2z) \vec{e}_1 + 2y \vec{e}_2 - 2x \vec{e}_3,$$

$$\vec{\text{grad}} u(M_0) = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Находим производную по направлению вектора  $\vec{M_0M}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{M}_0 M}(M_0) &= \frac{\left( \left. \vec{\text{grad}} u \right|_M, \vec{M}_0 M \right)}{\left\| \vec{M}_0 M \right\|} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{1+4+4}} \\ &= \frac{4+8+4}{\sqrt{9}} = \frac{16}{3}. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 4.2.3.** Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$z(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

**Решение.** 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Имеем одну критическую точку  $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ .

2) Вычисляем определитель:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Точка  $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$  является точкой экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) > 0,$$

то точка  $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$  является точкой локального **минимума**.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$$z(M_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{7}{3}. \otimes$$

**Пример 4.2.4.** Исследовать на экстремуму функцию, заданную формулой:

$$z(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{(x + 2y - 16)^2}{2}.$$

**Решение.** 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 16, \\ x + 3y = 16. \end{cases}$$

Эта СЛАУ имеет решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/7 \\ 32/7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем одну критическую точку  $M_0\left(\frac{16}{7}; \frac{32}{7}\right)$ .

2) Вычисляем определитель:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Точка  $M_0\left(\frac{16}{7}; \frac{32}{7}\right)$  является точкой локального экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) > 0,$$

то точка  $M_0\left(\frac{16}{7}; \frac{32}{7}\right)$  является точкой локального минимума.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$$z(M_0) \approx 36,6. \otimes$$

### Практическое занятие 3. Числовые ряды

#### Предварительные сведения

Пусть  $(a_k) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$  – некоторая последовательность действительных чисел ( $a_k \in R, k=1, 2, 3, \dots$ ). Сопоставим из элементов этой последовательности новую последовательность, определив её члены так:

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

.....

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

.....

Формула для общего члена получившейся последовательности имеет, очевидно, вид

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Последовательность  $(s_n)$  определяет **числовой ряд**

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

и называется последовательностью частичных сумм числового ряда.

Бесконечный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  называется **сходящимся (расходящимся)**, если сходится (расходится) последовательность его частичных сумм. Если ряд сходится, то его **суммой** называется число

.....

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Необходимое условие сходимости числового ряда даётся следующей теоремой.

Последовательность  $(a_k)$  членов сходящегося числового ряда сходится к нулю.

**Геометрическая прогрессия**  $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$  при  $|q| < 1$  сходится к

$$S = \frac{1}{1-q},$$

а при  $|q| \geq 1$  расходится.

**Гармонический ряд**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится.

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  – два ряда с положительными членами.

Если для почти всех  $k$  выполняется неравенство  $a_k \leq b_k$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

называется **минорантой** ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , а ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  – **мажорантой** ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Признак сравнения.** Каждая миноранта сходящегося ряда сходится, а каждая мажоранта расходящегося ряда расходится.

**Признак Даламбера.** Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  – ряд с положительными членами. Если существует та-

кое число  $q \in (0, 1)$ , что для почти всех номеров  $k$  выполняется неравенство  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$ , то ряд

сходится. Если же для почти всех  $k$  выполняется неравенство  $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ , то ряд расходится.

Ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k,$$

где  $(a_k)$  – последовательность положительных чисел, называется **знакоперевающимся рядом**.

Знакоперевающийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

сходится в том и только в том случае, если последовательность из абсолютных величин его членов монотонно убывает и сходится к нулю.

### Примеры с решением

**Пример 4.3.1.** Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

**Решение.** Общий член ряда равен



$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, для последовательности частичных сумм ряда имеем

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \dots = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Сумма ряда находится путём непосредственного предельного перехода:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \otimes$$

**Пример 4.3.2.** Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ .

**Решение.** Общий член ряда можно представить в виде:

$$a_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Записывая общий член последовательности частичных сумм ряда в виде

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

и переходя непосредственно к пределу, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}\right] = \frac{1}{2}. \otimes$$

**Пример 4.3.3.** Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

**Решение.** Имеем геометрическую прогрессию, которая в силу неравенства  $q = \frac{1}{2} < 1$

сходится и имеет сумму

$$S = \frac{1}{1-q} = 2. \otimes$$

**Пример 4.3.4.** Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

**Решение.** Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется.  $\otimes$

**Пример 4.3.5.** Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

**Решение.** Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется.  $\otimes$

**Пример 4.3.6.** Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$ .

**Решение.** Для почти всех  $n$  выполняется неравенство

$$\frac{2^n}{1+2^{2n}} < \frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$  является минорантой ряда геометрической прогрессии  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ , ко-

торый сходится, так как  $q = \frac{1}{2} < 1$ .

Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$  по признаку сравнения сходится.  $\otimes$

**Пример 4.3.7.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}$ .

**Решение.** Проверим выполнение необходимого признака сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется.

Общий член ряда удовлетворяет следующим условиям:  $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$-1 \leq \sin n \leq 1; 1 < 2 + \sin n < 3; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} > 0.$$

Имеем ряд с положительными членами, для которого можно применить признак сравнения.

Предположим, что ряд сходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1} < 2n^{3/2}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} < \frac{2n^{3/2}}{n^2} = \frac{2}{n^{1/2}}.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{1/2}}$  является так называемым обобщённым гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^\alpha}$ , который при

$0 < \alpha < 1$  расходится. Поэтому предположение о сходимости исходного ряда подтвердить не удалось.

Предположим, что ряд расходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1} > \sqrt{n^3}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} \geq \frac{n^{3/2}}{3n^2} = \frac{1}{3n^{1/2}}.$$

Так как обобщённый гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^{1/2}}$  расходится, то и исходный ряд также расходится.

⊗

**Пример 4.3.8.** Выяснить вопрос о сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ .

**Решение.** Находя отношение  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ , получаем:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}, a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1} \cdot 2^n}{2^n \cdot 2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

Очевидно, что для всех  $n$  выполняется неравенство  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ . Поэтому ряд сходится по признаку

Даламбера. ⊗

**Пример 4.3.9.** Выяснить вопрос о сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ .

**Решение.** Находя отношение  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ , получаем:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Очевидно, что для всех  $n$  выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1.$$

Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$  по признаку Даламбера расходится. ⊗

**Пример 4.3.10.** Выяснить вопрос о сходимости знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

**Решение.** Члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$$

Последовательность абсолютных величин членов ряда сходится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  по признаку Лейбница сходится.  $\otimes$

**Пример 4.3.11.** Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

суммой четырёх его первых членов.

**Решение.** Ряд сходится (см. предыдущую задачу). Ошибка, получающаяся при замене суммы ряда суммой четырёх его первых членов, меньше абсолютной величины пятого члена:

$$\Delta < 0,2. \otimes$$

**Пример 4.3.12.** Выяснить вопрос о типе сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$ .

**Решение.** Ряд сходится (см. задачу 8.11). Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных

величин членов данного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ . Вычисляем отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Для всех  $n$ , очевидно, имеет место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} < 1.$$

Поэтому ряд сходится абсолютно.  $\otimes$

**Пример 4.3.13.** Выяснить вопрос о типе сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ .

**Решение.** Ряд знакочередующийся, последовательность его членов монотонно убывает и сходится к нулю. Поэтому ряд сходится по признаку Лейбница.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ . Сравнивая его с гармоническим рядом, замечаем, что для почти всех  $n$  (начиная с  $n = 2$ ) каждый член этого ряда больше соответствующего члена гармонического ряда:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n}.$$

Так как гармонический ряд расходится, то по признаку сравнения расходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ .

Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$  не является абсолютно сходящимся, то есть сходится условно.  $\otimes$

## Практическое занятие 4. Функциональные и степенные ряды

### Предварительные сведения

Последовательность функций  $(f_n)$  называется сходящейся на множестве  $M$  **поточечно** (или **в обычном смысле**), если для **каждой точки**  $x_0 \in M$  сходится числовая последовательность  $(f_n(x_0))$ .

**Предельной функцией**, или **пределом**  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  сходящейся поточечно последовательности функций  $(f_n)$ , называется функция  $f$ , определённая на множестве  $M$  условием:  $(\forall x_0 \in M) f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ .

Таким образом, для поточечно сходящейся функциональной последовательности неравенство  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  выполняется для каждой точки  $(\forall x_0 \in M)$  и для своего  $\varepsilon$ , то есть  $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$ .

Функциональная последовательность  $(f_n)$  называется **равномерно сходящейся на множестве  $M$**  к предельной функции  $f$ , если для произвольного положительного числа  $\varepsilon$  и для

любой точки  $x \in M$  найдётся такой номер  $n_0$ , что для всех  $n \geq n_0$  выполняется условие  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Таким образом, для равномерно сходящейся на множестве  $M$  функциональной последовательности неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

выполняется одновременно для всех  $x \in M$  и, следовательно,  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ .

Функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ ,  $f_k : M \rightarrow f_k(M)$  называется **сходящимся на множестве  $M$  поточечно или в обычном смысле**, если на этом множестве поточечно сходится последовательность его частичных сумм

$$(s_n) = \left( \sum_{k=1}^n f_k \right).$$

Функция  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  называется **суммой ряда**  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ , и при этом пишут

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  называется **равномерно сходящимся на множестве**

$M \subset R^1$ , если на  $M$  равномерно сходится последовательность его частичных сумм

$$(s_n) = \left( \sum_{k=1}^n f_k \right).$$

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  – сходящийся числовой ряд с неотрицательными членами, и пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ , где  $f_k : M \rightarrow f_k(M)$  – функциональный ряд. Тогда если  $|f_k(x)| \leq a_k$  для всех точек  $x \in M$  и для почти всех номеров  $k \in N$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  сходится на множестве  $M$  абсолютно и равномерно.

Функциональный ряд вида  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  называется **степенным рядом с центром в**

точке  $x_0$ . Числа  $a_k$  называются **коэффициентами** степенного ряда.

**Первая теорема Абеля.** Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

сходится в некоторой точке  $x_1$ , то он сходится абсолютно и равномерно во всякой точке  $x$ , удовлетворяющей условию  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ .

Кроме этого, для каждой такой точки  $x$  существуют такие числа  $S > 0$ ,  $0 < q < 1$ , что для всех номеров  $k$  справедливо неравенство

$$|a_k| \cdot |x - x_0|^k \leq S q^k.$$

Причём, если  $x \neq x_0$ ,  $x_1 \neq x_0$  то  $q = \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|}$ , а число  $S$  от  $x$  не зависит.

**Вторая теорема Абеля.** Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

в точке  $x_1$  не сходится абсолютно (например, расходится), то он расходится в каждой точке  $x$ , удовлетворяющей условию

$$|x - x_0| > |x_1 - x_0|.$$

Число

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

называется **радиусом сходимости**, а открытое множество  $M_r = \{x : |x - x_0| < r\}$  – **множеством (интервалом) сходимости степенного ряда**  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ .

### Примеры с решением

**Пример 4.4.1.** Исследовать сходимость функционального ряда

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{4-x}{7x+2} \right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{4-x}{7x+2} \right)^3 + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot \left( \frac{4-x}{7x+2} \right)^n + \dots$$

в точках  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 1$ .

**Решение.** 1) В точке  $x_1 = 0$  имеем

$$2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{5} \cdot 2^3 + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot 2^n + \dots$$

Это ряд с положительными членами. Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{2^n}{2n-1}; u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1};$$



$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{2^n} = 2 \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = 2 \cdot \frac{2n+1-2}{2n+1} = 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) > 1.$$

Поэтому в точке  $x_1 = 0$  ряд расходится.

2) В точке  $x_2 = 1$  имеем

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^n} + \dots$$

Применяем признак Даламбера:

$$u_n = \frac{1}{3^n \cdot (2n-1)}; u_{n+1} = \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{n+1}};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1) \cdot 3^n}{(2n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2n+1-2}{2n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) < 1.$$

Поэтому в точке  $x_2 = 1$  ряд сходится.  $\otimes$

**Пример 4.4.2.** Найти промежуток сходимости и сумму ряда

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-(n-1)x} + \dots$$

**Решение.** В точке  $x = 0$  не выполняется необходимый признак сходимости и ряд, очевидно, расходится. Рассмотрим промежутки  $(-\infty, 0)$  и  $(0, \infty)$ .

1) На промежутке  $(-\infty, 0)$  имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(n-1)x} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n-1)(-x)} = \{-x = t\} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n-1)t},$$

где  $t \in (0, \infty)$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n-1)t} \neq 0$ . Снова не выполняется необходимый при-

знак сходимости. Ряд на промежутке  $(-\infty, 0)$  расходится.

2) На промежутке  $(0, \infty)$  выполняется необходимый признак сходимости. Далее имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-nx}}{e^{-(n-1)x}} = \frac{e^{(n-1)x}}{e^{nx}} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

На  $(0, \infty)$  всегда  $\frac{1}{e^x} < 1$ . Поэтому ряд сходится.

Перепишем ряд в виде:

$$1 + \frac{1}{e^x} + \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{e^x}\right)^n + \dots$$

Имеем геометрическую прогрессию со знаменателем  $q = \frac{1}{e^x} < 1$ . Поэтому сумма ряда равна

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x-1}. \quad \otimes$$

**Пример 4.4.3.** Исследовать сходимость степенного ряда

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \dots$$

**Решение.** Здесь

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Ряд сходится в промежутке  $-1 < x < 1$ .

Если  $x = 1$ , имеем гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , который расходится.

Если  $x = -1$ , то получаем ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

Это ряд Лейбница и, следовательно, он сходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток  $x \in [-1, 1)$ , который можно задать двойным неравенством  $-1 \leq x < 1$ .  $\otimes$

**Пример 4.4.4.** Исследовать сходимость ряда

$$(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots + \frac{1}{n^2}(x-2)^n + \dots$$

**Решение.** Коэффициенты ряда выражаются формулами:

$$a_n = \frac{1}{n^2}; a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Таким образом, ряд сходится, если

$$-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3.$$

На левом конце промежутка сходимости  $x = 1$  имеем ряд

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots$$

Это знакочередующийся ряд Лейбница, который сходится, так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

На правом конце промежутка сходимости  $x = 3$  имеем ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Этот ряд сходится, так как при  $p > 1$  сходится ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots,$$

что является табличным фактом.

Степенной ряд сходится для значений  $x$ , удовлетворяющих двойному неравенству  $1 \leq x \leq 3$ .  $\otimes$

**Пример 4.4.5.** Исследовать сходимость ряда

$$1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \dots + n!(x-5)^n + \dots$$

**Решение.** Коэффициенты ряда

$$a_n = n!; a_{n+1} = (n+1)!.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ряд сходится только при  $x - 5 = 0$ , то есть в точке  $x = 5$ .  $\otimes$

**Пример 4.4.6.** Показать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2}$  сходится равномерно на промежутке  $(-\infty, \infty)$ .

**Решение.** Выпишем несколько первых членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2} = -\frac{1}{x^4 + 1^2} + \frac{2}{x^4 + 2^2} - \frac{3}{x^4 + 3^2} + \dots$$

Имеем знакочередующийся ряд, причём

$$|u_1| = \frac{1}{x^4 + 1} > |u_2| = \frac{2}{x^4 + 4} > |u_3| = \frac{3}{x^4 + 9} > \dots$$

Применим признак Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{x^2}{n}\right)^2 + 1} = 0.$$

Ряд сходится для любых  $x \in (-\infty, \infty)$ .

Для остатка ряда имеем

$$|r_n| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2} \right| < |u_{m+1}| = \left| \frac{(-1)^{(m+1)} \cdot (m+1)}{x^4 + (m+1)^2} \right| < \frac{1}{m+1},$$

так как  $x^4 > 0$ . Рассмотрим неравенство  $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$ . Из этого неравенства получаем

$m > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ . Если теперь мы выберем  $m_0 = \left[ \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$ , то  $(\forall m \geq m_0)$  получаем

$|r_m| < \frac{1}{m+1} < \varepsilon$ . Таким образом, ряд сходится на  $(-\infty, \infty)$  независимо от  $x$ , то есть равномерно по  $x \in (-\infty, \infty)$ .  $\otimes$

Ряд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \dots +$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)(x-x_0)^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

для бесконечно дифференцируемой функции  $f: M \rightarrow f(M)$ , вне зависимости от его сходимости и суммы, называется **рядом Тейлора** для этой функции. При  $x_0 = 0$  ряд называется **рядом Маклорена**.

**Пример 4.4.7.** Разложить функцию

$$f(x) = \frac{3}{2-x-x^2}$$

по степеням  $x$  ( $x_0 = 0$ ) в ряд Тейлора.

**Решение.** Данную функцию разложим на элементарные дроби:

$$f(x) = \frac{3}{2-x-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+2}.$$

Теперь можно использовать готовое табличное разложение

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad t \in (-1, 1).$$

Применяя это разложение, получаем:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n;$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, \quad x \in (-2, 2).$$

Получаем разложение для исходной функции:

$$f(x) = \frac{3}{2-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right) x^n.$$

Область сходимости данного ряда – пересечение указанных областей сходимости:

$$M = (-1, 1) \cap (-2, 2) = (-1, 1). \quad \otimes$$

**Пример 4.4.8.** Разложить в ряд Маклорена функцию, определённую формулой

$$f(x) = \sin^2 x.$$

**Решение.** Вычисляем производные данной функции:

$$f^{(0)}(x) = \sin^2 x;$$

$$f^{(1)}(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x;$$

$$f^{(2)}(x) = 2 \cdot \cos 2x = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(3)}(x) = -4 \cdot \sin 2x = 2^2 \cdot \sin\left(2x + 2 \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(4)}(x) = -8 \cdot \cos 2x = 2^3 \cdot \sin\left(2x + 3 \frac{\pi}{2}\right);$$

.....;

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot \sin\left[2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right];$$

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n \cdot \sin\left[2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right];$$

.....

Вычисляем производные в точке  $x = 0$ :

$$f^{(0)}(0) = 0;$$

$$f^{(1)}(0) = 0;$$

$$f^{(2)}(0) = 2;$$

$$f^{(3)}(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(0) = 2^3;$$

$$f^{(5)}(0) = 0;$$

$$f^{(6)}(0) = 2^5;$$

.....

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{2^n \cdot \sin\left(2 \cdot \xi + \frac{n \cdot \pi}{2}\right)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2 \cdot x)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sin\left(2 \cdot \xi + \frac{n \cdot \pi}{2}\right).$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad \left| \sin\left(2 \cdot \xi + \frac{n \cdot \pi}{2}\right) \right| \leq 1,$$

получаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ . Поэтому функция  $f(x) = \sin^2 x$  может быть разложена в ряд Маклорена

рена

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!} \cdot x^2 - \frac{2^3}{4!} \cdot x^4 + \frac{2^5}{6!} \cdot x^6 - \frac{2^7}{8!} \cdot x^8 + \dots$$

на любом промежутке  $[-b, b]$ .  $\otimes$

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти частные производные первого порядка функций, заданных формулами:

$$1) u(x, y) = x^3 \sin y + y^4; \quad 2) u(x, y) = x^2 \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}.$$

2. Найти частные производные в заданных точках:

$$1) u(x, y) = \frac{1-xy}{1+xy}, \quad A(0; 1);$$

$$2) u(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}, \quad A(1; 1);$$

$$3) u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A(\sqrt{2}; 1).$$

3. Найти полные дифференциалы следующих функций:

$$1) u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad 2) u = \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2});$$

$$3) u = \ln \sin(x_1 - 2x_2); 4) u = x^2 y z^4; 5) u = \ln(x^3 - y^3 + 2z^3).$$

4. Пусть функция задана формулой  $f(x, y) = x^2 \sin^2 y$ . Вычислить  $df(x_0, y_0)$  в точке

$$(x_0, y_0) = \left(-1; \frac{\pi}{4}\right).$$

5. Вычислить значения полных дифференциалов функций, заданных формулами:

$$1) u = \frac{x_2}{x_2 - x_1}, x_1 = 1, x_2 = 2, dx_1 = \frac{1}{2}, dx_2 = -\frac{1}{3};$$

$$2) u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$x = 3, y = 4, z = 5, dx = -0,1, dy = 0,3, dz = 0,2.$$

6. Вычислить приближённое значение выражения  $(1,02)^3 \cdot (0,97)^2$ .

7. Найти  $\frac{du}{dt}$ , если  $u = e^{x-3y}$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = t^2$ .

8. Найти  $\frac{\partial f}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v}$ , если  $f = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $x = uv$ ,  $y = \frac{u}{v}$ .

9. Функция задана уравнением  $e^u = \cos x \cos y$ . Найти  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

28. Найти производную функции

$$u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$$

по направлению радиус-вектора точки  $M(3; 4)$  в начале координат.

29. Найти производную функции, определённой формулой

$$u = \frac{x_1 x_2 x_3}{3},$$

в точке  $M_0(1; 2; 3)$  по направлению вектора  $\vec{M_0 M}$ , если  $M(4; 1; 6)$ .

30. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x, y) = 3x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2.$$



31. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2).$$

32<sup>\*)</sup>. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой

$$z = x^2 + y^2$$

при условии, что  $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ .

33<sup>\*)</sup>. Найти наибольшее и наименьшее значения функции, заданной формулой

$$f(x, y) = xy$$

в круге  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

34. Выяснить вопрос о сходимости и найти суммы рядов:

$$1) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots; 2) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots;$$

$$3) 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \dots; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 + 5n + 6};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 - 5n + 6}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{25n^2 + 5n - 6};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{90}{4n^2 + 8n - 5}; 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2 + 3n}; 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 - 1}; 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{16n^2 - 8n - 3}; 12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

35. Проверить, выполнение необходимого признака сходимости для рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^2 - (2+n)^4}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^3 - (1+n)^3}.$$

36. Исследовать сходимость ряда, используя признак сравнения:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot (1+2^n)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-2\sin n}{n-\ln n}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2+3};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \ln n}{n^3-2}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}; 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+6}{n^3+5}; 10) \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n^4+3}{n^4+2};$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{3^n+n}{7^n+2n}; 12) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left( e^{\frac{1}{2n^3}} - 1 \right).$$

37. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n!)^3};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}; 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^5-1)}{n!}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}; 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

38. Исследовать сходимость ряда, используя радикальный признак Коши:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^{n^2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^3 + n}{3n^3 - 1} \right)^{n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5n - 3}{7n + 1} \right)^{n^3}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n + 1}{5n + 3} \right)^n;$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left( \frac{n}{2n + 1} \right)^{2n}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}.$$

39. Исследовать сходимость знакопеременного ряда и выяснить тип сходимости (абсолютная или условная):

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n - 2}{3n - 1}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( 1 + \frac{n}{10^n} \right);$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n + 1}{n^2 + n + 1}.$$

40. Исследовать сходимость функциональных рядов в указанных точках:

$$1) \frac{3x + 1}{x^2 + x + 1} + \left( \frac{3x + 1}{x^2 + x + 1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{3x + 1}{x^2 + x + 1} \right)^n + \dots,$$

$$x = 1, x = 2, x = 3;$$

$$2) \frac{1!}{1} (x^2 - 4x + 6) + \frac{2!}{2^2} (x^2 - 4x + 6)^2 + \dots + \frac{n!}{n^2} (x^2 - 4x + 6)^n + \dots,$$

$$x = 1, x = 2, x = 3.$$

41. Найти область сходимости функционального ряда

$$1) \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{2^2(1 + x^2)^2} + \dots + \frac{1}{n^2(1 + x^2)^n} + \dots;$$

$$2) 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(x^2 - 6x + 10)^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(x^2 - 5x + 9)^n}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2(x^2 + 3)^n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2 - 4x + 8)^n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2(x^2 - 2x + 6)^n};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n + \sqrt{n})^x}.$$

42. Найти радиус и промежуток сходимости степенного ряда:

$$1) \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots;$$

$$2) 1 + \frac{x^3}{10} + \frac{x^6}{10^2} + \dots + \frac{x^{3(n-1)}}{10^{n-1}} + \dots;$$

$$3) 2x^5 + \frac{4x^{10}}{3} + \frac{8x^{15}}{5} + \dots + \frac{2^n x^{5n}}{2n-1} + \dots;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(n-1)/2}}{n!}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 9^n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{4^n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x+3)^n}{n^2+1}; \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3+3n)4^n};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{(n+1)^2 3^n}.$$

43. Разложить данную функцию в ряд Тейлора в окрестности данной точки, или в ряд Маклорена в окрестности нуля;

$$1) f(x) = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}; \quad 2) f(x) = \frac{x}{3+2x};$$

3)  $f(x) = \sqrt[4]{16+x}$ ; 4)  $f(x) = 2^x$ ;

5)  $f(x) = \cos^2 x$ ; 6)  $f(x) = e^{-x^2}$ ;

7)  $f(x) = \frac{1}{x}$  по степеням  $x-2$ ; 8)  $f(x) = 3^x$ ;

9)  $f(x) = e^{-2x}$ ; 10)  $f(x) = \sqrt{x+2}$ .

**ЧАСТЬ 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.****ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ****Практическое занятие 1. Базисные векторные поля****Предварительные сведения**

Регулярной системой координат в области  $D \subset E^n$  называется система гладких функций

$$\left\{ \begin{array}{l} q^1 = q^1(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ q^2 = q^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \dots, \\ q^n = q^n(x^1, x^2, \dots, x^n), \end{array} \right.$$

задающих взаимно однозначное (биективное) отображение области  $G \subset R^n$  на область  $D \subset E^n$ , и удовлетворяющих условию

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial q^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial q^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial q^n}{\partial x^n} \end{array} \right| \neq 0, \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x^1}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial q^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^n}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial q^n} \end{array} \right| \neq 0$$

во всех точках области  $D$ .

Если радиус-вектор является функцией декартовых координат, то есть

$$\vec{x} = \vec{x}(x^1, x^2, x^3) = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3,$$

то для дифференциала радиус-вектора имеем

$$d\vec{x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^3} dx^3 \equiv dx^j \vec{e}_j.$$

Если радиус-вектор является функцией криволинейных координат, то есть

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x}(q^1, q^2, q^3) = \\ &= x^1(q^1, q^2, q^3) \vec{e}_1 + x^2(q^1, q^2, q^3) \vec{e}_2 + x^3(q^1, q^2, q^3) \vec{e}_3, \end{aligned}$$

или в скалярной форме

$$\begin{cases} x^1 = x^1(q^1, q^2, q^3), \\ x^2 = x^2(q^1, q^2, q^3), \\ x^3 = x^3(q^1, q^2, q^3), \end{cases}$$

то для дифференциала радиус-вектора имеем

$$d\vec{x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} dq^j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^3} dq^3 \equiv dq^j \vec{g}_j,$$

где по определению введены новые векторы

$$\vec{g}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j},$$

которые зависят от криволинейных координат и являются, следовательно, не векторами, а векторными полями.

→

Можно показать, что векторные поля  $\vec{g}_k$  при выполнении приведённого выше условия регулярности отображения, образуют базис пространства  $E^3$ . Эти поля называются **натуральными базисными векторными полями**.

**Взаимные базисные векторные поля** определяются по формуле

$$\vec{g}^i \stackrel{\text{def}}{=} \nabla q^i,$$

или формулами

$$\vec{g}^i \stackrel{\text{def}}{=} g^{ij} \vec{g}_j,$$

где  $g^{ij}$  – некоторая, пока произвольная невырожденная симметрическая матрица.

**Полярные координаты**  $\{q^1; q^2\} \equiv \{r; \varphi\}$  на плоскости  $R^2$  задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^2 \{r; \varphi\} \rightarrow R^2 \{x^1; x^2\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Координата  $r$  называется **полярным радиусом**, а координата  $\varphi$  – **полярным углом**. Якобиан этого преобразования равен:

$$\det \left( \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(r, \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

**Цилиндрические координаты в пространстве**  $R^3$  задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^3 \{r; \varphi; h\} \rightarrow R^3 \{x^1; x^2; x^3\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \varphi, \\ x^3 = h. \end{cases}$$

Здесь

$$D = \left\{ \{r; \varphi; h\} \in R_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < h < +\infty \right\}.$$

Якобиан преобразования

$$\det \left( \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r, \varphi, h)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

**Сферические координаты** в пространстве  $R^3$  задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^3 \{r, \varphi, \theta\} \rightarrow R^3 \{x^1, x^2, x^3\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид (рисунок 1.3)

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ x^3 = r \cos \theta. \end{cases}$$

Здесь

$$D = \left\{ \{r, \varphi, \vartheta\} \in \mathbb{R}_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta \leq \pi \right\}.$$

Якобиан преобразования (1.35)

$$\det \left( \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \right) = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2 \sin \theta.$$

### Примеры с решением

**Пример 5.1.1.** Показать, что орты полярной системы координат связаны с ортами декартовой системы координат соотношениями

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2, \quad \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} = -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2. \quad (1)$$

**Решение.** В полярной системе координат связь между старыми (декартовыми) и новыми (полярными) координатами даётся обратным отображением

$$x^1 = r \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \varphi. \quad (2)$$

Следовательно, для радиус-вектора получаем

$$\vec{r} = r \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \quad (3)$$

Воспользуемся формулами связи базисных векторных полей:

$$\vec{g}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \vec{e}_i = A_{\cdot j}^i \vec{e}_i. \quad (4)$$

Для базисного векторного поля  $\vec{g}_r$  имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \quad (5)$$

Для базисного векторного поля  $\vec{g}_\varphi$  имеем:



$$\begin{aligned}
\vec{g}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 = \\
&= -r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Так как

$$\|\vec{g}_r\| = \sqrt{\left( \vec{g}_r, \vec{g}_r \right)} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1,$$

то базисное векторное поля  $\vec{g}_r$  нормировано и, следовательно, имеем

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} \equiv \vec{g}_r = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \tag{7}$$

Векторное поле  $\vec{g}_\varphi$  не нормировано, а его норма

$$\|\vec{g}_\varphi\| = \sqrt{\left( \vec{g}_\varphi, \vec{g}_\varphi \right)} = \sqrt{(-r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2} = r. \tag{8}$$

Орт векторного поля  $\vec{g}_\varphi$  равен

$$\begin{aligned}
\vec{g}_{\langle \varphi \rangle} &= \frac{1}{\|\vec{g}_\varphi\|} \vec{g}_\varphi = \frac{1}{r} \left( -r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2 \right) = \\
&= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Формулы (7) и (9) решают поставленную задачу.  $\otimes$

**Пример 5.1.2.** В полярной системе координат закон движения точки задан уравнениями

$$x^1(t) = r(t) \cdot \cos \varphi(t), \quad x^2(t) = r(t) \cdot \sin \varphi(t), \tag{1}$$

где  $t$  – время. Найти скорость и ускорение точки в декартовых и полярных координатах.

Решение. Векторная параметризация движения имеет вид

$$\vec{r} = r \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \quad (2)$$

Вектор скорости

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{d}{dt}(r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 = \\ &= \left( \frac{dr}{dt} \cdot \cos \varphi + r \cdot \frac{d}{d\varphi}(\cos \varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_1 + \\ &+ \left( \frac{dr}{dt} \cdot \sin \varphi + r \cdot \frac{d}{d\varphi}(\sin \varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_2 = \\ &= \left( \frac{dr}{dt} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_1 + \left( \frac{dr}{dt} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Найдём проекции вектора скорости на оси полярной системы координат. Для этого вычислим значения скалярных произведений вектора скорости и ортов полярной системы координат, найденных в предыдущей задаче (формулы (7) и (9)):

$$\begin{aligned} v_r &\equiv \text{Pr}_{\vec{e}_r} \vec{v} = \left( \vec{v}, \vec{g}_{\langle r \rangle} \right) = \\ &= \left( \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left( \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \right) \sin \varphi = \frac{dr}{dt}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v_\varphi &\equiv \text{Pr}_{\vec{e}_\varphi} \vec{v} = \left( \vec{v}, \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} \right) = \\ &= \left( \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \right) (-\sin \varphi) + \left( \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \right) \cos \varphi = \\ &= r \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, вектор скорости в полярной системе координат имеет вид

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{g}_{\langle r \rangle} + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle}. \quad (6)$$

Найдём разложение вектора ускорения по ортам полярной системы координат. Для этого используем формулы (7) и (9) из предыдущей задачи и формулу (6) из этой задачи:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{g}_{\langle r \rangle} + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{g}_{\langle r \rangle}}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{g}_{\langle \varphi \rangle}}{dt};$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle r \rangle}}{dt} = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 + \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2;$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle \varphi \rangle}}{dt} = -\cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 - \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2;$$

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{g}_{\langle r \rangle} + \frac{dr}{dt} \left( -\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 + \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2 \right) + \\ &+ \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + \\ &+ r \frac{d\varphi}{dt} \left( -\cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 - \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2 \right) = \\ &= \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{g}_{\langle r \rangle} + \left( r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{g}_{\langle \varphi \rangle}. \end{aligned}$$

Итак, в полярной системе координат для ускорения получаем следующее выражение:

$$\vec{w} = \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{g}_{\langle r \rangle} + \left( r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{g}_{\langle \varphi \rangle}. \quad \otimes \quad (7)$$

**Пример 5.1.3.** Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$\begin{cases} r = t \cdot \sin 3t, \\ \varphi = t^3. \end{cases} \quad (1)$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени  $t = 1$  с. Радиус дан в метрах.

Решение. 1) Полярные координаты точки в заданный момент времени:

$$r(1) = \sin 3 = 0,141; \varphi(1) = 1.$$

2) Дифференцируя уравнения движения (1) по времени, получаем:

$$\begin{cases} \dot{r} = \sin 3t + 3t \cos 3t, \\ \dot{\varphi} = 3t^2. \end{cases} \quad (2)$$

При  $t = 1$  с имеем:

$$\dot{r}(1) = -2,829, \dot{\varphi}(1) = 3.$$

3) По формулам (4) и (5) предыдущей задачи находим компоненты скорости в полярных координатах:

$$v_r(1) = \dot{r}(1) = -2,829 \frac{M}{c}; v_\varphi(1) = r(1) \cdot \dot{\varphi}(1) = 0,423 \frac{M}{c}.$$

4) Норма скорости:

$$v(1) = \sqrt{v_r^2(1) + v_\varphi^2(1)} = 2,860 \frac{M}{c}.$$

5) Дифференцируя формулы связи полярных и декартовых координат по времени, находим компоненты скорости в декартовых координатах:

$$v^1 = \dot{x}^1 = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi;$$

$$v^2 = \dot{x}^2 = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi.$$

В заданный момент времени имеем:

$$v^1(1) = -1,883 \frac{M}{c}; v^2(1) = -2,148 \frac{M}{c}.$$

Проверка правильности вычислений (норма вектора скорости в декартовых и полярных координатах должна быть одинаковой):

$$v = \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2} = 2,85 \frac{M}{c}.$$

6) Находим вторые производные, дифференцируя (2):

$$\ddot{r} = 6 \cos 3t - 9t \sin 3t; \quad \ddot{\varphi} = 6t.$$

При  $t = 1$  имеем:

$$\ddot{r}(1) = -9,74; \quad \ddot{\varphi}(1) = 6.$$

7) Находим компоненты ускорения в полярных координатах:

$$w_r(1) = \ddot{r}(1) - r(1)\dot{\varphi}^2(1) = -11,01 \frac{M}{c^2};$$

$$w_\varphi(1) = r(1)\ddot{\varphi}(1) + 2\dot{r}(1)\dot{\varphi}(1) = -16,128 \frac{M}{c^2}.$$

8) Норма ускорения

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = 19,52 \frac{M}{c^2}.$$

9) Компоненты ускорения в декартовых координатах находим двукратным дифференцированием формулы (2) по времени:

$$w^1 = \left( \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \right) \cos \varphi - \left( r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \right) \sin \varphi \equiv w_r \cos \varphi - w_\varphi \sin \varphi;$$

$$w^2 = \left( \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \right) \sin \varphi + \left( r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \right) \cos \varphi = w_r \sin \varphi + w_\varphi \cos \varphi.$$

При  $t = 1$  имеем:

$$w^1(1) = 7,602; \quad w^2(1) = -17,95.$$

Проверка:

$$w = \sqrt{(w^1)^2 + (w^2)^2} = 19,49. \quad \otimes$$

**Пример 5.1.4.** Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$r = 22 \cdot \frac{1 - t^2}{t}; \quad \varphi = \arccos\left(\frac{t}{11}\right).$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени  $t = 9 \text{ с}$ . Радиус дан в метрах.

Ответ:

$r$	$\dot{r}$	$\varphi$	$\dot{\varphi}$	$v_r$	$v_\varphi$	$v$	$v^1$	$v^2$
м	м/с	рад	рад/сек			м/с		
0,81	-0,45	0,61	-0,16	-0,45	-0,13	0,47	-0,3	-0,37

**Пример 5.1.5.** Выразить базисные векторные поля цилиндрической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

Решение. Связь декартовых и цилиндрических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \varphi, \\ x^3 = h, \end{cases} \det \left( \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r, \varphi, h)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

где для цилиндрических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \{ \{r; \varphi; h\} \in R_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < h < +\infty \}.$$

Для радиус-вектора имеем

$$\vec{r} = r \cos \varphi \vec{e}_1 + r \sin \varphi \vec{e}_2 + h \vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по цилиндрическим координатам и используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат

$$\vec{g}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \vec{e}_i = \frac{\partial x^1}{\partial q^j} \vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial q^j} \vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial q^j} \vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля  $\vec{g}_r$  имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial r} h \cdot \vec{e}_3 = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2.$$

Так как для векторного поля  $\vec{g}_r$

$$\|\vec{g}_r\| = \sqrt{\left( \vec{g}_r, \vec{g}_r \right)} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1,$$

то базисное векторное поле  $\vec{g}_r$  нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} \equiv \vec{g}_r.$$

Для базисного векторного поля  $\vec{g}_\varphi$  имеем:

$$\begin{aligned} \vec{g}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} h \cdot \vec{e}_3 = \\ &= -r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Так как для векторного поля  $\vec{g}_\varphi$

$$\|\vec{g}_\varphi\| = \sqrt{\left( \vec{g}_\varphi, \vec{g}_\varphi \right)} = \sqrt{(-r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2} = r,$$

то поле  $\vec{g}_\varphi$  ненормированное. Находим орт поля:

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} &= \frac{1}{\|\vec{g}_\varphi\|} \vec{g}_\varphi = \frac{1}{r} \left( -r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2 \right) = \\ &= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Для базисного векторного поля  $\vec{g}_h$  имеем:

$$\begin{aligned}\vec{g}_h &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial h} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial h} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial h} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial h} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial h} = \\ &= \frac{\partial}{\partial h} (r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial h} (r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial h} h \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Таким образом, базисное векторное поле  $\vec{g}_h$  нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle h \rangle} = \vec{e}_3. \otimes$$

**Пример 5.1.6.** Выразить базисные векторные поля сферической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

**Решение.** Связь декартовых и сферических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ x^3 = r \cos \theta, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\det \left( \frac{\partial (x^1, x^2, x^3)}{\partial (r, \varphi, \theta)} \right) &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= -r^2 \sin \theta,\end{aligned}$$

где для сферических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \left\{ \{r, \varphi, \theta\} \in R_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < \theta \leq \pi \right\}.$$

Радиус-вектор имеет вид:

$$\vec{r} = r \sin \theta \cdot \cos \varphi \vec{e}_1 + r \sin \theta \cdot \sin \varphi \vec{e}_2 + r \cos \theta \vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по сферическим координатам и снова используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат.



Для базисного векторного поля  $\vec{g}_r$  имеем:

$$\begin{aligned}\vec{g}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \theta) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 + \cos \theta \cdot \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Норма поля

$$\left\| \vec{g}_r \right\| = \sqrt{(\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + \cos^2 \theta} = 1.$$

Поле нормированное. Следовательно, имеем:

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} \equiv \vec{g}_r = \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 + \cos \theta \cdot \vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля  $\vec{g}_\varphi$  имеем:

$$\begin{aligned}\vec{g}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \theta \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \theta \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cos \theta) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= -r \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Норма поля

$$\left\| \vec{g}_\varphi \right\| = \sqrt{(-r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta \cos \varphi)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta} = r \sin \theta.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle \varphi \rangle} = \frac{1}{\left\| \vec{g}_\varphi \right\|} \vec{g}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \left( -r \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_2 \right) =$$

$$= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.$$

Для базисного векторного поля  $\vec{g}_\theta$  имеем:

$$\begin{aligned} \vec{g}_\theta &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial \theta} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= r \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 - r \sin \theta \cdot \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Норма поля

$$\left\| \vec{g}_\theta \right\| = \sqrt{(r \cos \theta \cos \varphi)^2 + (r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (-r \sin \theta)^2} = r.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\langle \theta \rangle} &= \frac{1}{\left\| \vec{g}_\theta \right\|} \vec{g}_\theta = \frac{1}{r} \left( r \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 - r \sin \theta \cdot \vec{e}_3 \right) = \\ &= \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 - \sin \theta \cdot \vec{e}_3. \otimes \end{aligned}$$

## Практическое занятие 2. Криволинейные интегралы

### Предварительные сведения

Формула вычисления криволинейного интеграла первого рода по параметризованному замкнутому пути  $\widehat{W}(\bar{J})$ ,  $\bar{J} = [\alpha, \beta]$

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^3 w_k(t) \vec{e}_k$$

имеет вид:

$$\int_{W_{\alpha,\beta}} f(\vec{x}(t)) dl \equiv \int_{W_{\alpha,\beta}} f(x_1, x_2, x_3) dl = \int_{W_{\alpha,\beta}} f(\vec{x}(t)) \left\| \frac{d\vec{x}}{dt}(t) \right\| dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \cdot \sqrt{\left[ \frac{dw_1(t)}{dt} \right]^2 + \left[ \frac{dw_2(t)}{dt} \right]^2 + \left[ \frac{dw_3(t)}{dt} \right]^2} dt.$$

В случае естественной параметризации

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad x \in \bar{J}$$

формула принимает вид

$$\int_{L_{a,b}} f(x, y, z) dl = \int_a^b f(x, y(x), z(x)) \cdot \sqrt{1 + \left[ \frac{dy(x)}{dx} \right]^2 + \left[ \frac{dz(x)}{dx} \right]^2} dx,$$

где  $a = x(\alpha)$ ,  $b = x(\beta)$ ,

Формула вычисления криволинейного интеграла второго рода для общего случая параметризации имеет вид:

$$\int_{W_{\alpha,\beta}} F_1(\vec{x}(t)) dx^1 + F_2(\vec{x}(t)) dx^2 + F_3(\vec{x}(t)) dx^3 =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ F_1(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \frac{dw_1(t)}{dt} + F_2(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \frac{dw_2(t)}{dt} + \right.$$

$$\left. + F_3(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \frac{dw_3(t)}{dt} \right] dt.$$

Если путь задан естественной параметризацией

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

то есть параметром является переменная  $x$ , формула переписывается так:

$$I_{W_{a,b}} = \int_{W_{a,b}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz =$$

$$= \int_a^b \left[ P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x)) \frac{dy(x)}{dx} + R(x, y(x), z(x)) \frac{dz(x)}{dx} \right] dx,$$

где

$$a = x(\alpha), \quad b = x(\beta)$$

– пределы изменения переменной  $x$  и учтено, что  $\frac{dx}{dx} = 1$ . Аналогичные формулы можно записать

и в тех случаях, когда в качестве параметра рассматривается переменная  $y$  или  $z$ .

### Примеры с решением

**Пример 6.2.1.** Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_L (x + y) dl$$

по меньшей части окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = x, \end{cases}$$

ограниченной точками  $A(0, 0, R)$ ,  $B\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ .

**Решение.** Параметризация окружности:

$$x = t, y = t, z = \sqrt{R^2 - 2t^2}, 0 \leq t \leq \frac{R}{2},$$

$$\sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}.$$

Используем формулу

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2} dt.$$

Получаем:

$$I = \int_L (x + y) dl = \int_0^{\frac{R}{2}} 2t \frac{\sqrt{2}R dt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = R^2(\sqrt{2} - 1). \otimes$$

**Пример 6.2.2.** Найти массу  $\frac{1}{4}$  окружности

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2,$$

если  $\rho(x_1, x_2) = x_2$  и  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой для случая плоского пути, заданного непрерывно дифференцируемой параметризацией. Параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x_1 = R \cos t, \\ x_2 = R \sin t. \end{cases}$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} M &= \int_W \rho(x_1, x_2) dl = \\ &= \int_0^{\pi/2} R \sin t \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin t dt = R^2. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.2.3.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W (x + y) dx - x dy,$$

где путь  $W$  — отрезок прямой, соединяющий точки  $M_0(0; 0)$  и  $M_1(4; 2)$ .

**Решение.** Используем формулу вычисления криволинейного интеграла второго рода для случая плоского пути:

$$\begin{aligned} I_{W_{a,b}} &= \int_{W_{a,b}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy = \\ &= \int_a^b \left[ P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x)) \frac{dy(x)}{dx} \right] dx. \end{aligned}$$

Здесь

$$\vec{M_0 M_1} = 4 \vec{e}_1 + 2 \vec{e}_2, \quad \vec{M_0 M} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2,$$

$$\vec{M_0 M} = t \cdot \vec{M_0 M_1}, \quad \begin{cases} x = 4t, \\ y = 2t, \end{cases} \quad y = \frac{1}{2}x, \quad x \in [0, 4].$$

Имеем:

$$\int_W (x + y) dx - x dy = \int_0^4 \left( \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x \right) dx = \int_0^4 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8. \otimes$$

**Пример 6.2.4.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_W x^2 y dx + y^2 x dy$$

по пути с параметризацией  $x = t, y = t^3, t \in [0, 1]$ .

Р е ш е н и е. Используем формулу с естественной параметризацией для случая плоского пути:

$$\begin{aligned} & \int_{W_{\alpha, \beta}} F_1(\vec{x}) dx_1 + F_2(\vec{x}) dx_2 = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ F_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_1(t)}{dt} + F_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_2(t)}{dt} \right] dt \end{aligned}$$

Получаем:

$$\int_W x^2 y dx + y^2 x dy = \int_0^1 (t^5 + 3t^9) dt = \left( \frac{t^6}{6} + 3 \frac{t^{10}}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{15}. \otimes$$

**Пример 6.2.5.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\hat{W}} (x_2^2 - x_3^2) dx_1 + 2x_2 x_3 dx_2 - x_1^2 dx_3$$

по замкнутому пути с параметризацией  $x_1 = t$ ,  $x_2 = t^2$ ,  $x_3 = t^3$ , начальной и конечными точками  $M_0(0; 0; 0)$ ,  $M_1(1; 1; 1)$  соответственно.

Р е ш е н и е. Для вычисления применим формулу:

$$\begin{aligned} I_{W_{a, b}} &= \int_{W_{a, b}} F_1(\vec{x}) dx_1 + F_2(\vec{x}) dx_2 + F_3(\vec{x}) dx_3 = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ F_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_1(t)}{dt} + F_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_2(t)}{dt} + \right. \\ & \quad \left. + F_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_3(t)}{dt} \right] dt. \end{aligned}$$

Пределы изменения параметра  $t \in [0, 1]$ , то есть  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ . Подстановка данных задачи даёт:

$$\int_{\hat{W}} (x_2^2 - x_3^2) dx_1 + 2x_2 x_3 dx_2 - x_1^2 dx_3 = \int_0^1 [(t^4 - t^6) + 4t^6 - 3t^4] dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4) dt = \left( \frac{3}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{35}. \otimes$$

**Пример 6.2.6.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_W (x + y) dx + (x - y) dy,$$

где  $W$  – окружность с уравнением  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ .

**Решение.** Запишем параметризацию окружности:

$$\vec{x}(t) = (1 + 2\cos t) \vec{e}_1 + (1 + 2\sin t) \vec{e}_2,$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Интеграл вычисляем, пользуясь формулой

$$\int_W F_1 \left( \vec{x} \right) dx + F_2 \left( \vec{x} \right) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ F_1 \left( \vec{x}(t) \right) \frac{dx(t)}{dt} + F_2 \left( \vec{x}(t) \right) \frac{dy(t)}{dt} \right] dt$$

и тем, что

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\sin t, \quad \frac{dy(t)}{dt} = 2\cos t.$$

Имеем:

$$\oint_W (x + y) dx + (x - y) dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(2 + 2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t) + (2\cos t - 2\sin t)2\cos t] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin t - 8\sin t \cdot \cos t + 4\cos 2t) dt = 0. \otimes$$

### Практическое занятие 3. Кратные интегралы

#### Предварительные сведения

Формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

Пусть

$$P = \{(x; y) \in R^2 : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$$

– замкнутый прямоугольник,  $f : P \rightarrow R^1$  – непрерывная функция двух переменных  $x, y$  и

$$\iint_P f(x, y) d\mu \equiv \iint_P f(x, y) dx dy$$

– двойной интеграл от функции  $f : P \rightarrow R^1$  по прямоугольнику  $P$ . Тогда, если для каждой точки  $x \in [a, b]$  существует определённый интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

то существует и **повторный интеграл** от функции  $f(x, y)$  вида

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \left( \int_c^d f(x, y) dy \right),$$

причём справедливо равенство:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left( \int_c^d f(x, y) dy \right).$$

Таким образом, формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_a^b I(x) dx &= \iint_P f(x, y) dx dy = \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \equiv \int_a^b dx \left( \int_c^d dy f(x, y) \right). \end{aligned}$$

Формула вычисления тройного интеграла в декартовой системе координат через последовательное вычисление трёх (одномерных) определённых интегралов имеет вид:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int_{z=u_1(x, y)}^{z=u_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Формула вычисления двойного интеграла в криволинейной системе координат имеет следующий вид

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_2} f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)) \left| \det \left( \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right) \right| d\xi d\eta,$$

где положено

$$\begin{cases} x = \varphi(\xi, \eta), \\ y = \psi(\xi, \eta), \end{cases} \left| \det \left( \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right) \right| \equiv \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi} & \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \end{pmatrix} \right|.$$

В частности, вычисление двойного интеграла в полярных координатах



$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

производится по формуле

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

где якобиан

$$\det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Формула вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad z = z, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix},$$

где

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty,$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{V'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_{z_1}^{z_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz, \end{aligned}$$

где якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Аналогично, Формула вычисления тройного интеграла в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix},$$

где

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

имеет вид

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{V'} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr = \\
&= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_{r_1}^{r_2} r^2 f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) dr.
\end{aligned}$$

### Примеры с решением

**Пример 6.3.1.** Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$$

**Решение.** Область интегрирования  $D$  ограничена линиями

$$x = -1, x = 1, y = -\sqrt{1-x^2}, y = 1-x^2.$$

Первые две линии – вертикальные прямые линии, третья линия – нижняя полуокружность радиуса 1, четвёртая линия – парабола с вершиной в точке  $(0; 1)$ , ветви параболы направлены вниз. Область  $D$  представим объединением двух областей: области  $D_1$ , ограниченной ветвями параболы  $x = \pm\sqrt{1-y}$  и прямыми линиями  $y = 0, y = 1$ ; области  $D_2$ , ограниченной линиями  $x = \pm\sqrt{1-y^2}, y = -1, y = 0$ . Тогда имеем:

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{+\sqrt{1-y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \otimes$$

**Пример 6.3.2.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D x \ln y dx dy,$$

где  $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq e\}$ .

**Решение.** Так как область  $D$  является прямоугольником, то интеграл вычисляется непосредственно по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D x \ln y \, dx \, dy &= \int_0^4 x \, dx \int_1^e \ln y \, dy = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln y, \quad du = \frac{dy}{y}, \\ dv = dy, \quad v = y. \end{array} \right\} = \\ &= \int_0^4 x \, dx \left\{ y \ln y \Big|_1^e - \int_1^e dy \right\} = \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 \cdot \left\{ y \ln y \Big|_1^e - y \Big|_1^e \right\} = 8 \cdot (e - e + 1) = 8. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.3.3.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (x + 2y) \, dx \, dy$  по области  $D$ , ограничен-

ной линиями  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$ .

**Решение.** Область  $D$  ограничена, соответственно, слева – вертикальной прямой линией  $x = 2$ , справа – вертикальной прямой линией  $x = 3$ , сверху – прямой линией  $y = 2x$ , снизу – прямой линией  $y = x$ . Область простая относительно оси  $OY$ , следовательно, вычисляем интеграл по формуле

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) \, dx \, dy &= \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x + 2y) \, dy = \int_2^3 dx \left( xy + y^2 \right) \Big|_{y=x}^{y=2x} = \\ &= \int_2^3 (2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2) \, dx = 4 \int_2^3 x^2 \, dx = \frac{4}{3} x^3 \Big|_2^3 = \frac{76}{3}. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.3.4.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (2x - y) \, dx \, dy$  по области  $D$ , ограничен-

ной линиями  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = x$ ,  $y = x^2$ .

**Решение.** Пользуясь формулой вычисления двойного интеграла по простой области, получаем:

$$\iint_D (2x - y) \, dx \, dy = \int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x - y) \, dy = \int_1^2 dx \left( 2xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x}^{y=x^2} =$$

$$= \int_1^2 \left( 2x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 \right) dx = \left( \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{10} - \frac{x^3}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{10}. \otimes$$

**Пример 6.3.5.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = 4y - y^2, \quad x + y = 6.$$

**Решение.** Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 4y + x = 0, \\ x + y = 6, \end{cases}$$

находим точки пересечения линий:  $A(4; 2)$ ,  $B(3; 3)$ . Поэтому площадь фигуры равна

$$\begin{aligned} S \equiv \mu(D) &= \iint_D dx dy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 \left( x \Big|_{6-y}^{4y-y^2} \right) dy = \\ &= \int_2^3 (-y^2 + 5y - 6) dy = \left( -\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{6}. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.3.6.** Найти массу пластины  $D$  с поверхностной плотностью

$$\sigma(x, y) = 16x + \frac{9}{2}y^2$$

и ограниченной линиями с уравнениями

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = 0, \quad y^2 = 16x, \quad y \geq 0.$$

**Решение.** Так как

$$x = \frac{1}{16}y^2,$$

то  $x \geq 0$ . Поэтому область  $D$  можно задать неравенствами

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \quad 0 \leq y \leq 4\sqrt{x}.$$

Вычисляя двойной интеграл в декартовых координатах, получаем:

$$m(D) = \iint_D \sigma(x, y) dx dy = \iint_D \left( 16x + \frac{9}{2}y^2 \right) dx dy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_0^{4\sqrt{x}} \left(16x + \frac{9}{2}y^2\right) dy = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(16xy + \frac{3}{2}y^3\right) \Big|_0^{4\sqrt{x}} dx = 160 \int_0^{\frac{1}{4}} x^{3/2} dx = 2. \otimes$$

**Пример 6.3.7.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

переходя к полярным координатам, где область  $D$  – 1-я четверть круга

$$x^2 + y^2 \leq a^2.$$

**Решение.** Так как  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , то область в полярных координатах имеет вид

$$\Omega = \left\{ (r; \varphi) : 0 \leq r \leq a; 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

и, применяя формулу перехода к полярной системе координат, получаем:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{\Omega} \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^2 dr = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} r^3 \Big|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi a^3}{6}. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.3.8.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$ , переходя к полярным

координатам, если область  $D$  – кольцо, заключённое между окружностями  $x^2 + y^2 = e^2$  и  $x^2 + y^2 = e^4$ .

**Решение.** Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{\Omega} \ln r^2 r dr d\varphi = 2 \iint_{\Omega} r \ln r dr d\varphi = \\ &= \left\{ \Omega : 0 \leq \varphi \leq 2\pi; e \leq r \leq e^2 \right\} = \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} r \ln r dr = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln r, \quad du = \frac{dr}{r}, \\ dv = r dr, \quad v = \frac{r^2}{2}. \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{r^2}{2} \ln r \Big|_e^{e^2} - \frac{1}{2} \int_e^{e^2} r dr \right\} = 2 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4} e^2 (3e^2 - 1) \right] d\varphi = \pi e^2 (3e^2 - 1). \otimes$$

**Пример 6.3.9.** Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 4.$$

**Решение.** Тело ограничено кругом на плоскости  $XOY$  с центром в начале системы координат, координатными плоскостями и плоскостью

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1.$$

Поэтому в полярных координатах имеем

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} (4 - r \cos \varphi - r \sin \varphi) r dr = 16 \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} (\cos \varphi + \sin \varphi) \right] d\varphi =$$

$$= 16 \left[ \varphi - \frac{\sqrt{2}}{3} (\sin \varphi - \cos \varphi) \right]_0^{\pi/2} = 8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}. \otimes$$

**Пример 6.3.10.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D x dx dy,$$

где область  $D$  ограничена линиями с уравнениями:

$$y^2 - 4y + x^2 = 0; \quad y^2 - 8y + x^2 = 0; \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} x; \quad x = 0.$$

Р е ш е н и е. Задаём область  $D$  неравенствами в декартовой системе координат, для чего выделяем полные квадраты в уравнениях окружностей:

$$(y-2)^2 + x^2 = 4; (y-4)^2 + x^2 = 16,$$

Центры обеих окружностей имеют координаты  $(0; 2)$  и  $(0; 4)$ , а сами окружности касаются начала системы координат. Первая окружность имеет радиус 2 и лежит, следовательно, внутри второй окружности с радиусом 4. Область  $D$  лежит между окружностями и координаты её точек удовлетворяют неравенствам

$$(y-2)^2 + x^2 \geq 4; (y-4)^2 + x^2 \leq 16.$$

Кроме этого, область  $D$  лежит между указанными прямыми линиями, проходящими через начало системы координат. Так как окружности лежат выше оси  $OX$ , то область  $D$  лежит над прямой линией  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$  и справа от прямой линии  $x = 0$ . Поэтому координаты точек области

$D$  удовлетворяют неравенствам

$$y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, x \geq 0.$$

Таким образом,

$$D = \left\{ \begin{array}{l} (y-2)^2 + x^2 \geq 4, \\ (x; y): (y-4)^2 + x^2 \leq 16, \\ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, x \geq 0. \end{array} \right.$$

Для вычисления используем полярную систему координат:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi.$$

Формула вычисления двойного интеграла принимает вид

$$\iint_D x dx dy = \iint_{\Omega} r \cos \varphi r dr d\varphi.$$

В неравенствах, определяющих область интегрирования, производим замену  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , получаем

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (r \sin \varphi - 2)^2 + r^2 \cos^2 \varphi \geq 4, \\ (r; \varphi): (r \sin \varphi - 4)^2 + r^2 \cos^2 \varphi \leq 16, \\ r \sin \varphi \geq \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{3}}, r \cos \varphi \geq 0. \end{array} \right.$$

Решение этих неравенств относительно  $r$  и  $\varphi$  имеет вид

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (r; \varphi): \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 4 \sin \varphi \leq r \leq 8 \sin \varphi. \end{array} \right.$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$\iint_D x dx dy = \iint_{\Omega} r \cos \varphi r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_{4 \sin \varphi}^{8 \sin \varphi} r^2 dr,$$

Интегрируя последовательно, получаем:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_{4 \sin \varphi}^{8 \sin \varphi} r^2 dr = 35. \otimes$$

**Пример 6.3.11.** Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_V (x - 2y + z) dx dy dz,$$

где область  $V$  – параллелепипед, заданный неравенствами

$$-1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1.$$

**Решение.** Используя формулу (1.50)

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int_{z=u_1(x, y)}^{z=u_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

получаем:

$$I = \iiint_V (x - 2y + z) dx dy dz = \int_{-1}^2 dx \int_1^3 dy \int_0^1 (x - 2y + z) dz = -18. \otimes$$

**Пример 6.3.12.** Вычислить тройной интеграл



$$I = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz,$$

где область  $V$  – пирамида, ограниченная плоскостями

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 2.$$

Решение. Запишем уравнение плоскости

$$z = 2 - x - y,$$

«ограничивающей пирамиду» сверху, в отрезках

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1.$$

Теперь можем изобразить пирамиду (рисунок 3.1).

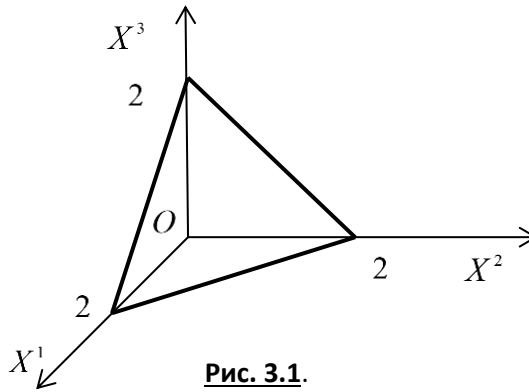


Рис. 3.1.

Применяем для решения формулу

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int_{z=u_1(x,y)}^{z=u_2(x,y)} f(x, y, z) dz,$$

расставляя пределы в соответствии с условиями задачи:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (x + y + z) dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} (x + y + z) dz = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left[ x \cdot z + y \cdot z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x-y} dy = \int_0^2 dx \left[ 2y - x \cdot \frac{y^2}{2} - y \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^{2-x} dx = \\ &= \int_0^2 \left( \frac{8}{3} - 2x + \frac{x^3}{6} \right) dx = \left[ \frac{8}{3}x - x^2 + \frac{x^4}{24} \right]_0^2 = 2. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.3.13.** Найти объём кругового цилиндра высоты  $H$  с радиусом основания  $R$ .

**Решение.** Формула для вычисления тройного интеграла в цилиндрической системе координат имеет вид:

цилиндрических координатах:

$$V_V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_0^H dz = \pi R^2 H. \otimes$$

**Пример 6.3.14.** Найти объём шара радиуса  $R$ .

**Решение.** Для вычисления объёма шара используем формулу вычисления тройного интеграла в сферических координатах. Учитывая, что

$$f(x, y, z) = f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \equiv 1,$$

получаем:

$$V_V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3} \pi R^3. \otimes$$

**Пример 6.3.15.** Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

где область  $V$  ограничена поверхностями

$$z = \frac{9}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (конус),}$$

$$z = \frac{11}{2} - x^2 - y^2 \text{ (эллиптический параболоид).}$$

**Решение.** Область  $V$  – тело вращения вокруг оси  $OZ$ , поэтому переходим к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Для искомого интеграла получаем:

$$\iiint_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint_{\Omega} \cos^2 \varphi r dr d\varphi dz.$$

Задаём область  $\Omega'$  неравенствами, заменяя в уравнениях поверхностей декартовы координаты цилиндрическими координатами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Получаем два двойных неравенства:

$$\frac{9}{2}r \leq z \leq \frac{11}{2} - r^2 \quad \text{и} \quad \frac{11}{2} - r^2 \leq z \leq \frac{9}{2}r.$$

Для выбора верного неравенства решаем уравнение

$$\frac{9}{2}r = \frac{11}{2} - r^2.$$

Единственное положительное решение  $r = 1$ , следовательно,  $0 \leq r \leq 1$ . При этих значениях верное неравенство

$$\frac{9}{2}r \leq z \leq \frac{11}{2} - r^2.$$

Область

$$\Omega = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1, \\ \frac{9}{2}r \leq z \leq \frac{11}{2} - r^2, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Переход к повторному интегралу даёт:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_{\Omega} \cos^2 \varphi r dr d\varphi dz = \\ &= \iiint_{\Omega'} \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} r dr d\varphi dz = \dots = \pi. \quad \otimes \end{aligned}$$

## Практическое занятие 4. Некоторые приложения криволинейных и кратных интегралов

### Предварительные сведения

Электрическое поле линейного непрерывно-распределённого электрического заряда вычисляется по формуле

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right) = \int_W \frac{\gamma\left(\vec{x}\right) \cdot \left(\vec{x}_0 - \vec{x}\right)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \left\|\vec{x}_0 - \vec{x}\right\|^3} dl, \quad (1)$$

→

где  $X_0$  – точка наблюдения, а линейная плотность заряда равна

$$\gamma\left(\vec{x}\right) = \frac{dQ\left(\vec{x}\right)}{dl}.$$

Площадь плоской фигуры в полярной системе координат вычисляется по формуле

$$S = \iint_{D'} r^2(\varphi) dr d\varphi.$$

Формула Грина имеет вид

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y) dx dy = \oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

### Примеры с решением

**Пример 6.4.1.** Найти напряжённость электрического поля однородно заряженной проволоки длиной  $L$ , имеющей форму дуги окружности радиуса  $r$ , в центре окружности, считая линейную плотность заряда постоянной.

**Решение.** Так как  $\gamma\left(\vec{x}\right) = \text{const}$ , то формула (1) принимает вид

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right) = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_W \frac{\left(\vec{x}_0 - \vec{x}\right)}{\left\|\vec{x}_0 - \vec{x}\right\|^3} dl =$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[ \left( \int_W \frac{x_0 - x}{\|x_0 - x\|^3} dl \right) \vec{e}_1 + \left( \int_W \frac{y_0 - y}{\|x_0 - x\|^3} dl \right) \vec{e}_2 \right]. \quad (2)$$

Вспомним параметрические уравнения окружности (рисунок 4.1):

$$\vec{x} = x_0 + r \cos t \cdot \vec{e}_1 + r \sin t \cdot \vec{e}_2 \quad (3)$$

– векторная форма;

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t, \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases} \quad (4)$$

– скалярная форма.

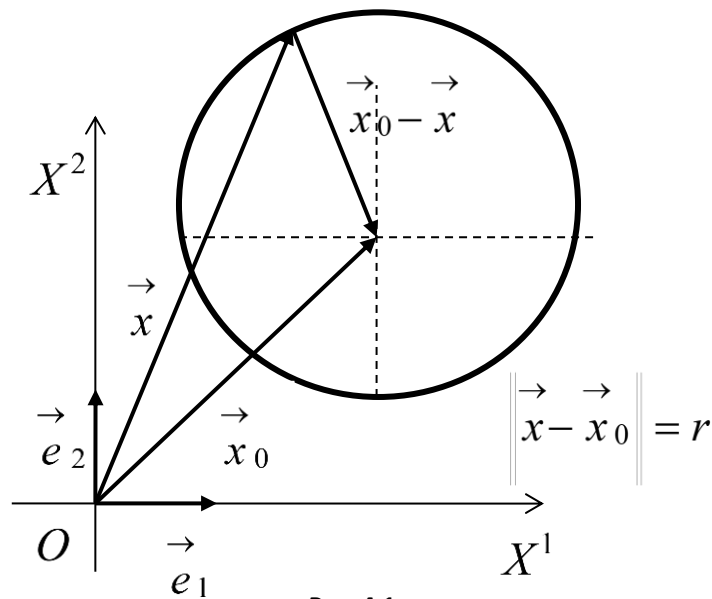


Рис. 4.1.

Чтобы воспользоваться для вычисления интеграла формулой

$$\int_W f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{\left[ \frac{dx}{dt}(t) \right]^2 + \left[ \frac{dy}{dt}(t) \right]^2} dt,$$

нам нужен дифференциал длины дуги кривой  $dl = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt$ . По формуле (3) имеем:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -r \sin t \cdot \vec{e}_1 + r \cos t \cdot \vec{e}_2.$$

Отсюда для нормы вектора скорости получаем

$$\left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| = \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r,$$

откуда имеем

$$dl = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt = r dt.$$

С учётом того, что в рассматриваемом случае точка наблюдения помещена в центр окружности, а точки источника поля находятся в точках самой окружности и очевидного равенства

$$\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\| = \left\| \vec{x}_0 - \vec{x} \right\|,$$

дальнейшие вычисления напряжённости электрического поля в центре окружности проводятся так:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}_0) &= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[ \left( \int_W \frac{\vec{x}_0 - \vec{x}}{\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\|^3} dl \right) \vec{e}_1 + \left( \int_W \frac{y_0 - y}{\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\|^3} dl \right) \vec{e}_2 \right] = \\ &= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[ \left( \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{r \cos t}{r^3} r dt \right) \vec{e}_1 + \left( \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{r \sin t}{r^3} r dt \right) \vec{e}_2 \right] = \\ &= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[ \left( \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\cos t}{r} dt \right) \vec{e}_1 + \left( \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\sin t}{r} dt \right) \vec{e}_2 \right] = \\ &= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \left[ \left( \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos t dt \right) \vec{e}_1 + \left( \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin t dt \right) \vec{e}_2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \left[ \left( \sin t \begin{vmatrix} \alpha/2 \\ -\alpha/2 \end{vmatrix} \right) \vec{e}_1 + \left( -\cos t \begin{vmatrix} \alpha/2 \\ -\alpha/2 \end{vmatrix} \right) \vec{e}_2 \right] = \\
&= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \left[ 2 \sin \frac{\alpha}{2} \vec{e}_1 - \underbrace{\left( \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left( -\frac{\alpha}{2} \right) \right)}_{=0} \vec{e}_2 \right] = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \sin \frac{\alpha}{2} \vec{e}_1.
\end{aligned}$$

Получили следующую формулу для электрического поля, создаваемого в центре окружности линейным равномерным распределением заряда

$$\vec{E} \left( \begin{matrix} \vec{r} \\ x_0 \end{matrix} \right) = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \vec{e}_1. \quad (6)$$

Из формулы (6) легко получаем формулу для нормы напряжённости электрического поля

$$E = \left\| \vec{E} \left( \begin{matrix} \vec{r} \\ x_0 \end{matrix} \right) \right\| = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (7)$$

из которой следует:

$$1) E = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \text{ при } \alpha = \pi;$$

$$2) E = 0 \text{ при } \alpha = 2\pi. \otimes$$

**Пример 6.4.2.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad x = 0.$$

**Решение.** Область ограничена окружностями и прямыми, поэтому решаем задачу в полярных координатах:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

При переходе к полярным координатам область  $D$  перейдёт в область  $D'$ , ограниченную линиями

$$r = 4 \cos \varphi, \quad r = 8 \cos \varphi, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Искомая площадь равна  $S = \iint_{D'} r^2 dr d\varphi$ . В полярных координатах область  $D'$  задаётся неравен-

ствами

$$D' = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 4 \cos \varphi \leq r \leq 8 \cos \varphi. \end{cases}$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$S = \iint_{D'} r^2 dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} r dr.$$

Результат получается интегрированием:

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D'} r^2 dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} r dr = 24 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi = \left\{ \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right\} = \\ &= 12 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 6 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d(2\varphi) = 8\pi - (6 + 3\sqrt{3}). \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.4.3.** Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy, \quad (1)$$

где  $\Gamma$  – окружность с уравнением  $x^2 + y^2 = R^2$ , причём обход окружности осуществляется против часовой стрелки.

**Решение.** Формула Грина имеет вид:

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y) dx dy = \oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Сравнивая с (1), видим, что  $P(x, y) = -x^2 y$ ,  $Q(x, y) = xy^2$ . Поэтому

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y) = x^2 + y^2.$$

Следовательно, получаем

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy.$$



Вычисления проводим в полярных координатах:

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_{\Omega} r^2 r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4} R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}. \quad \otimes$$

**Пример 6.4.4.** Применяя формулу Грина, вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми линиями с уравнениями

$$y = x^2, \quad x = y^2, \quad 8xy = 1,$$

примыкающей к началу системы координат.

**Решение.** Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле:

$$S(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx.$$

Рассмотрим вид фигуры. Первая и вторая кривые линии – это стандартные параболы с осью  $OY$  и  $OX$  соответственно. Решая совместно уравнения кривых линий, найдём точки их пересечения:

$$A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right), \quad B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right).$$

Применим формулу для вычисления площади плоской фигуры:

$$\begin{aligned} S(\Omega) &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{OA} x dy - y dx + \frac{1}{2} \int_{AB} x dy - y dx + \frac{1}{2} \int_{BO} x dy - y dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} x^2 dx - \frac{1}{8} \int_{1/2}^{1/4} \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int_{1/4}^0 \sqrt{x} dx = \frac{1+3\ln 2}{24} \approx 0,13. \quad \otimes \end{aligned}$$

## Практическое занятие 5. Поверхностные интегралы

### Предварительные сведения

Формула вычисления поверхностного интеграла первого рода имеет вид

$$\iint_F f(x^1, x^2, x^3) dS =$$

$$= \iint_{G^{12}} f(x^1, x^2, \varphi(x^1, x^2)) \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x^1, x^2) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x^1, x^2) \right]^2} dx^1 dx^2,$$

где двойной интеграл в правой части формулы вычисляется по проекции  $G^{12}$  поверхности  $F$ , задаваемой уравнением  $x^3 = \varphi(x^1, x^2)$  на координатную плоскость  $X^1 O X^2$ .

Если поверхность  $F$  однозначно проектируется на все три координатные плоскости, то **общий поверхностный интеграл второго рода** является суммой частных интегралов

$$\begin{aligned} \iint_F H_1(x^1, x^2, x^3) dx^2 dx^3 + H_2(x^1, x^2, x^3) dx^3 dx^1 + H_3(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2 & \stackrel{def}{=} \\ = \iint_F H_1(x^1, x^2, x^3) dx^2 dx^3 + \iint_F H_2(x^1, x^2, x^3) dx^3 dx^1 + \\ + \iint_F H_3(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \iint_F H_3(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2 &= \iint_{G^{12}} H_3(x^1, x^2, \varphi^3(x^1, x^2)) dx^1 dx^2, \\ \iint_F H_1(x^1, x^2, x^3) dx^2 dx^3 &= \iint_{G^{23}} H_1(\varphi^1(x^2, x^3), x^2, x^3) dx^2 dx^3, \\ \iint_F H_2(x^1, x^2, x^3) dx^3 dx^1 &= \iint_{G^{13}} H_2(x^1, \varphi^2(x^1, x^3), x^3) dx^1 dx^3 \end{aligned}$$

– двойные интегралы, вычисляемые по однозначным проекциям поверхности на координатные плоскости.

### Примеры с решением

**Пример 6.5.1.** Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_F (x^2 + y^2) dS,$$

где  $F$  – часть конической поверхности, заключённой между плоскостями с уравнениями  $z = 0$  и  $z = 1$ .

**Решение.** Поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \iint_F f(x, y, z) dS &= \\ = \iint_{G^{12}} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

В силу условий задачи выбираем верхнюю часть конической поверхности с уравнением

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy = \\ &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy. \end{aligned}$$

Искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл по формуле (1):

$$\iint_F (x^2 + y^2) dS = \iint_{G^{12}} \sqrt{2} \cdot (x^2 + y^2) dx dy.$$

Так как область  $G^{12}$  – это круг, определённый неравенством  $x^2 + y^2 \leq 1$ , то

$$\iint_F (x^2 + y^2) dS = \iint_{G^{12}} \sqrt{2} \cdot (x^2 + y^2) dx dy = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi. \otimes$$

**Пример 6.5.2.** Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_F (\sqrt{a^2 - x^2} + z) y dS,$$

где  $F$  – поверхность цилиндра

$$x^2 + z^2 = a^2,$$

заклѳчѳнная между плоскостями  $y = b$  и  $y = c$ .

**Решение.** Из уравнения

$$x^2 + z^2 = a^2$$

следует

$$z = \varphi^3(x, y) = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Поверхность  $F$  разбилась на две части:  $F_1$  ( $z \geq 0$ ) и  $F_2$  ( $z \leq 0$ ). Определим элемент поверхности  $dS$  в соответствии с формулой вычисления поверхностного интеграла первого рода:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = 0;$$

$$dS = \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy = \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Подставляя элемент поверхности в формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода

$$\iint_F f(x, y, z) dS = \iint_G f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy,$$

получим:

$$\begin{aligned} \iint_F (\sqrt{a^2 - x^2} + z) y dS &= \\ &= \iint_{F_1} (\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}) y dS + \iint_{F_2} (\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}) y dS = \\ &= \iint_{G_1} 2\sqrt{a^2 - x^2} y \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a \iint_{G_1} y dx dy = \\ &= 2a \int_{-a}^a dx \int_b^c y dy = 2a^2 (c^2 - b^2). \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.5.3.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_F x^2 y^2 z dx dy$$

по верхней стороне верхней половины сферы с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

**Решение.** Проекцией верхней полусферы на координатную плоскость  $XOY$  является круг, ограниченный окружностью

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение верхней полусферы

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Следовательно, искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл так:

$$\iint_F x^2 y^2 z dx dy = \iint_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Вычисления проводим в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \iint_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy &= \iint_{G^{12}} r^5 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi \sqrt{R^2 - r^2} dr d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^R r^5 \sqrt{R^2 - r^2} dr = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{R^2 - r^2} = t; R^2 - r^2 = t^2; \\ r dr = -t dt; r^4 = (R^2 - t^2)^2. \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi \int_0^R (R^2 - t^2)^2 t^2 dt \\ &= \frac{2}{105} \pi R^7. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.5.4.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_F x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

где  $F$  – верхняя сторона части плоскости с уравнением  $x + z - 1 = 0$ , отсечённая плоскостями с уравнениями  $y = 0$ ,  $y = 4$  и лежащая в первом октанте.

**Решение.** Заданная поверхность изображена на рисунке 5.1. Для вычисления интеграла используем формулу вычисления общего поверхностного интеграла второго рода:

$$\begin{aligned} \iint_F P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy &= \\ &= \iint_{G_{23}} P(\varphi(y, z), y, z) dy dz + \iint_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z) dx dz + \\ &+ \iint_{G_{12}} R(x, y, \omega(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

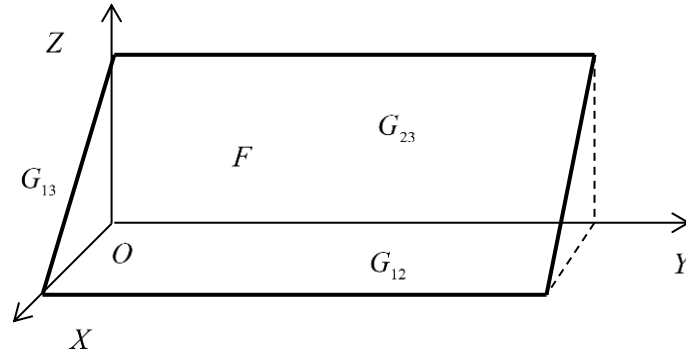


Рис. 5.1.

Так как плоскость параллельна оси  $OY$ , то

$$\iint_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z) dx dz = 0.$$

Получаем:

$$\iint_F x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iint_{G_{23}} (1-z) dy dz + \iint_{G_{12}} (1-x) dx dy = 4. \otimes$$

## Практическое занятие 6. Векторный анализ

### Предварительные сведения

В декартовой системе координат градиент скалярного поля  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$  вычисляется по формуле

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \vec{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \vec{e}_3.$$

Производная скалярного поля  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$  в точке  $N_0$  по направлению, заданному век-

тором  $\vec{N}_0 N$ , имеющим орт

$$\vec{h} = \frac{1}{\|\vec{N}_0 N\|} \vec{N}_0 N$$

по определению равна

$$\frac{\partial f}{\partial h} \left( \vec{x}_0 \right) \stackrel{def}{=} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f \left( \vec{x}_0 + t \vec{h} \right) - f \left( \vec{x}_0 \right)}{t}$$

и вычисляется по одной из следующих формул

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{h}} \left( \vec{x} \right) = \left( \vec{\nabla} \varphi \left( \vec{x} \right), \vec{h} \right) = \frac{\left( \vec{\nabla} \varphi \left( \vec{x} \right), N_0 N \right)}{\|N_0 N\|} = \text{Pr}_{\vec{h}} \left\{ \vec{\nabla} \varphi \left( \vec{x} \right) \right\}.$$

Дивергенция векторного поля  $\vec{A} \left( \vec{x} \right)$  в некоторой точке  $\vec{x}$  в декартовой системе координат

вычисляется по формуле:

$$\text{div} \vec{A} \left( \vec{x} \right) = \left( \vec{\nabla}, \vec{A} \left( \vec{x} \right) \right).$$

Формула для нахождения ротора векторного поля в декартовой системе координат имеет вид:

$$\text{rot} \vec{A} = \left[ \vec{\nabla}, \vec{A} \left( \vec{x} \right) \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

**Потоком**  $\Phi$  векторного поля  $\vec{A} \left( \vec{x} \right)$  через поверхность  $F$  называется поверхностный интеграл

второго рода

$$\begin{aligned} \Phi & \stackrel{\text{def}}{=} \iint_F \left( \vec{A}, d\vec{s} \right) = \iint_F \left( \vec{A} \left( \vec{x} \right), \vec{n} \right) dS = \\ & = \iint_F \left( A_1 \left( \vec{x} \right) \cos \theta_1 + A_2 \left( \vec{x} \right) \cos \theta_2 + A_3 \left( \vec{x} \right) \cos \theta_3 \right) dS = \\ & = \iint_F A_1 \left( \vec{x} \right) \cos \theta_1 dS + \iint_F A_2 \left( \vec{x} \right) \cos \theta_2 dS + \iint_F A_3 \left( \vec{x} \right) \cos \theta_3 dS = \\ & = \iint_{G^{23}} A_1 \left( \omega \left( x^2, x^3 \right), x^2, x^3 \right) dx^2 dx^3 + \iint_{G^{13}} A_2 \left( x^1, \psi \left( x^1, x^3 \right), x^3 \right) dx^1 dx^3 + \\ & + \iint_{G^{12}} A_3 \left( x^1, x^2, \varphi \left( x^1, x^2 \right) \right) dx^1 dx^2, \end{aligned}$$

где

$$d\vec{s} = \left\| d\vec{s} \right\| \frac{d\vec{s}}{\left\| d\vec{s} \right\|} = ds \vec{n}.$$

**Теорема Остроградского-Гаусса.** Поток векторного поля через замкнутую поверхность (в направлении внешней нормали) равен тройному интегралу от дивергенции поля, взятому по области, ограниченной этой поверхностью:

$$\oiint_F \left( \vec{A}(\vec{x}), d\vec{s} \right) = \iiint_V \left( \vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{x}) \right) dV.$$

**Циркуляцией** векторного поля  $\vec{A}(\vec{x})$  по замкнутому контуру  $\Gamma$  называется криволинейный интеграл второго рода

$$C_A \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\Gamma} \left( \vec{A}, d\vec{l} \right) = \oint_{\Gamma} A_t dl.$$

**Теорема Стокса.** Циркуляция векторного поля  $\vec{A}(\vec{x})$  по замкнутому контуру  $\Gamma$  равна

потоку векторного поля

$$\text{rot } \vec{A}(\vec{x}) = \left[ \vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{x}) \right]$$

через поверхность, ограниченную контуром  $\Gamma$ :

$$\oint_{\Gamma} \left( \vec{A}(\vec{x}), d\vec{l} \right) = \iint_S \left( \left[ \vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{x}) \right], d\vec{s} \right) \equiv \iint_S \left( \text{rot } \vec{A}(\vec{x}), \vec{n} \right) ds.$$

Приведём краткую сводку наиболее часто используемых формул векторного анализа:

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \cdot \text{grad}\psi + \psi \cdot \text{grad}\varphi;$$

$$\text{div}(\psi \vec{A}) = \psi \cdot \text{div}\vec{A} + \left( \vec{A}, \text{grad}\psi \right);$$

$$\text{div} \left[ \vec{A}, \vec{B} \right] = \left( \vec{B}, \text{rot } \vec{A} \right) - \left( \vec{A}, \text{rot } \vec{B} \right);$$

$$\text{rot}(\psi \vec{A}) = \psi \cdot \text{rot } \vec{A} + \left[ \text{grad}\psi, \vec{A} \right];$$

$$\text{grad}f(\xi) = f'(\xi) \cdot \text{grad}\xi;$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A};$$



$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi \equiv \left( \vec{\nabla}, \vec{\nabla} \psi \right) = \left( \vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right) \psi = \vec{\nabla}^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^3)^2}.$$

В декартовых координатах справедлива также формула

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = e_1 \vec{\nabla}^2 A^1 + e_2 \vec{\nabla}^2 A^2 + e_3 \vec{\nabla}^2 A^3.$$

### Примеры с решением

**Пример 6.6.1.** Найти градиент сферически-симметричного скалярного поля

$$u = \varphi(r),$$

где  $r = \left\| \vec{r} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**Решение.** По определению градиента имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi(r) &= \frac{\partial}{\partial x} \varphi(r) \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(r) \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \varphi(r) \vec{e}_3 = \\ &= \frac{d\varphi}{dr} \frac{x}{r} \vec{e}_1 + \frac{d\varphi}{dr} \frac{y}{r} \vec{e}_2 + \frac{d\varphi}{dr} \frac{z}{r} \vec{e}_3 = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \otimes \end{aligned}$$

Отметим, что векторное поле, определяемое соотношением  $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$ , называется *по-*

*тенциальным полем*, а скалярная функция  $\varphi$  называется *потенциалом* векторного поля  $\vec{a}$ . Само

векторное поле  $\vec{a} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$  называется *потенциальным* полем. Иногда потенциальное поле

определяют соотношением  $\vec{a} = -\operatorname{grad} \varphi$ .

**Пример 6.6.2.** Найти дивергенцию сферически-симметричного векторного поля

$$\vec{a} = \varphi(r) \vec{r}.$$

**Решение.** По определению дивергенции имеем:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \left( \vec{\nabla}, \varphi(r) \vec{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(r)x] + \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(r)y] + \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(r)z] =$$

$$= \frac{d\varphi}{dr} \frac{x^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr} \frac{y^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr} \frac{z^2}{r} + \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} \cdot r + 3\varphi(r). \quad \otimes$$

Векторное поле называется *соленоидальным*, если выполнено условие  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ .  $\otimes$

**Пример 6.6.3.** Найти условие соленоидальности векторного поля из предыдущего примера.

**Решение.** Условие соленоидальности  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$  для поля  $\vec{a} = \varphi(r) \vec{r}$  приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi}{dr} \cdot r + 3\varphi(r) = 0$$

С разделяющимися переменными. Разделя переменные и учитывая, что в случае функций одного

переменного производная  $\frac{d\varphi}{dr}$  – это отношение двух дифференциалов, получаем:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -3 \frac{dr}{r}. \quad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), получаем  $\ln|\varphi| = -3\ln r + C_1$ . Записывая произвольную постоянную в логарифмическом виде  $C_1 = \ln C$ , где  $C$  – произвольная положительная постоянная, по-

лучаем  $\varphi = \frac{C}{r^3}$ . Здесь  $C$  уже произвольная (не обязательно положительная) постоянная.  $\otimes$

**Пример 6.6.4.** Найти ротор сферически-симметричного векторного поля

$$\vec{a} = \varphi(r) \vec{r},$$

$$\text{где } r = \left\| \vec{r} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**Решение.** Записывая векторное поле в разложении по декартовому базису

$$\vec{a} = \varphi(r) \vec{r} = \varphi(r)x \vec{e}_1 + \varphi(r)y \vec{e}_2 + \varphi(r)z \vec{e}_3,$$

и используя определение ротора, получаем:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{a} &= \left[ \vec{\nabla}, \vec{a} \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi(r)x & \varphi(r)y & \varphi(r)z \end{vmatrix} = \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(r)z] - \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(r)y] \right\} \vec{e}_1 + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(r)x] - \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(r)z] \right\} \vec{e}_2 \\
&+ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(r)y] - \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(r)x] \right\} \vec{e}_3 = \frac{d\varphi(r)}{dr} \left( \frac{yz}{r} - \frac{zy}{r} \right) \vec{e}_1 + \\
&+ \frac{d\varphi(r)}{dr} \left( \frac{zx}{r} - \frac{xz}{r} \right) \vec{e}_2 + \frac{d\varphi(r)}{dr} \left( \frac{xy}{r} - \frac{yx}{r} \right) \vec{e}_3 = \vec{0}. \otimes
\end{aligned}$$

Векторное поле, для которого выполнено соотношение  $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$ , называется *безвихревым* полем. Из предыдущей задачи следует, что сферически-симметричное векторное поле является безвихревым полем.

**Пример 6.6.5.** Доказать, что

$$\operatorname{div} \left[ \vec{A}, \vec{B} \right] = \left( \vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A} \right) - \left( \vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B} \right). \quad (1)$$

**Решение.** Для решения применим правило действия оператора  $\vec{\nabla}$  на произведение функций

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(\varphi \cdot \omega \cdot \dots \cdot \psi) &= \\
&= \vec{\nabla} \left( \overset{\vee}{\varphi} \cdot \omega \cdot \dots \cdot \psi \right) + \vec{\nabla} \left( \varphi \cdot \overset{\vee}{\omega} \cdot \dots \cdot \psi \right) + \dots + \vec{\nabla} \left( \varphi \cdot \omega \cdot \dots \cdot \overset{\vee}{\psi} \right), \quad (2)
\end{aligned}$$

где символ  $\vee$  над функцией устанавливает порядок действия оператора  $\vec{\nabla}$  на соответствующую функцию. Для скалярных полей имеется в виду просто произведение функций, для векторных полей произведение может быть как скалярным, так и векторным.

Учитывая, что

$$\operatorname{div} \left[ \vec{A}, \vec{B} \right] = \left( \vec{\nabla}, \left[ \vec{A}, \vec{B} \right] \right),$$

в левой части (1) получаем:

$$\operatorname{div} \left[ \vec{A}, \vec{B} \right] = \left( \vec{\nabla}, \left[ \vec{A}, \vec{B} \right] \right) = \left( \vec{\nabla}, \left[ \overset{\vee}{\vec{A}}, \vec{B} \right] \right) + \left( \vec{\nabla}, \left[ \vec{A}, \overset{\vee}{\vec{B}} \right] \right),$$

Первое смешанное произведение в правой части последнего равенства преобразуется к виду:

$$\left( \vec{\nabla}, \left[ \overset{\vee}{\vec{A}}, \vec{B} \right] \right) = \left( \left[ \vec{\nabla}, \vec{A} \right], \vec{B} \right) = \left( \vec{B}, \left[ \vec{\nabla}, \vec{A} \right] \right) = \left( \vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A} \right). \quad (3)$$

Аналогично, второе смешанное произведение в правой части того же равенства преобразуется к виду

$$\left( \vec{\nabla}, \left[ \vec{A}, \overset{\vee}{\vec{B}} \right] \right) = - \left( \vec{\nabla}, \left[ \overset{\vee}{\vec{B}}, \vec{A} \right] \right) = - \left( \vec{A}, \left[ \vec{\nabla}, \overset{\vee}{\vec{B}} \right] \right) = - \left( \vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B} \right). \quad (4)$$

Складывая (3) и (4), получаем (1).  $\otimes$

**Пример 6.6.6.** Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot} \left( u \cdot \vec{A} \right) = \left[ \vec{\operatorname{grad}} u, \vec{A} \right] + u \cdot \operatorname{rot} \vec{A},$$

где  $u(M)$  – скалярное, а  $\vec{A}(M)$  – векторное поля.

**Решение.** Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left( u \cdot \vec{A} \right) &= \left[ \vec{\nabla}, u \cdot \vec{A} \right] = \left[ \vec{\nabla}, \overset{\vee}{u \cdot \vec{A}} \right] + \left[ \vec{\nabla}, u \cdot \overset{\vee}{\vec{A}} \right] = \\ &= \left[ \vec{\nabla} u, \vec{A} \right] + u \cdot \left[ \vec{\nabla}, \vec{A} \right] = \left[ \vec{\operatorname{grad}} u, \vec{A} \right] + u \cdot \operatorname{rot} \vec{A}. \quad \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.6.7.** Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A},$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа  $\Delta = \left( \vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right)$ .

**Решение.** Для доказательства используем формулу для двойного векторного произведения

$$\left[ \vec{A}, \left[ \vec{B}, \vec{C} \right] \right] = \vec{B} \left( \vec{A}, \vec{C} \right) - \vec{C} \left( \vec{A}, \vec{B} \right),$$

полагая  $\vec{A} = \vec{B} = \vec{\nabla}$ , получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \left[ \vec{\nabla}, \left[ \vec{\nabla}, \vec{A} \right] \right] = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla}, \vec{A} \right) - \left( \vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right) \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}. \otimes$$

**Пример 6.6.8.** Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A} = x^3 \vec{e}_1 - y^2 \vec{e}_2 + y \vec{e}_3$$

по замкнутому контуру ( $t \in [0, 2\pi]$ ), заданному уравнениями

$$x = \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = \cos t - \sin t.$$

**Решение.** По определению циркуляция равна криволинейному интегралу второго рода

$$C = \oint_{\Gamma} \left( \vec{A}, d\vec{x} \right) = \oint_{\Gamma} x^3 dx - y^2 dy + y dz.$$

Криволинейный интеграл вычисляем, сводя его к определённом интегралу:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} x^3 dx - y^2 dy + y dz = \\ & = \int_0^{2\pi} \left( -\cos^3 t \sin t - 27 \sin^2 t \cos t - 3 \sin^2 t - 3 \sin t \cos t \right) dt = \\ & = - \int_0^{2\pi} \cos^3 t \sin t dt - 27 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt - 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - 3 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = \\ & = \int_0^{2\pi} \cos^3 t d(\cos t) - 27 \int_0^{2\pi} \sin^2 t d(\sin t) - \end{aligned}$$

$$-\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) d(2t) - 3 \int_0^{2\pi} \sin t d(\sin t) = -3\pi. \otimes$$

**Пример 6.6.9.** Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = -\omega x_2 \vec{e}_1 + \omega x_1 \vec{e}_2$$

по простому замкнутому контуру, представляющему собой окружность с центром в начале системы координат и радиусом  $R$ , в положительном направлении.

**Решение.** Параметризация окружности

$$x_1 = R \cos t, \quad x_2 = R \sin t,$$

где  $t \in [0, 2\pi]$ . Поэтому по определению циркуляции получаем:

$$\begin{aligned} C &= \oint_{\Gamma} \left( \vec{F}, d\vec{x} \right) = \oint_{\Gamma} -\omega x_2 dx_1 + \omega x_1 dx_2 = \\ &= \omega \int_0^{2\pi} (R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t) dt = 2\pi R^2 \omega. \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.6.10.** Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = (x_1 + 3x_2 + 2x_3) \vec{e}_1 + (2x_1 + x_3) \vec{e}_2 + (x_1 - x_2) \vec{e}_3$$

по контуру треугольника  $ABC$ , если  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; 1)$ .

**Решение.** Для решения применим формулу Стокса, согласно которой

$$C = \oint_{\Gamma} \left( \vec{F}, d\vec{x} \right) = \iint_S \left( \vec{n}, \operatorname{rot} \vec{F} \right) ds.$$

Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник, имеет вид

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{1} = 1,$$

или

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6.$$

Находим ротор векторного поля:

$$\begin{aligned}
 \vec{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & 2x_1 + x_3 & x_1 - x_2 \end{vmatrix} = \\
 &= \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 - x_2) - \frac{\partial}{\partial x_3} (2x_1 + x_3) \right] \vec{e}_1 - \\
 &- \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 - x_2) - \frac{\partial}{\partial x_3} (x_1 + 3x_2 + 2x_3) \right] \vec{e}_2 + \\
 &- \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (2x_1 + x_3) - \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 + 3x_2 + 2x_3) \right] \vec{e}_3 = -2 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3.
 \end{aligned}$$

Теперь циркуляция

$$\begin{aligned}
 C &= \oint_{\Gamma} (\vec{F}, d\vec{x}) = \iint_S (\vec{n}, \vec{rot} \vec{F}) ds = \\
 &= -2 \iint_{G^{23}} dx_2 dx_3 + \iint_{G^{13}} dx_3 dx_1 - \iint_{G^{12}} dx_1 dx_2 = \\
 &= -2 \int_0^3 dx_2 \int_0^{1-x_2/3} dx_3 + \int_0^1 dx_3 \int_0^{2-x_3} dx_1 - \int_0^2 dx_1 \int_0^{3-3x_1/2} dx_2 = \\
 &= -2 \left[ x_2 - \frac{1}{6} x_2^2 \right]_0^3 + \left[ 2x_3 - x_3^2 \right]_0^1 - \left[ 3x_1 - \frac{3}{4} x_1^2 \right]_0^2 = -5. \otimes
 \end{aligned}$$

**Пример 6.6.11.** Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = x_2 \vec{e}_1 - x_1 \vec{e}_2 + a \vec{e}_3 \quad (a = const)$$

вдоль окружности с уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 0$$

в положительном направлении двумя способами.

**Решение.** 1) Вычислим циркуляцию непосредственно, учитывая, что параметризация окружности имеет вид ( $R = 1$ ):

$$x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} C &= \oint_{\Gamma} \left( \vec{F}, d\vec{x} \right) = \oint_{\Gamma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 = \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t) - \cos t \cos t] dt = - \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -2\pi. \end{aligned}$$

2) Вычислим циркуляцию по формуле Стокса. Сначала найдём ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2 & -x_1 & a \end{vmatrix} = -2 \vec{e}_3.$$

Нормаль плоскости треугольника  $\vec{n} = \vec{e}_3$ . Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} C &= \oint_{\Gamma} \left( \vec{F}, d\vec{x} \right) = \iint_S \left( \vec{n}, \operatorname{rot} \vec{F} \right) ds = -2 \iint_S \left( \vec{n}, \vec{e}_3 \right) ds = -2 \iint_S dx_1 dx_2 = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr = -2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = -2\pi. \quad \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.6.12.** Найти поток радиус-вектора

$$\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

через произвольную гладкую замкнутую поверхность  $F$ , ограничивающую область  $\Omega$ , имеющую объём  $V$ .

**Решение.** Находим дивергенцию поля радиус-вектора:

$$\operatorname{div} \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса (10.10.13):

$$\oiint_F \left( \vec{r}, d\vec{s} \right) = \iiint_V \left( \vec{\nabla}, \vec{r} \right) dV = 3 \iiint_V dV = 3V.$$



Из полученной формулы следует формула для вычисления объема области  $\Omega$  при помощи поверхностных интегралов

$$V = \frac{1}{3} \iint_F \left( \vec{r}, \vec{n} \right) ds,$$

которая в декартовых координатах принимает вид

$$V = \frac{1}{3} \iint_F (xn_1 + yn_2 + zn_3) ds = \frac{1}{3} \iint_F (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds,$$

где  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  – координаты орта нормали  $\vec{n}$ .  $\otimes$

**Пример 6.6.13.** Найти поток векторного поля радиус-вектора

$$\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

Через поверхность с уравнением

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0 \quad (0 \leq z \leq 1).$$

**Решение.** Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\Phi = \iint_S \left( \vec{F}, \vec{n} \right) ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dv.$$

Так как

$$\operatorname{div} \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

а поверхность – это конус с вершиной в точке  $(0; 0; 1)$ , ограниченный плоскостями с уравнениями

$z = 0$  и  $z = 1$ , то переходя к цилиндрическим координатам, получаем:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \left( \vec{r}, \vec{n} \right) ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{r} dv = 3 \iiint_V dv = 3 \iiint_{\Omega} r d\varphi dr dz = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r} dz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(1-r) dr = 3 \cdot 2\pi \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \pi. \quad \otimes \end{aligned}$$

**Пример 6.6.14.** Найти поток поля

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q \vec{r}}{r^2 r}$$

точечного источника электрического поля через сферу с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Р е ш е н и е. Поток векторного поля через поверхность вычисляется по формуле

$$\Phi = \iint_S \left( \vec{F}, d\vec{s} \right) = \iint_S \left( \vec{F}, \vec{n} \right) ds = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \iint_S \frac{1}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) ds.$$

Так как  $r = R = \text{const}$  и скалярное произведение ортов

$$\left( \frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) = 1,$$

получаем:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \iint_S \frac{1}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) ds = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} \iint_S ds = \frac{q4\pi R^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} = \frac{4\pi q}{4\pi\epsilon\epsilon_0}. \otimes$$

## Практическое занятие 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

### Предварительные сведения

Простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Его общее решение находится по определению первообразной:

$$y(x) = \int f(x) dx + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная величина.

Уравнение с разделёнными переменными имеют вид

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0.$$

Общее решение этого уравнения находится по формуле

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C.$$

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$P(x)T(y)dx + Q(x)S(y)dy = 0.$$

После разделения переменных получаем уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{P(x)}{Q(x)} dx + \frac{S(y)}{T(y)} dy = 0,$$

решая которое, получаем общее решение в виде

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int \frac{S(y)}{T(y)} dy = C.$$

Линейное неоднородное ОДУ первого порядка в приведённой форме записи имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x).$$

Ему соответствует однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

Однородное уравнение решается путём разделения переменных, а неоднородное методом вариации произвольной постоянной. Формула для общего решения неоднородного уравнения имеет вид

$$z(x) = \left( \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + A \right) \cdot e^{-\int p(x) dx}.$$

Простейшее ОДУ высшего порядка имеет вид:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Его общее решение находится путём последовательного интегрирования и имеет вид:

$$y(x) = \underbrace{\int \int \dots \int f(x) dx dx \dots dx}_{n \text{ раз}} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + C_3 + \dots \\ + C_{n-2} \frac{x^2}{2!} + C_{n-1} x + C_n.$$

Линейное ОДУ высшего порядка, соответственно, неоднородное и однородно, имеет вид:

$$p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = g(x),$$

$$p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = 0.$$

**Задача Коши** для уравнения (неоднородного, или однородного) ставится так: **найти решение соответствующего уравнения, удовлетворяющее начальным условиям**

$$y|_{x=x_0} = y_0, \frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = y_0^1, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}|_{x=x_0} = y_0^{n-1}.$$

Линейное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = f(x).$$

Находя линейно независимую систему решений соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0,$$

– **фундаментальную систему решений** (ФСР)  $\{y_1, y_2\}$ , можем составить общее решение однородного уравнения в виде линейной комбинации найденных частных решений.

При подстановке в однородное уравнение функции  $e^{kx}$  приходим к характеристическому уравнению

$$k^2 + p_1 k + p_2 = 0.$$

В зависимости от того, какие решения будут у характеристического уравнения, приходим к следующим трём случаям построения общего решения однородного дифференциального уравнения.

1) Корни характеристического уравнения простые и вещественные, то есть  $k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}^1$ .

Тогда ФСР есть  $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}\}$  и общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2) Корень  $k$  вещественный, кратности 2. Тогда ФСР есть  $\{e^{kx}, xe^{kx}\}$  и общее решение

имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = e^{kx} (C_1 + xC_2).$$

3) Корни комплексно-сопряжённые  $k_1 = \alpha + \beta i$ ,  $k_2 = \alpha - \beta i$ . Тогда ФСР есть

$\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$  и общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Для решения неоднородного уравнения применяется **метод Лагранжа**. Решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$z(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

Составляется СЛАУ следующего вида

$$\begin{cases} y_1(x) \frac{dC_1(x)}{dx} + y_2(x) \frac{dC_2(x)}{dx} = 0, \\ \frac{dy_1(x)}{dx} \frac{dC_1(x)}{dx} + \frac{dy_2(x)}{dx} \frac{dC_2(x)}{dx} = f(x). \end{cases}$$

Здесь  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  – новые функции, подлежащие определению, а  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  – элементы ФСР соответствующего однородного уравнения. Решение СЛАУ относительно производных новых функций ищется любым методом. В общем виде это решение записывается так

$$\begin{cases} \frac{dC_1(x)}{dx} = \varphi(x), \\ \frac{dC_2(x)}{dx} = \psi(x). \end{cases}$$

Интегрируя эти независимые простейшие ОДУ, и подставляя результаты в общий вид решения неоднородного уравнения, получаем общее решение в форме

$$z(x) = A_1 y_1(x) + A_2(x) y_2(x) + y_1(x) \int \varphi(x) dx + y_2(x) \int \psi(x) dx.$$

### Примеры с решением

**Пример 6.7.1.** Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx.$$

Решение. 1) Перепишем данное уравнение в виде

$$2y(x^2 + 3) dy = 3x(2 + y^2) dx.$$

2) Замечаем, что  $x^2 + 3 > 0$ ,  $2 + y^2 > 0$ . Поэтому можно разделить переменные, деля обе части уравнения на  $(x^2 + 3)(2 + y^2)$ :

$$\frac{2y}{2 + y^2} dy = \frac{3x}{x^2 + 3} dx.$$

3) Используем формулу для нахождения решения:

$$\int \frac{2y}{2 + y^2} dy + C_1 = \int \frac{3x}{x^2 + 3} dx + C_2;$$

$$\ln(2 + y^2) = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 3) + C;$$

$$C = C_2 - C_1.$$

4) Преобразуем полученный интеграл:

$$2 \ln(2 + y^2) - 3 \ln(x^2 + 3) = C;$$

$$\ln \frac{(2 + y^2)^2}{(x^2 + 3)^3} = C.$$

**Ответ:** Интегральные кривые определяются уравнением

$$\ln \frac{(2 + y^2)^2}{(x^2 + 3)^3} = C$$

при всевозможных значениях параметра  $C$ .  $\otimes$

**Пример 6.7.2.** Найти частное решение уравнения

$$(1 + y^2)dx = xydy,$$

если  $y = 1$  при  $x = 2$ .

**Решение.** 1) Разделяем переменные:

$$\frac{y}{1 + y^2} dy = \frac{dx}{x}.$$

2) Интегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{y}{1 + y^2} dy = \int \frac{dx}{x} + \ln C;$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = \ln|x| + \ln C;$$

$$(1 + y^2) = Cx^2.$$

Так как  $C$  – произвольная постоянная, то имеем

$$y^2 = Cx^2 - 1$$

3) Используем начальные условия:

$$4 = 2C; C = 2; x^2 = 2(1 + y^2).$$

4) Частный интеграл:

$$y = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}.$$

**Ответ:**  $y = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}$ .  $\otimes$

**Пример 6.7.3.** Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Решение. Это уравнение с однородной правой частью.

1) Разделим числитель и знаменатель на  $x^2$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2\frac{y}{x} - 5\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 - 6\frac{y}{x}}.$$

2) Совершаем подстановку

$$u(x) = \frac{y}{x},$$

где  $u(x)$  — новая искомая функция. Так как

$$y' = u + xu',$$

получаем новый вид уравнения:

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1 + 2u - 5u^2}{2 - 6u}.$$

После простых преобразований получаем

$$\frac{du}{dx} x = \frac{1 + u^2}{2 - 6u}.$$

3) Разделяем переменные, предполагая, что  $1 + u^2 \neq 0$ ,  $x \neq 0$ :

$$\frac{2 - 6u}{1 + u^2} du = \frac{dx}{x}.$$

4) Интегрируем:

$$2 \arctgu - 3 \ln(1 + u^2) = \ln|x| + C.$$

Заменяя  $u(x) = \frac{y}{x}$ , получаем:

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 3\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \ln|x| = C.$$

**Ответ:** Интегральные кривые определяются уравнением

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 3\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \ln|x| = C. \otimes$$

**Пример 6.7.4.** Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}.$$

**Решение.** Здесь  $p(x) = 3$ ,  $f(x) = e^{2x}$ .

1) Сначала решаем однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -3y,$$

соответствующее данному неоднородному уравнению:

$$\frac{dy}{dx} = -3y;$$

$$\frac{dy}{y} = -3dx;$$

$$\ln|y| = -3x + \ln C_1;$$

$$|y| = C_1 e^{-3x};$$

$$y = C_2 e^{-3x}.$$

2) Ищем решение исходного уравнения в виде  $z = C_2(x)e^{-3x}$ . Подстановка в исходное уравнение даёт:

$$\frac{dC_2(x)}{dx} = e^{5x};$$

$$C_2(x) = \int e^{5x} dx + C;$$



$$C_2(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

3) Подставляем в решение:

$$z = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}.$$

**Ответ:** общее решение имеет вид

$$z = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}. \otimes$$

**Пример 6.7.5.** Найти решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x^2}$$

с начальным условием  $y(1) = 1$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left( \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C \right),$$

следующей из метода вариации произвольной постоянной.

1) Находим общее решение:

$$z = e^{-\int p(x)dx} \left( \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C \right) = e^{\int \frac{dx}{x}} \left( -2 \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} \right) = \frac{1}{x} + Cx.$$

2) Используем начальное условие

$$\frac{1}{1^2} + C = 1,$$

откуда  $C = 0$ . Решение задачи Коши принимает вид:

$$z = \frac{1}{x}.$$

**Ответ:**  $y = \frac{1}{x}. \otimes$

**Пример 6.7.6.** Найти частное решение ОДУ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = xe^x,$$

удовлетворяющее начальным условиям  $y|_{x=0} = 1, \frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$ .

**Решение.** Интегрируем уравнение последовательно:

$$1) \frac{dy}{dx} = \int xe^x dx + C_1 = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x. \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx + C_1 = \\ = (x-1)e^x + C_1;$$

$$2) y = \int (x-1)e^x dx + C_1 x + C_2 = \left\{ \begin{array}{l} u = x-1, \quad du = dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x. \end{array} \right\} = \\ = (x-2)e^x + C_1 x + C_2.$$

Так как в силу первого начального условия  $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$ , получаем:

$$(0-1)e^0 + C_1 = 0, \quad C_1 = 1.$$

Так как в силу второго начального условия  $y|_{x=0} = 1$ , получаем:

$$(0-2)e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1, \quad C_2 = 3.$$

Теперь частное решение, удовлетворяющее заданным условиям, принимает вид

$$y = (x-2)e^x + x + 3. \quad \otimes$$

**Пример 6.7.7.** Найти общее решение ОДУ

$$\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 = 0.$$

**Решение.** Решаем уравнение относительно  $z = \frac{d^2 y}{dx^2}$ :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 1, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 2.$$

Интегрируем получившиеся ОДУ последовательно:

$$1) \frac{d^2 y}{dx^2} = 1, \frac{dy}{dx} = x + C_1, y = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2;$$

$$2) \frac{d^2 y}{dx^2} = 2, \frac{dy}{dx} = 2x + C_3, y = x^2 + C_3x + C_4.$$

Совокупность этих решений образует общий интеграл ОДУ.

Так как квадратный трёхчлен имеет разложение

$$z^2 - 3z + 2 = (z - z_1)(z - z_2),$$

то общий интеграл ОДУ имеет вид:

$$\left(y - \frac{1}{2}x^2 - C_1x - C_2\right) \cdot \left(y - x^2 - C_3x - C_4\right) = 0. \otimes$$

**Пример 6.7.8. Найти общее решение ОДУ**

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3.$$

**Решение.** Положим  $\frac{d^2 y}{dx^2} = z$ , тогда из уравнения получаем

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}z^3.$$

Интегрируя получившееся уравнение, получаем

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}z^3, \frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{2}dx, \frac{1}{z^2} = x + C_1, z^2 = \frac{1}{x + C_1}.$$

Заменяя  $z = \frac{d^2 y}{dx^2}$ , получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 = \frac{1}{x + C_1}.$$

Уравнение содержит только  $x$  и  $y$ . Разрешая его относительно  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ , получаем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x + C_1}}.$$

Это уравнение интегрируем последовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{x + C_1}} + C_2 = \{dx = d(x + C_1)\} =$$

$$= \pm \int (x + C_1)^{-1/2} d(x + C_1) + C_2 = \pm (x + C_1)^{1/2} + C_2$$

$$y_1 = \int (x + C_1)^{1/2} dx + C_2 x + C^3 = (x + C_1)^{3/2} + C_2 x + C^3,$$

$$y_2 = -\int (x + C_1)^{1/2} dx + C_2 x + C^3 = -(x + C_1)^{3/2} + C_2 x + C^3. \otimes$$

**Пример 6.7.9.** Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -2, k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{-2x}, e^x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x. \otimes$$

**Пример 6.7.10.** Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравне-

ния

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^x, xe^x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x. \otimes$$

**Пример 6.7.11.** Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 13y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 13 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = 2 + 3i, k_2 = 2 - 3i.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{2x} \cos 3x, e^{2x} \sin 3x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin x). \otimes$$

**Пример 6.7.12.** Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0.$$

Преобразуем характеристическое уравнение:

$$(k^2 - 1)(k - 2) = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 2.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{-x}, e^x, e^{2x}\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}. \otimes$$

**Пример 6.7.13.** Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} - 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^3 - 4k^2 + 6k - 4 = 0.$$

Корень ищем среди множителей свободного члена, это 2 и 4. Проверяем 2, для чего делим уголком:

$$k^3 - 4k^2 + 6k - 4 = (k - 2)(k^2 - 2k + 2).$$

Уравнение принимает вид:

$$(k - 2)(k^2 - 2k + 2) = 0.$$

Находим оставшиеся корни характеристического уравнения

$$k_1 = 2, k_2 = 1 + i, k_3 = 1 - i.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{2x}, e^x \cos x, e^x \sin x\}.$$

Общее решение записывается в виде:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + e^x (C_2 \cos x + C_3 \sin x). \otimes$$

**Пример 6.7.14.** Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = x^2 - x + 1.$$

Р е ш е н и е. 1) Однородное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -1, k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{-x}, e^x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

2) Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$z(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^x.$$

Система линейных алгебраических уравнений для производных новых функций в общем виде

$$\begin{cases} y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} = 0, \\ \frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dC_2}{dx} = f(x). \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} e^{-x} \frac{dC_1}{dx} + e^x \frac{dC_2}{dx} = 0, \\ -e^{-x} \frac{dC_1}{dx} + e^x \frac{dC_2}{dx} = x^2 - x + 1. \end{cases}$$

Решаем систему, например, по формулам Крамера, в результате получаем:

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{1}{2}e^x(x^2 - x + 1); \quad \frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{2}e^{-x}(x^2 - x + 1).$$

3) Решение первого из уравнений:

$$C_1 = -\frac{1}{2} \int e^x (x^2 - x + 1) dx + A_1 = \dots = \left( -\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x - 2 \right) e^x + A_1.$$

Решение второго уравнения:

$$C_2 = -\frac{1}{2} \int e^{-x} (x^2 - x + 1) dx + A_2 = \dots = \left( -\frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + 12 \right) e^{-x} + A_2.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$z(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^x - x^2 + x - 1. \quad \otimes$$

**Пример 6.7.15.** С аэростата, падающего с высоты  $H$  со скоростью  $v_0$ , сбросили балласт, после чего его падение замедлилось и через некоторое время сменилось подъёмом, так что через время  $t_0$  аэростат поднялся на высоту, с которой сбросили балласт. Считая, что масса аэростата без балласта равна  $m$ , а сила сопротивления воздуха  $R$  и подъёмная сила аэростата  $T$  постоянны, определить, сколько времени после сброса балласта аэростат опускался.

**Решение.** Начало системы координат поместим в нижнюю точку траектории аэростата, ось  $OZ$  направим вертикально вверх (рисунок 1). По условию задачи силы, действующие на аэростат в течение всего времени движения остаются постоянными.

Уравнение второго закона динамики для опускающегося аэростата имеет вид:

$$m \ddot{z} = T + R - G, \quad (1)$$

где  $G = mg$  – сила тяжести. В начальный момент времени аэростат находился на высоте  $H$ , поэтому начальные условия запишутся в виде

$$z(0) = H, \quad \dot{z}(0) = -v_0. \quad (2)$$

Уравнение (1) – это простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение, не содержащее в правой части искомой функции и независимой переменной. Интегрируя два раза, получаем:

$$m \dot{z} = (T + R - G)t + C_1, \quad (3)$$

$$mz = \frac{T + R - G}{2} t^2 + C_1 t + C_2. \quad (4)$$



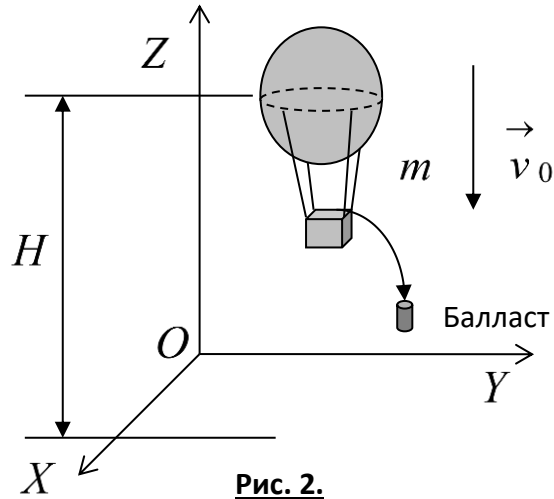


Рис. 2.

Используя начальные условия (2), получаем для постоянных:  $C_1 = -mv_0$ ,  $C_2 = mH$ .

Теперь уравнения движения принимают вид:

$$\dot{z} = \frac{T + R - G}{m}t - v_0, \quad (5)$$

$$z = \frac{T + R - G}{2m}t^2 - v_0t + H. \quad (6)$$

Для поднимающегося аэростата уравнение второго закона динамики и начальные условия имеют вид:

$$m \ddot{z} = T - R - G, \quad (7)$$

$$z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \quad (8)$$

Интегрируя (7), получаем:

$$m \dot{z} = (T - R - G)t + C_1, \quad (9)$$

$$mz = \frac{T - R - G}{2}t^2 + C_1t + C_2. \quad (10)$$

Из начальных условий (8) для постоянных получаем  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ , откуда получаем уравнение движения:

$$z = \frac{T - R - G}{2m} t^2. \quad (11)$$

Обозначим время падения аэростата  $t_1$ , а время подъёма  $t_2$ . Из условия задачи  $t_0 = t_1 + t_2$

. Подставляя  $t = t_1$ ,  $\dot{z}(t_1) = 0$ ,  $z(t_1) = 0$  в (5) и (6) и  $t = t_2$ ,  $z(t_2) = H$  в (11), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{T + R - G}{m} t_1 - v_0 = 0, \\ \frac{T + R - G}{2m} t_1^2 - v_0 t_1 + H = 0, \\ \frac{T - R - G}{2m} t_2^2 = H. \end{cases} \quad (12)$$

Исключая из уравнений системы (12) неизвестные  $H$  и  $v_0$  с учётом того, что  $t_2 = t_0 - t_1$ , получаем:

$$t_1 = \frac{t_0}{1 + \frac{\sqrt{T + R - mg}}{T - R - mg}}. \quad \otimes$$

**Пример 6.7.16.** Грузовик массой  $m$  имеет максимальную скорость  $v_{\max}$  и разгоняется с места до скорости  $v_*$  за время  $t_*$ . Сила сопротивления пропорциональна скорости. Чему равняется средняя сила тяги двигателя грузовика?

**Решение.** Силы, действующие на грузовик, изображены на рисунке 2. При решении задачи предполагаем, что средняя сила тяги двигателя  $\vec{F}$  постоянна.

После проектирования на оси системы координат дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m \ddot{x} = F - R.$$

Здесь сила трения  $\vec{R} = k \vec{v}$ , где коэффициент динамического трения  $k > 0$  неизвестен;  $\vec{N}$  –

сила реакции опоры (дороги);  $\vec{G}$  – сила тяжести.

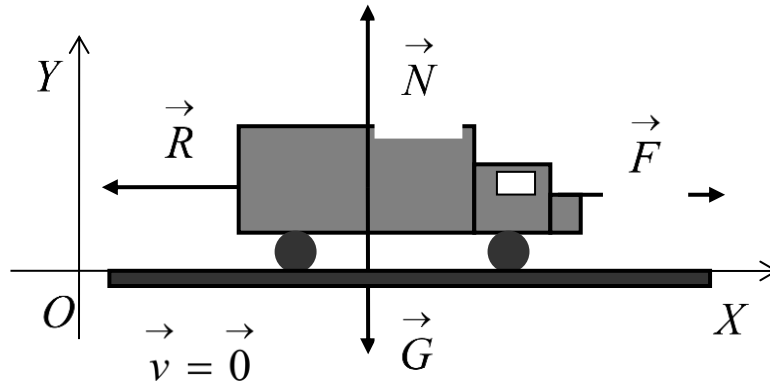


Рис. 2.

Обозначая  $x = v$ , получаем:

$$m\dot{v} = F - kv \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = F - kv \Rightarrow \frac{mdv}{F - kv} = dt \Rightarrow$$

$$-\frac{m}{k} \int \frac{d(F - kv)}{F - kv} = t + C \Rightarrow -\frac{m}{k} \ln(F - kv) = t + C.$$

Начальные условия  $x(0) = 0$  и  $\dot{x}(0) = v(0) = 0$ . Из условия на скорость получаем, что

$$C = -\frac{m}{k} \ln F. \text{ Подстановка даёт}$$

$$t = -\frac{m}{k} \ln(F - kv) + \frac{m}{k} \ln F = -\frac{m}{k} \ln \frac{F - kv}{F} \Rightarrow t = -\frac{m}{k} \ln \left( 1 - \frac{kv}{F} \right). \quad (1)$$

Так как задана максимальная скорость  $v_{\max}$ , то из необходимого условия экстремума получаем:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = F - kv_{\max} = 0 \Rightarrow k = \frac{F}{v_{\max}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), при  $t = t_*$  и  $v = v_*$ , получаем:

$$t_* = -\frac{m}{\frac{F}{v_{\max}}} \ln \left( 1 - \frac{\left( \frac{F}{v_{\max}} \right) v_*}{F} \right) \Rightarrow t_* = -\frac{mv_{\max}}{F} \ln \left( 1 - \frac{v_*}{v_{\max}} \right) \Rightarrow$$

$$F = -\frac{mv_{\max}}{t_*} \ln \frac{v_{\max} - v_*}{v_{\max}} \Rightarrow F = \frac{mv_{\max}}{t_*} \ln \frac{v_{\max}}{v_{\max} - v_*}. \quad \otimes$$

## Практическое занятие 8. Системы ОДУ

### Предварительные сведения

Системы ОДУ вида

$$\begin{cases} \frac{dy^1}{dt} = f^1(t, y^1, y^2, \dots, y^n), \\ \frac{dy^2}{dt} = f^2(t, y^1, y^2, \dots, y^n), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dy^n}{dt} = f^n(t, y^1, y^2, \dots, y^n). \end{cases}$$

называются **системами ОДУ в нормальной форме**, или просто нормальными системами.

Если функции в правой части системы нормальной ОДУ зависят от искомых функций  $\{y^1(t), y^2(t), \dots, y^n(t)\}$  линейным образом, то есть

$$f^k(t, y^1, y^2, \dots, y^n) = \sum_{j=1}^n p_j^k y^j + f^k(t),$$

то нормальную систему ОДУ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{dy^1}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j^1 y^j + f^1(t), \\ \frac{dy^2}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j^2 y^j + f^2(t), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dy^n}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j^n y^j + f^n(t). \end{cases}$$

Эквивалентная матрично-векторная форма имеет вид

$$I \frac{d}{dt} |y(t)\rangle + P(t) |y(t)\rangle = |f(t)\rangle,$$

где введены обозначения для матричного дифференциального оператора

$$L = I \frac{d}{dt} + P(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} p_1^1(t) & p_2^1(t) & \dots & p_n^1(t) \\ p_1^2(t) & p_2^2(t) & \dots & p_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n(t) & p_2^n(t) & \dots & p_n^n(t) \end{pmatrix},$$

и вектор-столбцов

$$|y(t)\rangle = \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix}, \quad |f(t)\rangle = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ \dots \\ f^n(t) \end{pmatrix}.$$

Линейная однородная система ОДУ в нормальной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^1(t) & p_2^1(t) & \dots & p_n^1(t) \\ p_1^2(t) & p_2^2(t) & \dots & p_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n(t) & p_2^n(t) & \dots & p_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в матрично-векторной записи

$$I \frac{d}{dt} |y(t)\rangle + P(t) |y(t)\rangle = |0\rangle.$$

Система  $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$  из  $n$  частных решений системы

$$|y_1\rangle = \begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ y_1^2(t) \\ \dots \\ y_1^n(t) \end{pmatrix}, \quad |y_2\rangle = \begin{pmatrix} y_2^1(t) \\ y_2^2(t) \\ \dots \\ y_2^n(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad |y_m\rangle = \begin{pmatrix} y_m^1(t) \\ y_m^2(t) \\ \dots \\ y_m^n(t) \end{pmatrix}$$

называется **линейно независимой на промежутке**  $(a, b)$ , если  $(\forall t \in (a, b))$

$$\alpha_1 |y_1(t)\rangle + \alpha_2 |y_2(t)\rangle + \dots + \alpha_n |y_n(t)\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Линейно независимая система  $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$  из  $n$  частных решений однородно системы ОДУ в нормальной форме называется **фундаментальной системой решений (ФСР)** этой системы. Векторы ФСР можно расположить в виде матрицы, составленной из их координат по столбцам:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_2^1(t) & \dots & y_n^1(t) \\ y_1^2(t) & y_2^2(t) & \dots & y_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(t) & y_2^n(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Если  $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$  – линейно независимая система частных решений системы уравнений (4.30), то любое её решение имеет вид

$$|y(t)\rangle = \sum_{k=1}^n C_k |y_k(t)\rangle.$$

Общее решение записывается через фундаментальную матрицу в виде:

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_2^1(t) & \dots & y_n^1(t) \\ y_1^2(t) & y_2^2(t) & \dots & y_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(t) & y_2^n(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix},$$

или

$$|y(t)\rangle = Y(t)|C\rangle.$$

Решение задачи Коши

$$I \frac{d}{dt} |y\rangle + P(t)|y\rangle = |0\rangle, \quad |y(t_0)\rangle = |y_0\rangle$$

получается из последней формулы за счёт выбора произвольного числового вектора  $|C\rangle$ . Действительно, имеем

$$|y_0\rangle = Y(t_0)|C\rangle \Rightarrow |C\rangle = Y^{-1}(t_0)|y_0\rangle,$$

причём обратная матрица  $Y^{-1}(t_0)$  существует, так как матрица  $Y(t_0)$  невырожденная. Подставляя найденный вектор  $|C\rangle$  в формулу для общего решения, получаем решение задачи Коши в виде

$$|y(t)\rangle = Y(t)Y^{-1}(t_0)|y_0\rangle.$$

Матричная функция

$$G(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)$$

называется **функцией Коши**.

Решение однородной системы ОДУ

$$\frac{dy^i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^n a_j^i y^j(t) = 0$$

Ищется в виде

$$y^1(t) = x^1 e^{-\mu t}, \quad y^2(t) = x^2 e^{-\mu t}, \quad \dots, \quad y^n(t) = x^n e^{-\mu t}.$$

Подстановка в систему ОДУ приводит к однородной СЛАУ

$$\begin{cases} (a_1^1 - \mu)x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + (a_2^2 - \mu)x^2 + \dots + a_n^2 x^n = 0, \\ \dots, \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + (a_n^n - \mu)x^n = 0. \end{cases}$$

Условие разрешимости СЛАУ имеет вид уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \mu & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \mu & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

которое называется **характеристическим уравнением**.

В зависимости от структуры матрицы СЛАУ реализуются три случая существования решений характеристического уравнения и, соответственно, три случая построения фундаментальной матрицы для системы ОДУ в нормальной форме.

**Случай 1.** Пусть все корни  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  уравнения (4.69) различные и вещественные. Этот случай реализуется, если матрица  $A$  является матрицей простой структуры. Совершая последовательные подстановки  $\mu_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) в СЛАУ (4.68), получим  $n$  экземпляров СЛАУ для нахождения собственных векторов матрицы  $A$ :

$$\begin{cases} (a_1^1 - \mu_k)x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + (a_2^2 - \mu_k)x^2 + \dots + a_n^2 x^n = 0, \\ \dots, \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + (a_n^n - \mu_k)x^n = 0. \end{cases} \quad (4.70)$$

Решив  $n$  экземпляров СЛАУ (4.70), найдём линейно независимую систему собственных векторов матрицы  $A$ :

$$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \dots \\ x_1^n \end{pmatrix}, |x_2\rangle = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ \dots \\ x_2^n \end{pmatrix}, \dots, |x_n\rangle = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \dots \\ x_n^n \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение системы однородной линейной ОДУ записывается в виде

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 e^{-\mu_1 t} & x_2^1 e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^1 e^{-\mu_n t} \\ x_1^2 e^{-\mu_1 t} & x_2^2 e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^2 e^{-\mu_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n e^{-\mu_1 t} & x_2^n e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^n e^{-\mu_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 x_1^1 e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^1 e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^1 e^{-\mu_n t} \\ C_1 x_1^2 e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^2 e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^2 e^{-\mu_n t} \\ \dots \\ C_1 x_1^n e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^n e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^n e^{-\mu_n t} \end{pmatrix}.$$

**Случай 2.** Пусть корни характеристического уравнения (4.69) различные, но среди них имеются комплексно-сопряжённые. Тогда частные решения (4.72) и, следовательно, общее решение (4.75) будут комплексными функциями. Выделим одну из пар комплексно-сопряжённых корней:  $\mu_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\mu_2 = \alpha - i\beta$ . Этой паре корней соответствуют вещественные частные решения. Исследуем их.

Построим частное решение, соответствующее корню  $\mu_1 = \alpha + i\beta$ . Это *комплексное* решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \\ \dots \\ y_1^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_1^1 + iz_1^1 \\ x_1^2 + iz_1^2 \\ \dots \\ x_1^n + iz_1^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \\ \dots \\ y_2^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_2^1 + iz_2^1 \\ x_2^2 + iz_2^2 \\ \dots \\ x_2^n + iz_2^n \end{pmatrix},$$

$$\dots, \begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \\ \dots \\ y_n^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_n^1 + iz_n^1 \\ x_n^2 + iz_n^2 \\ \dots \\ x_n^n + iz_n^n \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что вещественная и мнимая части решения сами являются решениями однородной системы ОДУ. Эти решения в совокупности образуют линейно независимую систему, которую можно использовать для построения фундаментальной матрицы.

**Случай 3.** Пусть среди корней характеристического уравнения имеется корень  $\mu_1$  кратности  $k$ . Можно показать, что тогда ему соответствует решение системы ОДУ вида

$$y^1 = F_1(t)e^{-\mu_1 t}, y^2 = F_2(t)e^{-\mu_1 t}, \dots, y^n = F_n(t)e^{-\mu_1 t},$$

где  $F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$  – многочлены от  $t$  степени не выше чем  $k-1$ , имеющие в совокупности  $k$  произвольных коэффициентов. Полагая последовательно в этом решении, что один из



произвольных коэффициентов многочленов равен единице, а остальные – нулю, получим линейно независимую систему  $k$  частных решений системы уравнений ОДУ.

Если  $\mu_1$  – вещественное характеристическое число, то полученные частные решения будут вещественными.

Если  $\mu_1 = \alpha + i\beta$  – комплексное характеристическое число, то имеется комплексно-сопряжённое характеристическое число  $\alpha - i\beta$  той же кратности.

Построив  $k$  линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих характеристическому числу  $\mu_1 = \alpha + i\beta$  и отделив в них вещественные и мнимые части, получим  $2k$  линейно независимых частных решений. Таким образом, паре комплексно-сопряжённых характеристических чисел  $\alpha \pm i\beta$  кратности  $k$  соответствует  $2k$  линейно независимых вещественных частных решений.

В общем случае каждому простому вещественному корню характеристического уравнения соответствует одно частное решение, каждой паре простых комплексно-сопряжённых корней соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения, вещественному корню характеристического уравнения кратности  $k$  соответствуют  $k$  линейно независимых частных решения, а каждой паре комплексно-сопряжённых корней кратности  $k$  характеристического уравнения соответствуют  $2k$  линейно независимых частных решения. В совокупности получается  $n$  линейно независимых частных решений, из которых можно составить фундаментальную матрицу и, следовательно, записать общее решение системы ОДУ.

Описанная совокупность действий носит название «Метод Эйлера интегрирования линейной однородной системы ОДУ».

### Примеры с решением

**Пример 6.8.1.** Дана система ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dy^1}{dt} + y^1 + 2y^2 = 0, \\ \frac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение этой системы.

**Решение.** Систему можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частное решение ищем в виде

$$y^1(t) = x^1 e^{-\mu t}, \quad y^2(t) = x^2 e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений частное решение и сокращая на неравный нулю множитель  $e^{-\mu t}$ , получаем

$$\begin{cases} (1 - \mu)x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - (\mu + 4)x^2 = 0. \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, характеристическое уравнение для неё имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & 2 \\ -3 & -\mu-4 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\mu^2 + 3\mu + 2 = 0.$$

Характеристические числа (собственные значения)

$$\mu_1 = -2, \mu_2 = -1.$$

1) Для  $\mu_1 = -2$  имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 2x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к уравнению

$$3x^1 + 2x^2 = 0.$$

Решение этого уравнения, полагая  $x^2 = a \in \mathbb{R}^1$ , запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Таким образом, имеем первый собственный вектор

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее первому собственному значению, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2) Для  $\mu_1 = -2$  имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 3x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению

$$x^1 + x^2 = 0.$$

Полагая  $x^2 = b \in \mathbb{R}^1$ , получим

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Второй собственный вектор имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее второму собственному вектору, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

3) Составляем фундаментальную матрицу:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \\ y_1^2 & y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение находится по формуле

$$|y(t)\rangle = Y(t)|C\rangle.$$

Подставляя в эту формулу выражение для фундаментальной матрицы, получаем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}C_1e^{2t} - C_2e^t \\ C_1e^{2t} + C_2e^t \end{pmatrix}. \otimes$$

**Пример 6.8.2.** Найти общее решение системы ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

**Решение.** Решение ищем в виде

$$y_1 = x_1 e^{-\mu t}, \quad y_2 = x_2 e^{-\mu t}, \quad y_3 = x_3 e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем СЛАУ для определения собственных векторов

$$\begin{cases} -\mu x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - \mu x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - \mu x_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Эта система уравнений нетривиально совместна, если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} -\mu & -1 & -1 \\ -1 & -\mu & -1 \\ -1 & -1 & -\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu_1 = -2, \quad \mu_2 = \mu_3 = 1.$$

Корню  $\mu_1 = -2$  соответствует система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Если решать данную систему методом Гаусса, то получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем одно решение исходной системы уравнений

$$|y_1\rangle = a|a_1\rangle = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы СЛАУ (2) при  $\mu_2 = \mu_3 = 1$  равен 1, то система уравнений сводится к одному уравнению

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Полагая  $x_2 = a$ ,  $x_3 = b$ , получаем решение в виде

$$|x\rangle = a|a_2\rangle + b|a_3\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Каждому из базисных решений

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |a_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

соответствует одно частное решение

$$|y_2\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, |y_3\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Определитель, составленный из этих решений

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следовательно, найденные решения образуют линейно независимую систему, то есть фундаментальную систему решений исходной системы ОДУ. Составим фундаментальную матрицу

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение запишем в виде

$$|y(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t} \\ C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t} \end{pmatrix}. \otimes$$

Для решения линейной неоднородной системы ОДУ в нормальной форме можно использовать метод Лагранжа. Продемонстрируем его на примере.

**Пример 6.8.3.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 = \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases} \quad (1)$$

**Решение.** Решаем систему методом Лагранжа. Для этого сначала находим общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя  $y_1 = x_1 e^{-\mu t}$  и  $y_2 = x_2 e^{-\mu t}$ , записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^2 - 1 = 0: \mu_1 = -1; \mu_2 = 1.$$

Находим собственные векторы.

1) Для  $\mu_1 = -1$  система сводится к уравнению

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = a \Rightarrow x_1 = a.$$

Вектор решения принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первый собственный вектор

$$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Для  $\mu_2 = 1$  система сводится к уравнению

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = b \Rightarrow x_1 = -b.$$

Второй собственный вектор

$$|x_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь частные решения имеют вид:

$$\mu_1 = -1 \Rightarrow |y_1\rangle = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix};$$

$$\mu_2 = 1 \Rightarrow |y_2\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (2) записывается так:

$$|y(t)\rangle = C_1 |y_1\rangle + C_2 |y_2\rangle = C_1 e^{-\mu_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\mu_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

откуда имеем

$$y_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y_2(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Общее решение неоднородной системы ищем в виде:

$$\begin{cases} z_1(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t}, \\ z_2(t) = C_1(t)e^t - C_2(t)e^{-t}. \end{cases} \quad (3)$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем после дифференцирования и приведения подобных

$$\begin{cases} \frac{dC_1(t)}{dt} \cdot e^t + \frac{dC_2(t)}{dt} \cdot e^{-t} = 0, \\ \frac{dC_1(t)}{dt} \cdot e^t - \frac{dC_2(t)}{dt} \cdot e^{-t} = \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

Решение системы по формулам Крамера имеет вид:

$$\frac{dC_1}{dt}(t) = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{t^2} + \ln t & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^{-t} \left( \frac{1}{t^2} + \ln t \right),$$

$$\frac{dC_2}{dt}(t) = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{t^2} + \ln t & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^t \left( \frac{1}{t^2} + \ln t \right).$$

Откуда, после интегрирования получаем

$$C_1(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} \left( \frac{1}{t} + \ln t \right) + A_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{2} e^t \left( \frac{1}{t} - \ln t \right) + A_2.$$

Подставляя в формулы (3), получаем общее решение неоднородной системы уравнений (1) в виде:

$$\begin{cases} z_1(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t} - \ln t, \\ z_2(t) = A_1 e^t - A_2 e^{-t} - \frac{1}{t}. \end{cases} \otimes$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_W xy dl,$$

где путь  $W$  — контур треугольника с вершинами:  $A(-1; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(0; 1)$ .

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W (x + y) dx - x dy,$$

где путь  $W$  — отрезок ломаной линии, соединяющий точки

$$A(0; 0), B(2; 0), C(4; 2).$$

3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W x dy - y dx,$$

где  $W$  — путь, заданный неявным уравнением  $y = x^3$ , соединяющий точки  $A(0; 0)$  и  $B(2; 8)$

4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W x^2 dx + y^2 dy,$$

где  $W$  — путь, заданный неявным уравнением  $y = \sqrt{x}$ , соединяющий точки  $A(0; 0)$  и  $B(1; 1)$

5. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D (5x^2 y - 2y^3) dx dy$$

по прямоугольнику  $D = \{(x, y) \in R_2 : 2 \leq x \leq 5 \wedge 1 \leq y \leq 3\}$ .

6. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D (x^2 + y) dx dy$$

по области, ограниченной параболой  $y = x^2$  и  $y^2 = x$ .

7. Вычислить двойные интегралы, переходя к полярным координатам:

а)  $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$ , где  $D$  — круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ ;

б)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , где  $D$  — круг  $x^2 + y^2 \leq 4$ ;

в)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , где  $D$  — круг  $x^2 + y^2 \leq 2x$ ;

г)  $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$ , где  $D$  — первая четверть круга  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями:

а)  $y = \ln x, x - y = 1, y = -1$ ;

б)  $y = x^2, 4y = x^2, x = 2, x = -2$ .

9. Вычислить тройные интегралы:

а)  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ , где область  $V$  ограничена плоскостями с уравнениями

$x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ ;



б)  $\iiint_V (x + y) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена плоскостями с уравнениями

$$x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1.$$

10. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а)  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями с уравнениями

$$x^2 + y^2 = 1, z = 2;$$

б)  $\iiint_V z dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями с уравнениями  $x^2 + y^2 = 1$ ,

$$z = 0, z = a \ (a > 0).$$

11. Переходя к сферическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а)  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , где область  $V$  – это шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ;

б)  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , где область  $V$  – это верхняя половина шара

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

12. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

а)  $\iint_F (x + 18y + 24z) ds$ , где поверхность  $F$  задана неявным уравнением

$$x + 2y + 3z = 1,$$

и неравенствами  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ;

б)  $\iint_F (x^2 + y^2) ds$ , где поверхность  $F$  задана неявным уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

и неравенствами  $0 \leq z \leq 1$ .

13. Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

а)  $\iint_F z dx dy$ , где поверхность  $F$  – верхняя сторона верхней половины сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9;$$

б)  $\iint_F (x^2 + y^2) dx dy$ , где поверхность  $F$  – верхняя сторона части параболоида с уравне-

нием

$$z = 1 - x^2 - y^2,$$

отсечённая плоскостью  $z = 0$ .

14. Найти производную скалярного поля  $u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$  по направлению радиуса-вектора точки  $M(3; 4)$  в начале координат.

15. Найти градиент плоского скалярного поля  $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$  в точке  $M(2; 1)$ .

16. Найти производную функции, определённой формулой  $u = \frac{xyz}{3}$ , в точке  $M_0(1; 2; 3)$  по

направлению вектора  $\vec{M_0M}$ , если  $M(4; 1; 6)$ .

17. Доказать, что

$$\text{а) } \operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}; \text{ б) } \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

18. Показать, что

$$\operatorname{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v.$$

19. Найти

$$\text{а) } \operatorname{div} \vec{r}; \text{ б) } \operatorname{div} \left( r^4 \vec{r} \right); \text{ в) } \operatorname{div} \left( \left( \vec{A}, \vec{r} \right) \vec{B} \right).$$

20. Найти  $\operatorname{div} \vec{A}$ , если:

$$\text{а) } \vec{A} = (x - y)(y - z) \vec{e}_1 + (y - z)(z - x) \vec{e}_2 + (z - x)(x - y) \vec{e}_3;$$

$$\text{б) } \vec{A} = (x^2 + y^2)(y - z) \vec{e}_1 + (y^2 + z^2)(z - x) \vec{e}_2 + (z^2 + x^2)(x - y) \vec{e}_3.$$

21. Найти ротор векторного поля  $\vec{A}(M)$ :

$$\text{а) } \vec{A} = \frac{y}{x} \vec{e}_1 + \frac{z}{y} \vec{e}_2 + \frac{x}{z} \vec{e}_3;$$

$$\text{б) } \vec{A} = yz \vec{e}_1 + z(x+2y) \vec{e}_2 + y(x+y) \vec{e}_3.$$

22. Доказать двумя способами (в декартовых координатах и с помощью оператора Гамильтона), что

для произвольного скалярного поля  $\varphi(M)$  и для произвольных векторных полей  $\vec{A}(M)$  и

$\vec{B}(M)$  справедливы следующие формулы:

$$\text{а) } \left( \vec{A}, \nabla \right) \varphi \vec{B} = \vec{B} \left( \vec{A}, \nabla \varphi \right) + \varphi \left( \vec{A}, \nabla \right) \vec{B};$$

$$\text{б) } \vec{C} \cdot \nabla \left( \vec{A}, \vec{B} \right) = \vec{A} \cdot \left( \left( \vec{C}, \nabla \right), \vec{B} \right) + \vec{B} \cdot \left( \left( \vec{C}, \nabla \right), \vec{A} \right);$$

$$\text{в) } \left( \vec{C}, \nabla \right) \left[ \vec{A}, \vec{B} \right] = \left[ \vec{A}, \left( \vec{C}, \nabla \right) \vec{B} \right] - \left[ \vec{B}, \left( \vec{C}, \nabla \right) \vec{A} \right].$$

23. Найти результат действия векторных дифференциальных операций:

$$\text{а) } \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi);$$

$$\text{б) } \operatorname{rot}(\varphi \operatorname{grad} \psi);$$

$$\text{в) } \operatorname{rot} \left[ \vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B} \right].$$

24. Найти векторные линии векторных полей:

$$\text{а) } \vec{A} \left( \vec{x} \right) = 2y \vec{e}_1 + 6x \vec{e}_2;$$

$$\text{б) } \vec{A} \left( \vec{x} \right) = 2x \vec{e}_1 + 3y \vec{e}_2;$$

$$\text{в) } \vec{A} \left( \vec{x} \right) = 2y \vec{e}_2 + 6z \vec{e}_3.$$

25. Найти циркуляцию векторного поля  $\vec{A}(\vec{x})$  вдоль заданного замкнутого контура с заданной параметризацией:

$$\text{а) } \vec{A}(\vec{x}) = y \vec{e}_1 - z \vec{e}_2 + x^2 y \vec{e}_3,$$

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$\text{б) } \vec{A}(\vec{x}) = z \vec{e}_1 - x \vec{e}_2 + yz \vec{e}_3,$$

$$x = 2 \cos t, \quad y = 6 \sin t, \quad z = 3, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$\text{в) } \vec{A}(\vec{x}) = 4y \vec{e}_1 + x \vec{e}_2 + y \vec{e}_3,$$

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 2 - \cos t - \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

26. Найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$1) \text{ Решить уравнение } (1 + y)dx - (1 - x)dy = 0.$$

$$2) \text{ Решить уравнение } (1 + e^x)yy' = e^x.$$

$$3) \text{ Решить уравнение } x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0.$$

27. Найти общее решение уравнения с однородной правой частью.

$$1) \text{ Найти интегральные кривые уравнения } y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

$$2) \text{ Найти интегральные кривые уравнения } y' = \frac{y}{x} - 1.$$

3) Найти интегральные кривые уравнения

$$(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0.$$

28. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Если указаны начальные условия, то найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

$$1) (2x+1)\frac{dy}{dx} = 4x + 2y.$$

$$2) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, y(0) = 0.$$

$$3) x\frac{dy}{dx} + y - e^x = 0, y(a) = b.$$

$$4) \frac{dy}{dx} \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, y(0) = 0.$$

$$5) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, y(e) = \frac{e^2}{2}.$$

$$6) \frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = \cos x, y(0) = 0.$$

$$7) \frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{\sin x}, y(0) = 0.$$

$$8) x\frac{dy}{dx} + y = x^2.$$

$$9) x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3.$$

$$10) x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y.$$

$$11) \frac{dy}{dx} - ay = e^{bx}.$$

29. Найти общее решение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения порядка выше второго.

$$1) \frac{d^3 y}{dx^3} - 8y = 0. \quad 2) \frac{d^4 y}{dx^3} - y = 0. \quad 3) \frac{d^4 y}{dx^4} - 5 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0.$$

$$4) \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^3 y}{dx^3} + 8 \frac{d^2 y}{dx^2} + 8 \frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

$$5) \frac{d^5 y}{dx^5} - 6 \frac{d^4 y}{dx^4} + 9 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

30. Найти общее решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения.

$$1) \frac{d^2 y}{dx^2} - 4y = -12x^2 + 6x - 4.$$

$$2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 4e^x.$$

$$3) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y = -4e^x + 3.$$

$$4) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6 \sin 2x.$$

$$5) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = -13 \sin 2x.$$

31. Найти общее решение однородных систем ОДУ методом Эйлера.

$$1) \begin{cases} \frac{dy^1}{dt} - 2y^1 + 3y^2 = 0, \\ \frac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 2y^2 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy^1}{dt} - 2y^1 + 3y^2 = 0, \\ \frac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - 4y_1 + y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - 3y_1 - y_2 + y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_3 = 0. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} + y_1 - y_2 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 + y_2 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 + y_3 = 0. \end{cases}$$

$$5) \frac{d}{dt} |y\rangle = A |y\rangle, |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6) \frac{d}{dt} |y\rangle = A|y\rangle, |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

32. Решить неоднородные системы ОДУ методом Лагранжа.

$$1) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 = \cos t, \\ \frac{dy_2}{dt} + y_1 = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - 2y_1 + 4y_2 = 4e^{-2t}, \\ \frac{dy_2}{dt} - 2y_1 + 2y_2 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - 2y_1 - y_2 + 2y_3 = -t + 2, \\ \frac{dy_2}{dt} + y_1 = 1, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 + y_3 = -t + 1. \end{cases}$$



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**ФГБОУ ВО**

**«Уральский государственный горный  
университет»**

**О. В. Садырева, И. Г. Коршунов**

**Ф И З И К А**

***МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ***  
**ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**  
**ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ**

**Екатеринбург**

**2020**



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Уральский государственный горный университет»



ОДОБРЕНО

Методическим советом УГГУ

Председатель совета

Упоров С.А.

## ФИЗИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ  
СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Екатеринбург, 2020

Методические указания рассмотрены на заседании кафедры физики 5 октября 2020 года (протокол № 117) и рекомендованы для издания в УГГУ

ФИЗИКА. Методические указания для самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки/Садырева О.В., Коршунов И.Г.; Урал.гос. горный ун-т.–Екатеринбург, 2019.– 29 стр.

Методические указания составлены в соответствии с программами по курсу физики для студентов всех направлений подготовки в УГГУ. Они содержат условия задач для самостоятельной работы, при выполнении контрольных работ студентами по следующим темам курса физики: механика; молекулярная физика и термодинамика; электричество и магнетизм; механические и электромагнитные колебания и волны; волновая и квантовая оптика; квантовая физика и физика атома; элементы ядерной физики. Также в них содержатся методические указания к решению задач, их оформлению, список рекомендуемой литературы и справочные данные, необходимые для решения задач.

## **ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ**

1. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются преподавателем в начале соответствующего семестра.
2. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке указывается фамилия и инициалы студента, номер группы.
3. Условия задач в контрольной работе необходимо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради нужно оставлять поля.
4. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, при решении которых допущены ошибки.
5. При решении задач необходимо пользоваться следующей схемой:
  - Внимательно прочитать условие задачи.
  - Выписать столбиком все величины, входящие в условие, и выразить их в одних единицах (преимущественно в Международной системе единиц СИ).
  - Если это возможно, представить условие задачи в виде четкого рисунка. Правильно сделанный рисунок – это наполовину решенная задача.
  - Уяснить физическую сущность задачи, установить основные законы и формулы, на которых базируется условие задачи.
  - Если при решении задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.
  - Если равенства векторные, то их необходимо спроектировать по оси координат и записать в скалярной форме.
  - Решить задачу сначала в общем виде, то есть, в буквенных обозначениях, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.
  - После получения расчетной формулы для проверки ее правильности следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин их размерности, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.

- Подставить в конечную формулу числовые значения, выраженные в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.
- При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать  $3,52 \cdot 10^3$ , вместо 0,00129 записать  $1,29 \cdot 10^{-3}$  и т. п.
- Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.
- Решение задачи должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями и комментариями.

## 1. МЕХАНИКА

1. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти ускорение и время движения поезда между станциями.
2. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением  $1,2 \text{ м/с}^2$ , останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки?
3. С башни высотой 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью 10 м/с. Определить уравнение траектории тела, скорость тела в момент падения.
4. Для добывания руды открытым способом произвели взрыв породы. Подъем кусков породы, выброшенных вертикально вверх, длился 5 с. Определить их начальную скорость и высоту подъема.
5. При взрыве серии скважин камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении. Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю?

6. Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электровоза в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м. Закон движения электровоза выражается формулой  $S = 800 + 8t - 0,5 t^2$ , м.
7. Во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободу вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол  $30^\circ$  с вектором ее линейной скорости?
8. Под действием постоянной силы 118 Н вагонетка приобрела скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Определить силу трения и коэффициент трения, если масса вагонетки 400 кг.
9. В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг, в первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.
10. На горизонтальной платформе шахтной клетки находится груз 60 кг. Определить силу давления груза на платформу: при равномерном подъеме и спуске, при подъеме и спуске с ускорением  $3 \text{ м/с}^2$ , при спуске с ускорением  $9,8 \text{ м/с}^2$ .
11. Тело скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол  $45^\circ$ . Пройдя путь 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.
12. Найти закон движения (зависимость пройденного расстояния от времени) куска антрацита при скольжении его с нулевой начальной скоростью по стальному желобу с углом наклона  $30^\circ$ . Коэффициент трения 0,3.
13. Рудничный поезд массой 450 т движется со скоростью 30 км/ч, развивая мощность 150 л. с. (1 л. с. = 736 Вт). Определить коэффициент трения.
14. Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме вагонетки массой 2 т с ускорением  $0,5 \text{ м/с}^2$ , если коэффициент трения 0,03, а угол наклона железнодорожного полотна  $30^\circ$ .
15. Вагонетка скатывается по наклонной горке длиной 5 м. Определить путь, проходимый вагонеткой по горизонтали до остановки, и наибольшую скорость движения, если коэффициент сопротивления 0,0095. Угол наклона  $5^\circ$ .

16. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой  $480 \text{ мин}^{-1}$ . Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.

17. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

18. Крутящий момент двигателя электрической лебедки  $1,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Для остановки двигателя служат тормозные деревянные колодки, прижимающиеся с двух сторон к тормозному чугунному диску радиусом  $0,6 \text{ м}$ , жестко связанному с ротором двигателя. Найти силу давления, необходимую для остановки ротора, если коэффициент трения равен  $0,5$ .

19. Двигатель мощностью  $3 \text{ кВт}$  за  $12 \text{ с}$  разогнал маховик до  $10 \text{ об/с}$ . Найти момент инерции маховика.

20. Была произведена работа в  $1 \text{ кДж}$ , чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой  $8 \text{ с}^{-1}$ . Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик?

21. Шар и цилиндр имеют одинаковую массу  $5 \text{ кг}$  и катятся со скоростью  $10 \text{ м/с}$  по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию этих тел.

22. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой  $80 \text{ кг}$  до  $180 \text{ об/мин}$ ? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром  $1 \text{ м}$ .

23. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

24. Шар и сплошной цилиндр катятся по горизонтальной плоскости. Какую часть энергии поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

25. Маховик, выполненный в виде диска радиусом  $0,4 \text{ м}$  и имеющий массу  $100 \text{ кг}$ , был раскручен до  $480 \text{ оборотов}$  в минуту и предоставлен самому себе. Под действием трения вала о подшипники маховик остановился через  $80 \text{ с}$ . Определить момент сил трения.

## 2.МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

26. Какой объем занимает 1 кг водорода при давлении 106 Па и температуре 20°С? Молярная масса водорода  $2 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

27. Для автогенной сварки привезли баллон кислорода вместимостью 100 л. Найти массу кислорода, если его давление 12 МПа и температура 16°С. Молярная масса кислорода  $32 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

28. Определить среднюю плотность сжатого воздуха в рудничной воздухопроводной сети, если давление воздуха в компрессоре составляет  $7 \cdot 10^5$  Па, а давление у воздухоприемников  $6 \cdot 10^5$  Па. Температура воздуха в начале и конце сети равна 27°С и 7°С. Молярная масса воздуха равна 0,029 кг/моль.

29. Стальной баллон емкостью 25 л наполнен ацетиленом  $C_2 H_2$  при температуре 27° С до давления 20 МПа. Часть ацетилена использовали для автогенной сварки подкрановых путей в шахте. Какая масса ацетилена израсходована, если давление в баллоне при температуре 23°С стало равным 14 МПа ? Молярная масса ацетилена 0,026 кг/моль.

30. Сжатый воздух в баллоне имеет температуру 15°С. Во время пожара температура воздуха в баллоне поднялась до 450° С. Взорвется ли баллон, если известно, что при этой температуре он может выдержать давление не более 9,8 МПа? Начальное давление в баллоне 4,8 МПа.

31. Температура взрыва гремучей смеси, то есть температура, до которой нагреты в первый момент газообразные продукты взрыва, достигает в среднем 2600° С, если взрыв происходит внутри замкнутого пространства. Во сколько раз давление при взрыве гремучего газа превосходит давление смеси до взрыва, если последнее равно  $10^5$  Па, а начальная температура 17° С?

32. Компрессор, обеспечивающий работу отбойных молотков в забое, засасывает из атмосферы 100 л воздуха в секунду при давлении 1 атм. Сколько отбойных молотков может работать от этого компрессора, если для каждого молотка необходимо  $100 \text{ см}^3$  воздуха в секунду при давлении 50 атм ?

33. В двигателе Дизеля сжимается адиабатически воздух, в результате чего его температура поднимается, достигая температуры воспламенения нефти 800° С. До какого давления сжимается при этом воздух и во сколько раз уменьшается его объем, если начальное давление 1 атм, начальная температура 80°С,  $\gamma=1,4$ ?

34. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до  $10^{-15}$  мм рт. ст. Сколько молекул газа содержится в объеме  $1 \text{ см}^3$  при указанном давлении и температуре  $27^\circ \text{C}$  ?

35. Определить средние квадратичные скорости молекул метана  $\text{CH}_4$  до взрыва и после него, если температура до взрыва равна  $20^\circ \text{C}$ , а после него  $2600^\circ \text{C}$ . Молярная масса  $0,016 \text{ кг/моль}$ .

36. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре  $350 \text{ K}$ , а также кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в  $4 \text{ г}$  кислорода.

37. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении окиси углерода  $\text{CO}$ , принимая этот газ за идеальный.

38. На сжатие азота при постоянном давлении была затрачена работа  $12 \text{ кДж}$ . Найти изменение внутренней энергии и затраченное количество теплоты.

39. Какое количество теплоты для нагревания от  $50^\circ \text{C}$  до  $100^\circ \text{C}$  надо сообщить азоту массой  $28 \text{ г}$ , который находится в цилиндре с подвижным поршнем? Чему равна при этом процессе работа расширения?

40. При адиабатическом процессе расширения внутренняя энергия кислорода уменьшилась на  $8,38 \text{ кДж}$ . Вычислить массу кислорода, если начальная температура его  $47^\circ \text{C}$ , а объем увеличился в  $10$  раз.

41. В двигателе внутреннего сгорания температура газообразных продуктов сгорания поднимается от  $600^\circ \text{C}$  до  $2000^\circ \text{C}$ . Найти количество теплоты, подведенное к  $1 \text{ кг}$  газа при постоянном давлении, изменение его внутренней энергии и совершенную работу, если удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно равны  $1,25 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{K)}$  и  $0,96 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{K)}$ .

42. Определить мощность на валу компрессора производительностью  $25 \text{ м}^3$  в минуту, работающего на подземную воздушную сеть, если первоначальное давление  $1 \text{ атм}$ , а давление, развиваемое компрессором в конце изотермического сжатия, составляет  $7 \text{ атм}$ .

43. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя  $227^\circ \text{C}$ . Определить термический коэффициент полезного действия цикла и температуру охладителя, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу  $350 \text{ Дж}$ .



44. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится еже часно 270 МДж теплоты с помощью холодильника при  $9^{\circ}\text{C}$ . Определить полезную мощность установки, если количество подводимой в час теплоты равно 900 МДж. При какой температуре подводится теплота?

45. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в три раза выше, чем температура холодильника. Нагреватель передал газу 42 кДж теплоты. Какую работу совершил газ?

46. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу, равную 200 Дж. Температура нагревателя 375 К, холодильника 300 К. Найти количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.

### 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

47. Вследствие трения о шкив ремень заряжается, причем каждый квадратный метр ремня содержит 0,02 Кл заряда. Ширина ремня 0,3 м, скорость его движения 20 м/с. Какой заряд проходит еже секундно через любую неподвижную плоскость, перпендикулярную ремню?

48. Определить заряд, емкость и потенциал Земли, считая ее шаром радиусом  $6 \cdot 10^3$  км и зная, что напряженность поля около поверхности равна 100 В/м.

49. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора 6 кВ, заряд каждой пластины 10 нКл. Найти энергию конденсатора и силу взаимного притяжения пластин, если расстояние между ними 2 см.

50. Какое количество теплоты выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами 15 кВ, расстояние 1 мм, диэлектрик слюда ( $\epsilon = 6$ ), площадь каждой пластины  $300 \text{ см}^2$  ?

51. Какую работу надо совершить , чтобы увеличить расстояние между пластинами воздушного конденсатора от 0,03 м до 0,1 м? Площадь пластин  $100 \text{ см}^2$ . Конденсатор подключен к источнику напряжения 220 В.

52. Камнедробилка должна работать под напряжением 100 В, потребляя ток в 40 А. Напряжение на электростанции 120 В, а расстояние до нее 1 км. Определить сечение медных соединительных проводов ( $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом м}$ ).

53. Какой длины надо взять нихромовый проводник диаметром 1,5 мм для изготовления спирали вулканизатора , применяемого при сращивании кабелей, если сопротивление спирали 5,5 Ом, а удельное сопротивление нихрома  $1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом м}$ ?

54. Цена деления прибора  $1,5 \cdot 10^{-5}$  А /дел. Шкала прибора имеет 200 делений, его внутреннее сопротивление 100 Ом. Какие сопротивления нужно подключить к этому прибору и каким образом, чтобы можно было измерять напряжение до 200 В или ток до 4 А?

55. Определить сопротивление медных магистральных проводов при температуре  $30^{\circ}$  С. Расстояние от места расположения проводов до взрывной станции 400 м. Площадь сечения проводов  $0,8 \text{ мм}^2$ ,  $\rho = 0,017(\text{Ом} \cdot \text{мм}^2 / \text{м})$ ,  $\alpha = 0,0044 \text{ град}^{-1}$ .

56. ЭДС батареи 12 В, ток короткого замыкания 5 А. Какую наибольшую мощность может дать батарея во внешней цепи?

57. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если при токе 5 А она дает во внешнюю цепь мощность 9,5 Вт, а при токе 8 А мощность 14,4 Вт.

58. Ток в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно нарастает от 0 до 10 А в течение 30 с. Чему равно количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике?

59. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток 50 А. Найти магнитную индукцию в точке, удаленной на расстояние 5 см от проводника.

60. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи 50 А и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого и на 40 см от второго провода.

61. Найти число витков в катушке диаметром 10 см, если магнитная стрелка, помещенная в ее центре, отклонилась от плоскости магнитного меридиана на  $38^{\circ}$  при токе 0,2 А. Горизонтальная составляющая земного магнитного поля  $12,8 \text{ А /м}$ . Плоскость катушки совпадает с плоскостью магнитного меридиана.

62. Определить горизонтальную составляющую напряженности магнитного поля Земли, если обмотка тангенс-буссоли имеет 10 витков радиусом 25 см. При токе 0,64 А стрелка отклоняется на угол  $45^{\circ}$ .

63. Плоский контур площадью  $20 \text{ см}^2$  находится в однородном магнитном поле с индукцией  $0,03 \text{ Тл}$ . Найти магнитный поток, пронизывающий контур, если его плоскость составляет угол  $60^\circ$  с линиями индукции.

64. Электромагнит изготовлен в виде тороида со средним диаметром  $51 \text{ см}$  и вакуумным зазором  $2 \text{ мм}$ . Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в зазоре, если при неизменном токе в обмотке зазор увеличить в три раза? Магнитная проницаемость сердечника тороида  $800$ .

65. Найти напряженность магнитного поля между полюсами электромагнита, если проводник массой  $10 \text{ г}$  и длиной  $1 \text{ м}$  при токе в нем  $19,6 \text{ А}$  висит в поле, не падая.

66. В однородном магнитном поле с индукцией  $0,1 \text{ Тл}$  движется проводник длиной  $10 \text{ см}$  со скоростью  $15 \text{ м/с}$ , направленной перпендикулярно к магнитному полю. Найти ЭДС, индуцированную в проводнике.

67. Обмотка электромагнита содержит  $800$  витков. Площадь сечения сердечника  $15 \text{ см}^2$ , Индукция магнитного поля в сердечнике  $1,4 \text{ Тл}$ . Вычислить величину средней ЭДС, возникающей в обмотке при размыкании тока, если ток уменьшается до нуля в течение  $0,001 \text{ с}$ .

68. На железное кольцо намотано в один слой  $200$  витков провода. Чему равна энергия Магнитного поля, если при токе  $2,5 \text{ А}$  магнитный поток в железе  $0,5 \text{ мВб}$ ?

69. Замкнутый соленоид намотан на немагнитный каркас и содержит  $20$  витков на каждый сантиметр длины. Найти объемную плотность энергии поля при токе  $1 \text{ А}$ .

70. С какой скоростью должен нарастать ток в катушке с числом витков  $800$ , площадью поперечного сечения  $10 \text{ см}^2$ , длиной  $30 \text{ см}$ , чтобы величина ЭДС самоиндукции, возникшей в ней, была равна  $25 \text{ мВ}$ ?

#### **4. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

71. Маятник для гравиметрической съемки за сутки совершил  $57600$  колебаний. Найти ускорение свободного падения, если длина маятника  $0,56 \text{ м}$ .

72. Днище вибролюка, применяемого для погрузки руды в бункер поезда из очистной камеры, совершает гармоническое колебательное движение с

амплитудой 5 мм и частотой  $1500 \text{ мин}^{-1}$ . Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

73. Стол питателя, предназначенного для погрузки руды в вагонетки, колеблется с частотой  $45 \text{ мин}^{-1}$ . Определить максимальные скорость и ускорение стола, полную энергию колебаний, если масса питателя 1000 кг, амплитуда колебаний 72 мм.

74. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.

75. Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель ВО-10, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов  $1200 \text{ мин}^{-1}$ . Определить максимальные скорость и ускорение, написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

76. Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 тонн и арматурой ствола шахты, если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота  $7 \text{ с}^{-1}$ .

77. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями:  $x = 0,5 \sin t$ ,  $y = 2 \cos t$ . Найти уравнение траектории точки, построить график ее движения.

78. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Определить разность фаз складываемых колебаний.

79. Груз, подвешенный к пружине, гармонически колеблется по вертикали с периодом 0,5 с. Коэффициент упругости пружины 4 Н/м. Определить массу груза.

80. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

81. Источник незатухающих гармонических колебаний подчиняется закону  $x = 5 \sin 3140t$  (м). Определить смещение, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 340 м от источника, через 1 с от начала колебаний, если скорость волны 340 м/с.

82. Уравнение незатухающих колебаний  $y = 0,1 \sin 0,5\pi t$  (м). Скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точек волны в момент времени 4 с после начала колебаний. Найти разность фаз для источника и точки на расстоянии 200 м от него.

83. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Определить скорость распространения волны и наибольшую скорость колебаний частиц воздуха.

84. Определить коэффициент сжатия горной породы - величину, обратную модулю Юнга, если скорость распространения звуковых волн в горной породе равна 4500 м/с, а плотность породы составляет  $2,3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

85. К одному из концов длинного стержня прикреплен вибратор, колеблющийся по закону  $y = 10^{-6} \sin 10^4 \pi t$  (м). Найти скорость точек в сечении стержня, отстоящем от вибратора на расстоянии 25 см, в момент времени  $10^{-4}$  с. Скорость волны  $5 \cdot 10^3$  м/с.

86. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 2 мГн и конденсатора емкостью 888 пФ. На какую длину волны настроен контур?

87. Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из катушки индуктивности и плоского конденсатора. Площадь каждой пластины конденсатора 30 см<sup>2</sup> и расстояние между ними 0,1 см. Число витков катушки 1000, длина ее 30 см, сечение 1 см<sup>2</sup>.

88. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 0,025 мкФ. Заряд на конденсаторе равен  $2,5 \cdot 10^{-6}$  Кл. Какова зависимость разности потенциалов на конденсаторе от времени?

89. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см<sup>2</sup> имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 см<sup>2</sup> каждая, расстояние между пластинами 5 мм, диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

90. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 25 нФ. На обкладках конденсатора сосредоточен заряд 2,5 мкКл. Написать уравнение изменения тока в цепи в зависимости от времени.

91. Разность потенциалов на конденсаторе в контуре за 1 мс уменьшается в три раза. Найти коэффициент затухания.

92. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью  $2,5 \cdot 10^8$  м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в данной среде, если частота колебаний 1 МГц?

93. Катушка с индуктивностью 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин  $0,01$  м<sup>2</sup> и расстоянием между ними 0,1 мм. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны 750 м.

94. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 80 пФ и катушки индуктивностью 0,5 мГн. Найти максимальный ток в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 300 В. На какую длину волны резонирует данный контур?

95. Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в контуре задан уравнением  $U = 50 \cos 10^4 \pi t$  (В). Емкость конденсатора равна 0,1 мкФ. Найти период колебаний, индуктивность, длину волны. Написать закон изменения тока в контуре.

96. Колебательный контур состоит из конденсатора переменной емкости от 12 пФ до 80 пФ и катушки с индуктивностью 1,2 мГн. Найти диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре.

97. Индуктивность колебательного контура 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость контура, чтобы он резонировал на длину волны 300 м?

98. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения  $3$  см<sup>2</sup>

имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью  $75$  см<sup>2</sup> каждая, расстояние между пластинами 5 мм, диэлектрик -воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

99. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости 2 мкФ получить частоту 1000 Гц?

100. Индуктивность катушки в колебательном контуре 20 мкГн. Требуется настроить этот контур на частоту 5 МГц. Какую емкость следует выбрать?

101. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами по  $100$  см<sup>2</sup> каждая и катушки с индуктивностью 1 мкГн резонирует на волну длиной 10 м. Найти расстояние между пластинами конденсатора.

## 5. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

102. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга 1 мм, расстояние от щелей до экрана 3 м, расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране 1,5 мм. Найти длину волны источника монохроматического света.

103. Оранжевые лучи с длиной волны 650 нм от двух когерентных источников, расстояние между которыми 120 мкм, падают на экран. Расстояние от источников до экрана 3,6 м. Найти расстояние между центрами соседних темных полос на экране.

104. Какую наименьшую толщину должна иметь пластинка, сделанная из материала с показателем преломления 1,54, чтобы при освещении ее лучами с длиной волны 750 нм, перпендикулярными к пластинке, она в отраженном свете казалась красной?

105. Между двумя плоскопараллельными пластинками лежит проволочка, отчего образовался воздушный клин. Пластинки освещаются светом с длиной волны 500 нм. Угол падения лучей  $0^\circ$ , длина пластинки 10 см. Расстояние между интерференционными полосами в отраженном свете 1,8 мм. Найти толщину проволочки.

106. Плосковыпуклая линза ( $n=1,5$ ) с оптической силой 0,5 диоптрий выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Найти радиус пятого темного кольца Ньютона в проходящем свете ( $\lambda=600$  нм).

107. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы 4 м. Чему равна длина волны падающего света, если радиус 5-го светлого кольца Ньютона в отраженном свете равен 3,6 мм?

108. На щель шириной 0,2 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны 640 нм. Определить угол отклонения лучей, соответствующих первой светлой дифракционной полосе.

109. На пластинку со щелью падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному минимуму, равен  $1^\circ$ . Сколько длин волн падающего света составляет ширина щели?

110. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет ( $\lambda=0,6$  мкм). Найти угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

111. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия с длиной волны 670 нм спектра второго порядка?

112. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (400 нм) спектра третьего порядка?

113. На дифракционную решетку, имеющую 800 штрихов на 1 мм, падает параллельный пучок белого света. Какова разность углов отклонения конца первого и начала второго спектров? Принять длину волны красного света 760 нм, фиолетового 400 нм.

114. На дифракционную решетку, содержащую 50 штрихов на миллиметр, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проектируется на экран с помощью линзы, помещенной вблизи решетки. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 3 м. Границы видимого спектра 400 нм и 760 нм.

115. Угол преломления луча света в жидкости равен  $35^\circ$ . Определить показатель преломления этой жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.

116. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были бы наиболее полно поляризованы.

117. Предельный угол полного внутреннего отражения луча на границе жидкости с воздухом равен  $43^\circ$ . Каков должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был максимально поляризован?

118. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен  $57^\circ$ . Определить скорость распространения света в этом кристалле.

119. Угол между плоскостями поляризации двух призм Николя равен  $45^\circ$ . Во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего через николи, если этот угол увеличить до  $60^\circ$ ?



120. Температура «голубой» звезды  $3 \cdot 10^4 \text{K}$ . Определить интегральную интенсивность излучения и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

121. Приняв температуру поверхности Солнца равной  $6000 \text{K}$ , определить энергию, излучаемую с одного квадратного метра за секунду и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

122. Поток энергии, излучаемой из смотрового окошка печи за секунду, равен  $34 \text{Вт}$ .  
Найти температуру печи, если площадь отверстия  $6 \text{см}^2$ .

123. Средняя величина энергии, теряемой вследствие излучения с одного квадратного сантиметра поверхности Земли за минуту, равна  $0,55 \text{Дж}$ . Какую температуру должно иметь абсолютно черное тело, излучающее такое же количество энергии?

124. Печь при температуре  $1100 \text{K}$  посылает на измерительный прибор некоторое тепловое излучение. Какова должна быть температура печи, чтобы получаемое прибором излучение увеличилось в два, четыре и шестнадцать раз?

125. Максимальная лучеиспускательная способность абсолютность черного тела приходится на длину волны  $800 \text{нм}$ . Какая мощность должна быть подведена к этому телу, поверхность которого  $100 \text{см}^2$ , чтобы поддерживать его при постоянной температуре.

126. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела, максимум испускательной способности сместился с  $500 \text{нм}$  на  $750 \text{нм}$ . Во сколько раз уменьшилась суммарная мощность излучения?

127. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта равна  $307 \text{нм}$  и кинетическая энергия фотоэлектрона  $1 \text{эВ}$ ?

128. Калий (работа выхода  $2 \text{эВ}$ ) освещается монохроматическим светом с длиной волны  $509 \text{нм}$ . Определить максимально возможную кинетическую энергию фотоэлектронов.

129. Определить работу выхода электрона из цезия и серебра, если красная граница фотоэффекта у этих металлов составляет соответственно  $660 \text{нм}$  и  $260 \text{нм}$ .

130. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует видимой части спектра с длиной волны 500 нм.

131. Определить давление света на стенки электрической стоваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом 5 см. Стенки лампы отражают 10 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

132. На поверхность площадью 100 см<sup>2</sup> ежеминутно падает 63 Дж световой энергии. Найти величину светового давления, если поверхность полностью отражает все лучи и если полностью поглощает все лучи.

133. Давление света с длиной волны 600 нм на черную поверхность равно  $2,2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}^2$ . Сколько фотонов падает на 1 см<sup>2</sup> за одну секунду?

## 6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА И ФИЗИКА АТОМА

134. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Выделить эту спектральную линию на схеме энергетических уровней атома водорода. Постоянная Ридберга равна  $1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ .

135. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена). Начертить схему энергетических уровней атома водорода.

136. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны 121,5 нм. Определить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода.

137. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

138. Определить длины волн де Бройля для электрона и протона, движущихся со скоростью 1000 км/с. Масса электрона  $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ , масса протона  $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ .

139. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,10 нм ?

140. Определить длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

141. Электрон, движущийся со скоростью  $6 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ , попадает в продольное ускоряющее однородное электрическое поле напряженностью 5 В/см. Какое расстояние должен пройти электрон в таком поле, чтобы его длина волны стала равной 0,10 нм?

142. Рассчитать дебройлевскую длину волны для протона с кинетической энергией, равной энергии покоя электрона  $0,51\text{МэВ}$ .

143. Найти коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на  $23\text{ кВ}$  увеличивает искомую длину волны в два раза.

144. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоде трубки, составляет  $0,85$  скорости света.

145. Для определения постоянной Планка к рентгеновской трубке приложили напряжение  $16\text{ кВ}$  и определили минимальную длину волны сплошного рентгеновского излучения ( $\lambda_{\text{мин}} = 77,6\text{ пм}$ ). Вычислить по этим данным постоянную Планка.

146. Частица в потенциальной яме шириной  $l$  находится в возбужденном состоянии ( $n=2$ ).

Вычислить вероятность нахождения частицы в крайней четверти ямы.

46. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?

147. В одномерной потенциальной яме шириной  $l$  находится электрон. Найти вероятность нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале  $l/4$ , равноудаленном от стенок ямы.

148. Вычислить величину момента импульса  $L$  орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в  $s$ -состоянии и в  $p$ -состоянии.

149. Частица в потенциальной яме шириной  $l$  находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале  $l/4$ , равноудаленном от стенок ямы.

150. Определить возможные значения проекции момента импульса  $L_z$  орбитального движения электрона в атоме водорода на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в  $d$ -состоянии.

151. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии ( $n=3$ ).

## 7. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

152. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за секунду. Во сколько раз уменьшится активность препарата стронция  ${}_{38}\text{Sr}^{90}$  через 100 лет? Период полураспада равен 28 лет.

153. Сколько  $\beta$ -частиц испускает в течение одного часа 1 мкг изотопа  ${}_{11}\text{Na}^{24}$ , период полураспада которого составляет 15 часов?

154. Препарат  ${}_{92}\text{U}^{238}$  массой 1 г излучает  $1,24 \cdot 10^4$   $\alpha$ -частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа урана и активность препарата.

155. Найти число распадов за одну секунду в 1 г радия, период полураспада которого 1590 лет. Молярная масса радия 0,226 кг/моль.

156. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за одну секунду. Во сколько раз уменьшится активность иода  ${}_{53}\text{J}^{124}$  спустя 12 суток? Период полураспада равен четырем суткам.

157. Сколько  $\beta$ -частиц испускается в течение суток при распаде изотопа фосфора  ${}_{15}\text{P}^{32}$  массой 1 мкг? Период полураспада 14,3 суток.

158. Активность препарата уменьшилась в 256 раз. Сколько периодов полураспада составляет промежуток времени, за который произошло такое уменьшение активности?

159. За один год начальное количество радиоактивного вещества уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

60. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется нераспавшейся через промежуток времени, равный двум периодам полураспада?

160. Дефект массы ядра  ${}_{7}\text{N}^{15}$  равен 0,12396 а.е.м. Определить массу атома. ( $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$  а.е.м.;  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$  а.е.м.).

161. Найти удельную энергию связи ядра  ${}_{6}\text{C}^{12}$ , если известно, что  $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$  а.е.м.;  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$  а.е.м.;  $m_{{}_{12}\text{C}^6} = 12,00000$  а.е.м.

162. Рассчитать массу нейтрального атома, если ядро его состоит из трех протонов и двух нейтронов, а энергия связи ядра равна 26,3 Мэв. ( $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$  а.е.м.;  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$  а.е.м.).

163. Определить энергию связи ядра изотопа кислорода  ${}_{8}\text{O}^{16}$ , если  $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$  а.е.м.;  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$  а.е.м.;  $m_{{}_8\text{O}^{16}} = 15,99491$  а.е.м.

164. Определить энергию связи, приходящуюся на один нуклон ядра атома  ${}_{11}\text{Na}^{23}$ , если  $m_{{}_{11}\text{Na}^{23}} = 22,98977 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867 \text{ а.е.м.}$

165. Найти дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра  ${}_{3}\text{Li}^7$ , если известно, что  $m_{{}_{3}\text{Li}^7} = 7,01601 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867 \text{ а.е.м.}$

166. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода  ${}_{1}\text{H}^1$  равна 13,6 эВ. Определить, насколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.

167. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра  ${}_{5}\text{B}^{11}$ , если известны следующие массы:  $m_{{}_{5}\text{B}^{11}} = 11,00931 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867 \text{ а.е.м.}$

168. Найти энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра  ${}_{11}\text{Na}^{23}$ , если известны следующие массы:  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_{11}\text{Na}^{23}} = 22,98977 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_{11}\text{Na}^{22}} = 21,99444 \text{ а.е.м.}$

169. Найти энергию отрыва нейтрона от ядра  ${}_{2}\text{He}^4$ , если известны массы:  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_{2}\text{He}^4} = 4,00260 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_{2}\text{He}^3} = 3,01603 \text{ а.е.м.}$

170. Найти энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра  ${}_{8}\text{O}^{16}$  ( ${}_{8}\text{O}^{16} \rightarrow {}_{7}\text{N}^{15} + {}_{1}\text{H}^1$ ).  $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_{8}\text{O}^{16}} = 15,99491 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_{7}\text{N}^{15}} = 15,00011 \text{ а.е.м.}$

171. Найти изменение массы при следующей ядерной реакции:  
 ${}_{13}\text{Al}^{27} + {}_{2}\text{He}^4 \rightarrow {}_{15}\text{P}^{30} + {}_{0}\text{n}^1$ , если  $m_{{}_{13}\text{Al}^{27}} = 26,98154 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_{2}\text{He}^4} = 4,00260 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_{15}\text{P}^{30}} = 29,97263 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867 \text{ а.е.м.}$

172. Вычислить энергетический эффект ядерной реакции:  ${}_{1}\text{H}^2 + {}_{1}\text{H}^3 \rightarrow {}_{2}\text{He}^4 + {}_{0}\text{n}^1$ , если  $m_{{}_1\text{H}^2} = 2,01410 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_1\text{H}^3} = 3,01605 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_{2}\text{He}^4} = 4,00260 \text{ а.е.м.}$

173. В термоядерном реакторе с дейтериевым горючим может происходить вторичная термоядерная реакция  ${}_{2}\text{He}^3 + {}_{1}\text{H}^2 \rightarrow {}_{2}\text{He}^4 + {}_{1}\text{H}^1$ . Вычислить энергию этой реакции. ( $m_{{}_{2}\text{He}^3} = 3,01603 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_1\text{H}^2} = 2,01410 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_{2}\text{He}^4} = 4,00260 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783 \text{ а.е.м.}$ ).

174. Вычислить энергию ядерной реакции  ${}_{7}\text{N}^{14} + {}_{0}\text{n}^1 \rightarrow {}_{6}\text{C}^{14} + {}_{1}\text{H}^1$ . ( $m_{{}_{7}\text{N}^{14}} = 14,00307 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_{6}\text{C}^{14}} = 14,00324 \text{ а.е.м.}$ ;  $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783 \text{ а.е.м.}$ ).

175. Определить энергию ядерной реакции  ${}_3\text{Li}^6 + {}_1\text{H}^2 \rightarrow {}_2\text{He}^4 + {}_2\text{He}^4$ . ( $m_{{}_3\text{Li}^6} = 6,01513$  а.е.м.;  $m_{{}_1\text{H}^2} = 2,01410$  а.е.м.;  $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$  а.е.м.).

176. Какую минимальную энергию должен иметь квант для вырывания нейтрона из ядра  ${}_6\text{C}^{14}$ ? Известны массы:  $m_{{}_6\text{C}^{14}} = 14,00324$  а.е.м.;  $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$  а.е.м.;  $m_{{}_6\text{C}^{13}} = 13,00335$  а.е.м.

177. Какую минимальную энергию необходимо затратить, чтобы разделить  ${}_6\text{C}^{12}$  на три равные части. ( $m_{{}_6\text{C}^{12}} = 12,00000$  а.е.м.;  $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$  а.е.м.).

178. Определить энергию ядерной реакции  ${}_{20}\text{Ca}^{44} + {}_1\text{H}^1 \rightarrow {}_{19}\text{K}^{41} + 2\text{He}^4$ . ( $m_{{}_{20}\text{Ca}^{44}} = 43,95549$  а.е.м.;  $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$  а.е.м.;  $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$  а.е.м.;  $m_{{}_{19}\text{K}^{41}} = 40,96184$  а.е.м.)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная литература

#### 8.1 Основная литература

1.	И.Г. Коршунов. Физика. – Екатеринбург: Ид-во УГГУ, 2014. – 341 с.
2.	В.И. Горбатов, В.Ф. Полев. Физика. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ (Ч.1, 2012.-105 с.; Ч.2, 2013.-115 с.; Ч.3.- 2014.-147 с.)
3.	Михайлов В.К. Физика: учебное пособие/ Михайлов В.К.— Электрон. текстовые данные.- М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.-120 с.-Режим доступа: <a href="http://www.iprbookshop.ru/23753.html">http://www.iprbookshop.ru/23753.html</a> - ЭБС «IPRbooks».
4.	Михайлов В.К. Волны. Оптика. Атомная физика. Молекулярная физика: учебное пособие/ Михайлов В.К., Панфилова М.И.-Электрон. текстовые данные.-М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2016.-144 с.-Режим доступа: <a href="http://www.iprbookshop.ru/62614.html">http://www.iprbookshop.ru/62614.html</a> -ЭБС «IPRbooks».
5.	Трофимова Т.М. Курс физики. Академия, 2010.- 560 с.

#### Дополнительная литература

1. И.Г. Коршунов. Основы физики.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. - 312 с.
2. Ветрова В.Т. Физика. Сборник задач: учебное пособие/ Ветрова В.Т.- Электрон. текстовые данные.- Минск: Вышэйшая школа, 2015.-446 с.- Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/48021.html> -ЭБС «IPRbooks».
3. Чакак А.А. Физика. Краткий курс: учебное пособие для студентов очно-заочной формы обучения вузов, слушателей курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, для студентов факультета дистанционных образовательных технологий/ Чакак А.А., Летута С.Н. Электрон. текстовые данные. Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2011.-541 с. - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/30092.html> - ЭБС «IPRbooks».
4. Сарина М.П. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Часть 1. Механика: учебное пособие/ Сарина М.П.- Электрон. текстовые данные.- Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014.- 187 с.- Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45392.html> - ЭБС «IPRbooks».

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

#### Некоторые физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Скорость света в вакууме	$c$	$3.00 \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная	$G$	$6.67 \cdot 10^{-11}$ м <sup>3</sup> /(кг·с <sup>2</sup> )
Число Авогадро	$N_A$	$6.02 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Молярная газовая постоянная	$R$	8.31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	$k$	$1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Атомная единица массы	$1a.e.m.$	$1.660 \cdot 10^{-27}$ кг
Элементарный заряд	$e$	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_e$	$9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p$	$1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	$8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	$h$	$6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж/с
	$\hbar$	$1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж/с

### Приложение 2

#### Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Наименование	Приставка		Множитель	Приставка			Множитель
	Обозначение			Наименование	Обозначение		
	русское	международное			русское	международное	
экса	Э	E	$10^{18}$	деци	д	d	$10^{-1}$
пэта	П	P	$10^{15}$	санتي	с	c	$10^{-2}$
тера	Т	T	$10^{12}$	милли	м	m	$10^{-3}$
гига	Г	G	$10^9$	микро	мк	μ	$10^{-6}$
мега	М	M	$10^6$	нано	н	n	$10^{-9}$
кило	к	k	$10^3$	пико	п	p	$10^{-12}$
Гекто	г	h	$10^2$	фемто	ф	f	$10^{-15}$
Дека	да	da	$10^1$	атто	а	a	$10^{-18}$

*Примечание:* Приставки гекто, дека, деци и санти допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.)



## Приложение 3

### Единицы физических величин, имеющие собственные наименования

Величина	Единица	
	Наименование	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср
Сила, вес	ньютон	Н
Давление	паскаль	Па
Напряжение (механическое)	паскаль	Па
Модуль упругости	паскаль	Па
Работа, энергия	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт
Частота колебаний	герц	Гц
Термодинамическая температура	кельвин	К
Разность температур	кельвин	К
Теплота, количество теплоты	джоуль	Дж
Количество вещества	моль	моль
Электрический заряд	кулон	Кл
Сила тока	ампер	А
Потенциал электрического поля, электрическое напряжение	вольт	В
Электрическая емкость	фарад	Ф
Электрическое сопротивление	ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Магнитная индукция	тесла	Тл
Магнитный поток	вебер	Вб
Индуктивность	генри	Гн
Сила света	кандела	кд
Световой поток	люмен	лм
Освещенность	люкс	лк
Поток излучения	ватт	Вт
Поглощенная доза излучения (доза излучения)	грэй	Гр
Активность изотопа	беккерель	Бк

## Внесистемные единицы

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна	т	$10^3$ кг
	атомная единица массы	а.е.м.	$1.66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	минута	мин	60 с
	час	ч	3600 с
	сутки	сут	86400 с
Плоский угол	градус	...°	$1.74 \cdot 10^{-2}$ рад
	минута	...'	$2.91 \cdot 10^{-4}$ рад
	секунда	...''	$4.85 \cdot 10^{-6}$ рад
	град	град	$(\pi/200)$ рад
Объем, вместимость	литр	л	$10^{-3}$ м <sup>3</sup>
Длина	астрономическая единица	а.е.	$1.50 \cdot 10^{11}$ м
	световой год	св. год	$9.46 \cdot 10^{15}$ м
	парсек	пк	$3.08 \cdot 10^{16}$ м
Оптическая сила	диоптрия	Дптр	$1$ м <sup>-1</sup>
Площадь	гектар	Га	$10^4$ м <sup>2</sup>
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Полная мощность	вольт-ампер	В·А	
<i>Примечание:</i> Единицы времени (минуту, час, сутки), плоского угла (градус, минуту, секунду), астрономическую единицу, световой год, диоптрию и атомную единицу массы не допускается применять с приставками.			

## Плотность некоторых твердых тел

Твердое тело	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Твердое тело	Плотность, г/см <sup>3</sup>
Алюминий	2.70	Цезий	1.90
Барий	3.50	Каменная соль	2,2
Ванадий	6.02	Латунь	8,55
Висмут	9.80	Марганец	7,40
Железо (чугун, сталь)	7.88	Платина	21,4
Литий	0.53	Золото	19,3
Медь	8.93	Висмут	9,8
Никель	8.90	Уран	18,7
Свинец	11.3	Цинк	7.15
Серебро	10.5	Вольфрам	19,3

## Приложение 6

### Плотность некоторых жидкостей и газов

Жидкость (при 15° С)	Плотность, г./см <sup>3</sup>	Газ (при нормальных условиях)	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Вода ( дистиллированная при 4°С)	1.00	Водород	0.09
Глицерин	1.26	Воздух	1.29
Керосин	0.8	Гелий	0.18
Ртуть	13.6	Аргон	1,78
Масло (оливковое, смазочное)	0.9	Азот	1,25
Масло касторовое	0.96	Кислород	1.43
Сероуглерод	1.26		
Эфир	0.7		
Спирт	0.80		

## Приложение 7

### Удельное сопротивление $\rho$ некоторых материалов

Материал	Удельное сопротивление, Ом·м	Материал	Удельное сопротивление, Ом·м
Алюминий	$2,53 \cdot 10^{-8}$	Ртуть	$9,6 \cdot 10^{-7}$
Алюминий провод	$2,87 \cdot 10^{-8}$	Свинец	$2,08 \cdot 10^{-7}$
Бумага	$10^{15}$	Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$
Вода	$10^4$	Сталь литая	$1,3 \cdot 10^{-7}$
Вода дистиллированная			
Вода морская	0,3	Сталь чистая	$1,01 \cdot 10^{-7}$
Вольфрам	$5,5 \cdot 10^{-8}$	Стекло	$10^{11}$
Графит	$3,9 \cdot 10^{-6}$	Стекло кварцевое	$10^{16}$
Железо чистое	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Угольные щётки	$4 \cdot 10^{-5}$
Железо	$8,7 \cdot 10^{-8}$	Цинк	$5,9 \cdot 10^{-8}$
Золото	$2,2 \cdot 10^{-8}$	Чугун серый	$1 \cdot 10^{-6}$
Константан	$5 \cdot 10^{-7}$	Никель	$8,7 \cdot 10^{-8}$
Масло парафиновое	$10^{14}$	Нихром	$1,12 \cdot 10^{-6}$
Магний	$4,4 \cdot 10^{-8}$	Олово	$1,2 \cdot 10^{-7}$
Манганин	$4,3 \cdot 10^{-7}$	Платина	$1,07 \cdot 10^{-7}$
Медь	$1,72 \cdot 10^{-8}$	Медь провод	$1,78 \cdot 10^{-8}$

## Приложение 8

### Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Ацетон	21,4	Парафин	2,0
Вакуум	1,0	Парафинированная бумага	2,0
Воздух	1,000594	Полиэтилен	2,2
Вода	81	Слюда	7,0
Вода дистиллированная	31	Спирт этиловый	25,1
Воск	7,8	Спирт метиловый	33,5
Керосин	2,0	Стекло	7,0
Масло	5,0	Фарфор	5,0
Масло трансформаторное	2,2	Эбонит	2,6

## Приложение 9

### Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
Α, α	Альфа	Ν, ν	ню
Β, β	Бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	Гамма	Ο, ο	омикрон
Δ, δ	Дэльта	Π, π	пи
Ε, ε	Эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	Дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	Эта	Τ, τ	тау
Θ, θ	Тэта	Υ, υ	ипсилон
Ι, ι	Иота	Φ, φ	фи
Κ, κ	Каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	Ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	Ми	Ω, ω	омега

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания к решению задач и выполнению домашних контрольных работ	3
1. Механика	4
2. Молекулярная физика и термодинамика	7
3. Электричество и магнетизм	9
4. Механические и электромагнитные колебания и волны	11
5. Волновая и квантовая оптика	15
6. Квантовая физика и физика атома	18
7. Элементы ядерной физики	20
Список литературы	23
Приложения	24



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный  
университет»

**П. А. Осипов**

## **КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

**Методические рекомендации и задания к  
контрольной работе для студентов направления  
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника,  
профиля бакалавриата Электротехнические  
комплексы и системы горных и промышленных  
предприятий**

**Год набора: 2021**

*для студентов  
очной и заочной формы обучения*

**Екатеринбург**

**2020**

*Контрольная работа*

*Контрольная работа задание №1:* Организовать параллельные взаимодействующие вычисления с помощью механизма рандеву, разделить доступ к ресурсам с помощью семафора и монитора на языке программирования АДА.

Задача 1. При помощи механизма рандеву синхронизировать работу задач ПРОИЗВОДИТЕЛЬ и ПОТРЕБИТЕЛЬ.

*Условия:* Имеется следующий текст программы работы несинхронизированных задач:

--задача-ПРОИЗВОДИТЕЛЬ (WRITER) изменяет разделяемую переменную N

--задача-ПОТРЕБИТЕЛЬ (READER) отображает значение переменной на экране

with SMALL\_SP; use SMALL\_SP; -- определение используемых пакетов

procedure NO\_CONNECT is -- начало процедуры

N:INTEGER:=0; -- разделяемая переменная N

task WRITER; -- спецификация задачи ПРОИЗВОДИТЕЛЬ

task READER; -- спецификация задачи ПОТРЕБИТЕЛЬ

task body WRITER is -- тело (секция кода) задачи ПРОИЗВОДИТЕЛЬ

begin

LOOP -- цикл

N:=N+1; -- изменение переменной N

end LOOP; -- бесконечный цикл

end WRITER;

task body READER is -- тело задачи ПОТРЕБИТЕЛЬ

I:INTEGER:=0; -- счетчик секунд

begin

LOOP -- цикл

DELAY 1.0; -- задержка на 1 секунду

I:=I+1; -- увеличить счетчик секунд

CURSORAT(4,10); -- установить курсор

PUT("PROSHLO");PUT(I); PUT\_LINE("SEKUND"); --отображение времени

PUT("N= "); PUT\_LINE(N);--отображение переменной N

end LOOP;

end READER;

begin -- начало исполняемого кода процедуры

PUT\_LINE("ODNOVREMENNOE VIPOLNENIE ZADACH PROIZVODITEL I POTREBITEL");

end NO\_CONNECT; -- конец процедуры

1 Вариант: задача ПРОИЗВОДИТЕЛЬ передает сообщение о возможности считывания данных, а задача ПОТРЕБИТЕЛЬ ожидает сообщение и отображает данные при получении сообщения.

2 Вариант: задача ПОТРЕБИТЕЛЬ передает сообщение о возможности считывания данных, а задача ПРОИЗВОДИТЕЛЬ ожидает сообщение и отображает данные при получении сообщения.

3 Вариант: задача ПОТРЕБИТЕЛЬ передает сообщение о возможности считывания данных и отображает данные при получении сообщения, а задача ПРОИЗВОДИТЕЛЬ ожидает сообщение и отображает данные при получении сообщения.

Напишите программы на языке программирования АДА по 3-м вариантам работы алгоритма рандеву.

*Контрольная работа задание №2:* Определить тип топологии физических связей компьютерной сети. Выбрать способ адресации узлов сети, коммутации и маршрутизации.

Задача 1. Имеются утилиты стека протокола TCP/IP:

Название	Назначение	Пример
<b>hostname</b>	Выводит имя локального хоста.	hostname
<b>ipconfig</b>	Показывает параметры конфигурации протокола TCP/IP: IP-адрес, маску подсети и адрес основного шлюза.	ipconfig
<b>ping</b>	Проверяет соединение с удаленным хостом с помощью отправки и получения эхо-пакетов.	ping ursmu.ru
<b>tracert</b>	Определяет маршрут прохождения пакетов до удаленного хоста.	tracert ursmu.ru
<b>arp</b>	Отображение и изменение таблицы преобразования IP-адресов в физические, используемые протоколом разрешения адресов ARP (Address Resolution Protocol).	arp -a
<b>route</b>	Модифицирует таблицы маршрутизации IP. Отображает содержимое таблицы, добавляет и удаляет маршруты IP.	route print
<b>netstat</b>	Выводит статистику и текущую информацию по соединению TCP/IP.	netstat -e
<b>nslookup</b>	Отправляет запрос к DNS серверу с текстовым адресом сайта и получает соответствующий IP-адрес.	nslookup ursmu.ru

Условия: Список удаленных хостов 192.168.0.1, ursmu.ru, e1.ru, yandex.ru.

1 Вариант: Выведите на экран имя локального хоста с помощью команды hostname.

Проверьте конфигурацию TCP/IP с помощью утилиты ipconfig. Заполните таблицу:

Имя хоста	
IP-адрес	
Маска подсети	
Основной шлюз	

Проверьте правильность установки и конфигурирования TCP/IP на локальном компьютере с помощью утилиты ping. С помощью команды tracert проверьте, через какие промежуточные узлы идет сигнал до хоста: ursmu.ru. Узнайте ip-адреса узла: ursmu.ru.

2 Вариант: выведите на экран имя локального хоста с помощью команды ipconfig.

Проверьте конфигурацию TCP/IP с помощью утилиты ipconfig. Заполните таблицу:

Используется ли DHCP (адрес DHCP-сервера)	
Описание адаптера	
Физический адрес сетевого адаптера	

Проверьте функционирование основного шлюза, пошлав 5 эхо-пакетов длиной 64 байта. С помощью команды tracert проверьте, через какие промежуточные узлы идет сигнал до хоста: e1.ru. Узнайте ip-адреса узла: e1.ru.

3 Вариант: выведите на экран имя локального хоста с помощью команды ipconfig /all.

Проверьте конфигурацию TCP/IP с помощью утилиты ipconfig. Заполните таблицу:



Адрес DNS-сервера	
Адрес WINS-сервера	

Проверьте возможность установления соединения с удаленным хостом: ursmu.ru.

С помощью команды tracert проверьте, через какие промежуточные узлы идет сигнал до хоста: yandex.ru. Узнайте ip-адреса узла: yandex.ru.

Выполните команды стека протоколов TCP/IP в командной строке по 3-м вариантам.

*Контрольная работа задание №3:* Выполнить нормализацию, декомпозицию таблицы базы данных; привести таблицу базы данных в первую нормальную форму и нормальную форму Бойса-Кодда.

Задача 1. Имеется таблица базы данных:

**Таблица 1. Библиотека**

Идентификатор книги	ФИО автора книги	Название книги	Год издания	Издательство	Цена	Является ли новым изданием	Краткая аннотация	Количество экземпляров	Номер читательского билета	ФИО читателя	Адрес читателя
11,12,13,14	Лев Николаевич Толстой	Война и мир, Том 1, 2, 3,4	2011	Мир	400.00 руб .. 500.00 руб .. 600.00 руб .. 700.00 руб .	Да	Роман-эпопея Льва Николаевича Толстого, описывающий русское общество в эпоху войн против Наполеона в 1805—1812 годах	100, 200, 300, 400	7011	Петр Кириллович Безухов	Свердловская обл., г. Екатеринбург, 8 Марта, 82А, ком. 554
20	Федор Михайлович Достоевский	Идиот	2007	Мир	400.00 руб .	Нет	Роман Фёдора Михайловича Достоевского, впервые опубликован с января 1868 по январь 1869 в журнале «Русский вестник».	100	7012	Лев Николаевич Мышкин	Свердловская обл., г. Екатеринбург, 8 Марта, 82А, ком. 555
30	Николай Васильевич Гоголь	Мертвые души	2008	Наука	800.00 руб .	Да	Сюжет поэмы был подсказан Гоголю Александром Сергеевичем	1000	7012	Лев Николаевич Мышкин	Свердловская обл., г. Екатеринбург, 8 Марта,

							м Пушкиным предположи тельно в сентябре 18 31 года.				82А, ком. 555
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---------------------

Выполнить нормализацию, декомпозицию таблицы базы данных; привести таблицу базы данных в первую нормальную форму и нормальную форму Бойса-Кодда.

1 Вариант: Добавочный столбец:

<b>Телефон читателя</b>
+79998887766
+79998887767
+79998887767

2 Вариант: Добавочный столбец:

<b>Дата выдачи книги</b>
01.09.2013
01.10.2013
01.09.2013

3 Вариант: Добавочный столбец:

<b>Дата сдачи книги</b>
01.10.2013
01.11.2013
01.10.2013

### Литература

1. Олифер В. Г. Сетевые операционные системы: учебник для вузов / В. Г. Олифер В. Г., Н. А. Олифер. - Санкт-Петербург: Питер, 2002. - 544 с.
2. Олифер В. Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: учебник для вузов / В. Г. Олифер, Н. А. Олифер - 2-е изд. - Санкт-Петербург: Питер, 2003. - 864 с.
3. Реляционные базы данных: учебное пособие / П. А. Осипов, А. Л. Карякин, М. Б. Носырев; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2016. – 83 с.
4. Гордеев А. В. Системное программное обеспечение: учебник для вузов / А. В. Гордеев А. В., А. Ю. Молчанов. - Санкт-Петербург: Питер, 2003. - 736 с.
5. Бройдо В. Л. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации: учебное пособие для вузов / В. Л. Бройдо - Санкт-Петербург : Питер, 2003. - 688 с.



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

**ФГБОУ ВО**

**«Уральский государственный горный  
университет»**

**П. А. Осипов**

## **КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

***Методические указания по организации  
самостоятельной работы для студентов  
направления 13.03.02 Электроэнергетика и  
электротехника, профиля бакалавриата  
Электротехнические комплексы и системы  
горных и промышленных предприятий***

**Год набора: 2021**

**Екатеринбург  
2020**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Тематический план дисциплины.....</b>	<b>4</b>
<b>2. Тематика лабораторных, практических работ .....</b>	<b>6</b>
<b>3. Вопросы к экзамену по дисциплине .....</b>	<b>7</b>
<b>4. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины .....</b>	<b>9</b>
<b>5. Перечень ресурсов информационнотелекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины .....</b>	<b>9</b>
<b>6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем .....</b>	<b>9</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по самостоятельной работе студентов (СРС) определяют виды, требования к выполнению и отчетности, рекомендации по выполнению СРС.

Целью методических рекомендаций является повышение эффективности процесса обучения по основной образовательной программе путем правильной организации и выполнения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа есть планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская деятельность студентов, осуществляемая, в основном, во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. В настоящих методических указаниях предметом является самостоятельная учебная работа.

Основными видами самостоятельной учебной работы являются:

*самовоспроизводящая* – самостоятельное прочтение, просмотр, конспектирование учебной литературы и информации Интернет-ресурсов, прослушивание лекций, аудио- и видеоматериалов, заучивание, пересказ, запоминание, повторение учебного материала и др.;

*поисковая* – подготовка сообщений, докладов, выступлений на семинарских и практических занятиях, подбор литературы по дисциплинарным проблемам и литературы по теме рефератов, контрольных и курсовых работ и др.;

*творческая* – написание рефератов, выполнение курсового проекта, подготовка выпускной работы (проекта), выполнение специальных заданий и др.

Самостоятельная учебная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим, семинарским, лабораторным работам и др.) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными темами учебных дисциплин в соответствии с учебно-тематическими планами;
- написание рефератов, докладов, эссе;
- подготовку ко всем видам практики и выполнение предусмотренных ими заданий;
- выполнение письменных контрольных и курсовых работ;
- подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе к коллоквиумам, экзаменам и зачетам, тестированию и интернет-тестированию, государственным экзаменам;
- подготовку к итоговой государственной аттестации, в том числе выполнение выпускной квалификационной работы (проекта) или магистерской диссертации;
- другие виды учебной деятельности, организуемой и осуществляемой вузом, факультетом или кафедрой.

Виды заданий для выполнения самостоятельной работы: сообщение или доклад на семинарском занятии, реферат, расчетно-графическая работа, курсовая работа и курсовой проект, выпускная квалификационная работа, магистерская диссертация. Темы заданий для выполнения учебной самостоятельной работы студентов указывает преподаватель.

### **Методические рекомендации к планированию и выполнению самостоятельной учебной работы**

Приступая к изучению учебной дисциплины, следует ознакомиться с рабочей учебной программой или тематическим планом дисциплины (табл. 1), перечнем обязательной и дополнительной учебной, научной и методической литературы (раздел 4), получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

Вопросы для экзамена, указанные в настоящих методических указаниях (раздел 3), могут быть использованы студентом для углубленного изучения содержания дисциплины. Студент имеет право выбирать дополнительно интересующие его темы для самостоятельной работы.

Студентам должны самостоятельно выполнять индивидуальные письменные задания и упражнения, предлагаемые при подготовке к учебным занятиям.

Серьезная организованная работа по подготовке к семинарским занятиям, написанию письменных работ значительно облегчит подготовку к экзаменам и зачетам. При подготовке к зачету, экзамену студент должен повторить, как правило, ранее изученный материал. В этот период играют большую роль подготовленные заранее записи и конспекты.

*Контрольная работа* (КР) предназначена для выработки умения дать лаконичный аргументированный полный ответ на вопрос изучаемого курса, снабженный выводами. Как правило, она выполняется студентами, обучающимися по заочной форме обучения. Написание ее требует самостоятельности и ответственного отношения, способности работать с литературой по проблеме, знаний истории и теории вопроса, основных теоретических положений. Успешное выполнение контрольной работы учитывается при выставлении экзаменационной оценки. Объем работы не должен превышать 8-10 страниц печатного или рукописного текста, и содержать титульный лист, основную часть работы, список использованной литературы.

*Расчетно-графическая работа* (РГР) содержит задание на выполнение законченного инженерного расчета по выбору или проверке узлов или составных частей электротехнических систем в составе электротехнического комплекса.

Термин *реферат* (Р) имеет два смысла, во-первых, это краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним и, во-вторых, это вид самостоятельной работы студента, под которым понимается краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п., другими словами, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Рефераты в как вид самостоятельной работы студента оцениваются по следующим основным критериями: актуальность содержания, теоретический уровень, глубина и полнота анализа фактов, явлений, проблем, относящихся к теме; информационная насыщенность, новизна, оригинальность изложения вопросов; простота и доходчивость изложения; структурная организованность, логичность, грамматическая правильность и стилистическая выразительность; убедительность, аргументированность, практическая значимость и теоретическая обоснованность предложений и выводов.

Для выполнения самостоятельной работы других видов – курсовой работы и проекта, выпускной квалификационной работы, имеются соответствующие методические указания.

## 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 1 – Тематический план дисциплины

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
1	Понятие, функции, классификация и эволюция операционных систем. Компоненты операционных систем: ядро, загрузчик, интерпретатор команд, драйверы устройств, встроенное программное обеспечение.	1	5	[1] с. 13...28, 57...86 [4] с. 11...15
2	Понятие операционной среды и прикладного интерфейса программирования. Вычислительный процесс и ресурс. Прерывания. Мультипрограммирование и	1	5	[1] с. 32...39, 124...131 [4] с. 16...30

№	Наименование, раздела и темы	Самостоятельная работа, часов		Литература (страницы)
		очная	заочная	
	многозадачность.			
3	Диаграмма состояний процессора. Процессы и задачи. Последовательный вычислительный процесс. Разделение ресурсов. Управление задачами, памятью и вводом-выводом в операционных системах. Файловые системы.	1	5	[1] с. 87...97, 106-118 [4] с. 30...46, 163...208
4	Организация параллельных взаимодействующих вычислений: семафоры, мьютексы, мониторы, почтовый ящики, конвейеры, очереди.	1	5	[1] с. 87...97, 140...157 [4] с. 209...246
5	Определение, функции и состав операционных систем реального времени. Принципы построения операционных систем реального времени.	1	5	[1] с. 92...93, 119...123 [4] с. 340...351
6	Понятие, функции, классификация и эволюция компьютерных сетей. Глобальные и локальные компьютерные сети.	1	5	[2] с. 24...37, [5] с. 16...62
7	Совместное использование ресурсов. Сетевые операционные системы, службы, сервисы, интерфейсы и приложения.	1	5	[2] с. 40...52, [5] с. 368...416
8	Физическая передача данных по линиям связи: кодирование и характеристики физических каналов.	1	5	[2] с. 52...54, 256...282 [5] с. 31...57
9	Топология физических связей. Адресация узлов сети. Коммутация и маршрутизация.	1	5	[2] с. 55...75 [5] с. 31...57
10	Сети TCP/IP: типы адресов стека, формат IP-адреса, система DNS.	1	5	[2] с. 482...656, [5] с. 418...439
11	Понятие, функции, классификация и эволюция баз данных. Реляционная алгебра.	1	5	[3] с. 4...7
12	Реляционная модель данных. Определение реляционной базы данных и отношения, атрибута, кортежа, первичного ключа.	1	5	[3] с. 7...11
13	Проектирование баз данных. Концепция функциональных зависимостей.	1	5	[3] с. 11...17
14	Нормализация. Декомпозиция. Первая нормальная форма. Нормальная форма Бойса-Кодда.	1	5	[3] с. 18...27
15	Определение, функции, классификация и эволюция системы управления базами данных.	1	5	[3] с. 28...30
16	Современные системы управления базами данных. Понятие о языке запросов SQL.	2	8	[3] с. 34...54
17	Выполнение курсовой работы «Проектирование реляционной базы данных»	36	36	[3] с. 1...80

\* см. методические указания к контрольной работе

## 2. ТЕМАТИКА ЛАБОРАТОРНЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Таблица 2 – Перечень практических работ

Номер раздела и темы	Наименование тем практических работ	Трудоёмкость, час	
		очная	заочная
1.2	Несинхронизированная параллельная работа задач	1	0,5
1.2	Синхронизация задач при помощи механизма рандеву (критическая секция отсутствует)	1	0,5
1.3	Синхронизация задач при помощи механизма рандеву (имеется критическая секция)	1	0,5
1.3	Синхронизация задач при помощи рандеву (сообщение поступает от задачи потребитель)	1	0,5
1.4	Обмен данными при помощи буферизующей задачи	2	
1.4	Взаимоисключение доступа к дисплею при помощи семафора	1	
1.4	Реализация взаимного исключения при помощи задачи — монитора	1	
1.5	Система задач производитель — кольцевой буфер — потребитель с возможностью потери данных	1	
1.5	Система задач производитель — кольцевой буфер — потребитель без потери данных	1	
2.1	Изучение конфигурации вычислительной сети	2	
2.2	Маршрутизация в вычислительных сетях	2	
2.4, 2.5	Изучение утилит TCP/IP в ОС Windows	4	2
3.1, 3.2, 3.3	Определение имен и типов данных атрибутов отношения реляционной базы данных. Концепция функциональных зависимостей.	6	
3.4	Первая нормальная форма 1НФ отношения реляционной базы данных	1	2
3.4	Нормальная форма Бойса-Кодда НФБК отношения реляционной базы данных	1	2
3.5	Изучение СУБД Apache OpenOffice Base 4.1.2	2	
3.6	Реализация отношения реляционной базы данных НФБК в СУБД Apache OpenOffice Base 4.1.2. Создание таблиц	2	1



Номер раздела и темы	Наименование тем практических работ	Трудоёмкость, час	
		очная	заочная
	и схемы данных		
3.6	Создание запросов на выборку, удаление, обновление, добавление данных и формирование новых таблиц	1	0,5
3.6	Создание простых форм. Элементы управления на формах. Списки и поля со списком. Создание отчетов.	1	0,5
Итого:		32	10

### 3. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Дать определение операционной системе.
2. Перечислить основные функции операционных систем.
3. Классификация операционных систем.
4. К какому типу относится операционная система Windows?
5. Этапы эволюция операционных систем и аппаратного обеспечения компьютеров.
6. Перечислить компоненты операционных систем.
7. Назначение и классификация ядер.
8. Основное назначение загрузчика.
9. Типы интерфейсов операционных систем.
10. Назначение встроенного программного обеспечения.
11. Дать понятие операционной среды и прикладного интерфейса программирования.
12. Пояснить концепцию процесса и вычислительного ресурса.
13. Определение процесса и ресурса.
14. Классификация ресурсов.
15. Назначение механизма прерываний.
16. Этапы прерывания.
17. Отличие мультипрограммирования и многозадачности.
18. Изобразить диаграмму состояний процессора.
19. Что такое последовательный процессор и последовательный вычислительный процесс?
20. Методы разделения ресурсов.
21. Назначение файловых систем.
22. Перечислить средства для организации параллельных взаимодействующих вычислений.
23. Дать определение семафора и монитора.
24. Сравнить семафор и монитор, указать их достоинства и недостатки.
25. Дать определение операционным системам реального времени.
26. Применение операционных систем реального времени.
27. Функции и состав операционных систем реального времени.
28. Отличие операционной системы реального времени от системы не реального времени.
29. Системы «жесткого» и «мягкого» реального времени.
30. Определение компьютерных сетей.
31. Необходимость возникновения компьютерных сетей.
32. Основные функции компьютерных сетей.
33. На стыке каких областей возникли компьютерные сети? Эволюция

компьютерных сетей.

34. Какие сети возникли первыми глобальные или локальные?
35. Механизм доступа к периферийному устройству по сети.
36. Состав сетевых операционных систем.
37. Назначение сетевых служб, модулей клиент-сервер.
38. Какие сетевые службы существуют в операционной системы Windows?
39. Типы сетевых приложений.
40. Дать определение среды передачи данных.
41. Классификация сред передачи данных.
42. Отличие дуплексного, симплексного и полудуплексного каналов.
43. Характеристики физических каналов.
44. Определение топологии связей компьютеров.
45. Какая самая популярная топология сетей на сегодняшний день?
46. Какую сетевую топологию лучше использовать для соединения удаленных устройств шахты?
47. Критерии выбора маршрутов в сетях.
48. Задача коммутации и маршрутизации.
49. Модель взаимодействия открытых систем OSI и ее уровни.
50. Стек протоколов TCP/IP как основа для построения сетей.
51. Классы сетей.
52. Формат IP-адреса.
53. Версии протоколов IPv4 и IPv6.
54. Для чего необходимо переходить на версию протокола IPv6?
55. Для чего нужен DNS-сервер?
56. Дать определение базам данных.
57. Отличие данных от информации.
58. Чем вызвана необходимость использовать базы данных?
59. Классификация баз данных.
60. Какой самый популярный тип баз данных на данный момент?
61. Какой самый перспективный тип баз данных на данный момент?
62. Соотношений понятий таблица, столбец и строка для представления в реляционной модели данных и на компьютере.
63. Определение отношения.
64. Что такое кортеж?
65. Что такое первичный ключ и возможный?
66. Цели проектирования баз данных.
67. Определение функциональной зависимости и ее состав.
68. Для чего необходимо составлять функциональные зависимости?
69. Что такое нормализация и декомпозиция?
70. Определение первой нормальной формы.
71. Почему нельзя использовать отношение базы данных в первой нормальной форме для реализации в системе управления базой данных?
72. Определение нормальной формы Бойса-Кодда.
73. Определение системы управления базами данных.
74. Отличие базы данных от системы управления базой данных?
75. Для чего необходима система управления базой данных?
76. Какие системы управления базами данных лучше клиент-серверные или файл-серверные?
77. Apache OpenOffice Base к какому типу систем управления базами данных относится?
78. MySQL к какому типу систем управления базами данных относится?
- 79.

#### **4. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

##### **4.1 Основная литература**

№ п/п	Наименование
1	Олифер В. Г. Сетевые операционные системы: учебник для вузов / В. Г. Олифер В. Г., Н. А. Олифер. - Санкт-Петербург: Питер, 2002. - 544 с.
2	Олифер В. Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: учебник для вузов / В. Г. Олифер, Н. А. Олифер - 2-е изд. - Санкт-Петербург: Питер, 2003. - 864 с.
3	Реляционные базы данных: учебное пособие / П. А. Осипов, А. Л. Карякин, М. Б. Носырев; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2016. – 83 с.

##### **4.2 Дополнительная литература**

№ п/п	Наименование
4	Гордеев А. В. Системное программное обеспечение: учебник для вузов / А. В. Гордеев А. В., А. Ю. Молчанов. - Санкт-Петербург: Питер, 2003. - 736 с.
5	Бройдо В. Л. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации: учебное пособие для вузов / В. Л. Бройдо - Санкт-Петербург : Питер, 2003. - 688 с.

#### **5. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННОТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

1. Официальный сайт ПО Apache OpenOffice - свободный и открытый офисный пакет – <https://www.openoffice.org/ru/>

#### **6. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ**

1. Microsoft Windows 10 Professional
2. Apache Open Office (бесплатный пакет офисных программ)

Информационные справочные системы  
ИПС «КонсультантПлюс».

Базы данных  
Scopus: база данных рефератов и цитирования.  
<https://www.scopus.com/customer/profile/display.uri>  
E-library: электронная научная библиотека: <https://elibrary.ru>

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

***МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ  
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ***

**ЭЛЕКТРОТЕХНИКА**

Направление подготовки

***13.03.02 Электроэнергетика и электротехника***

Профиль

***Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий***

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА .....	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ .....	4
Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса .....	4
Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам .....	5
Подготовка и написание контрольной работы .....	6
Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта) .....	7
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ .....	8
Подготовка к зачёту .....	8
Подготовка к экзамену .....	8

## ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* – это разнообразные виды деятельности студентов, осуществляемые под руководством, но без непосредственного участия преподавателя в аудиторное и/или внеаудиторное время.

Это особая форма обучения по заданиям преподавателя, выполнение которых требует активной мыслительной, поисково-исследовательской и аналитической деятельности.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет деятельностный подход, когда цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, то есть на реальные ситуации, где студентам надо проявить знание конкретной дисциплины, использовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Цель самостоятельной работы – закрепление знаний, полученных на аудиторных занятиях, формирование способности принимать на себя ответственность, решать проблему, находить конструктивные выходы из сложных ситуаций, развивать творческие способности, приобретение навыка организовывать своё время

Кроме того самостоятельная работа направлена на обучение студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свой профессиональный уровень.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирование практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитие исследовательских умений;
- получение навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

## **ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА**

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

В соответствии с реализацией рабочей программы дисциплины в рамках самостоятельной работы студенту необходимо выполнить следующие виды работ:

*для подготовки ко всем видам текущего контроля:*

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение курса;
- подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам;
- подготовка к контрольной работе, написание контрольной работы;
- выполнение и написание курсовой работы (проекта);

*для подготовки ко всем видам промежуточной аттестации:*

- подготовка к зачёту;
- подготовка к экзамену.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов как online, так и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита контрольных и курсовых работ (проектов), защита зачётных работ в виде доклада с презентацией и др.

Текущий контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

Промежуточный контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного для сдачи экзамена / зачёта.

В методических указаниях по каждому виду контроля представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

### **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ**

#### **Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса**

Лекционный материал по дисциплине излагается в виде устных лекций преподавателя во время аудиторных занятий. Самостоятельная работа студента во время лекционных аудиторных занятий заключается в ведении записей (конспекта лекций).

Конспект лекций, выполняемый во время аудиторных занятий, дополняется студентом при самостоятельном внеаудиторном изучении некоторых тем курса. Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка основной и дополнительной литературы к дисциплине.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины приведён в рабочей программе дисциплины.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на повторение материала лекций и самостоятельное изучение тем курса:

*для овладения знаниями:*

- конспектирование текста;
- чтение основной и дополнительной литературы;
- составление плана текста;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- повторная работа над учебным материалом;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- изучение нормативных материалов;
- составление плана и тезисов ответа на вопросы для самопроверки;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Вопросы для самопроверки приведены учебной литературе по дисциплине или могут быть предложены преподавателем на лекционных аудиторных занятиях после изучения каждой темы.

### **Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам**

*Практические занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования, выполняются доклады с презентацией по определенным учебно-практическим, учебно-исследовательским или научным темам с последующим их обсуждением.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;



- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

*Лабораторные занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов навыков работы с использованием лабораторного оборудования, планирования и выполнения экспериментов, оформления отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к лабораторным занятиям:

*для овладения знаниями:*

- изучение методик работы с использованием различных видов и типов лабораторного оборудования;
- изучение правил безопасной эксплуатации лабораторного оборудования;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана проведения эксперимента;
- составление отчётной документации по результатам экспериментирования;
- аналитическая обработка результатов экспериментов.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

### **Подготовка и написание контрольной работы**

*Контрольная работа* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся. Контрольная работа является средством проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к контрольной работе:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению контрольной работы.

Контрольная работа может быть выполнена в виде доклада с презентацией.

*Доклад с презентацией* – это публичное выступление по представлению полученных результатов знаний по определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной теме.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления;
- осуществить сбор материала к выступлению;
- организовать работу с источниками;
- во время изучения источников следует записывать вопросы, возникающие по мере ознакомления, ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- сформулировать возможные вопросы по теме доклада, подготовить тезисы ответов на них;
- обработать материал и представить его в виде законченного доклада и презентации.

При выполнении контрольной работы в виде доклада с презентацией самостоятельная работа студента включает в себя:

*для овладения знаниями:*

- чтение основное и дополнительной литературы по заданной теме доклада;
- составление плана доклада;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей по теме доклада

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана и тезисов презентации по теме доклада;
- составление презентации;
- составление библиографического списка по теме доклада;
- подготовка к публичному выступлению;
- составление возможных вопросов по теме доклада и ответов на них.

*для формирования навыков и умений:*

- публичное выступление;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Варианты контрольных работ и темы докладов приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

### **Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта)**

*Курсовая работа (проект)* – форма контроля для демонстрации обучающимся умений работать с объектами изучения, критическими источниками, справочной и энциклопедической литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать и строить априорную модель изучаемого объекта или процесса, создавать содержательную презентацию выполненной работы.

При выполнении и защите курсовой работы (проекта) оценивается умение самостоятельной работы с объектами изучения, справочной литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать выбранную технологическую схему и принятый тип и количество оборудования, создавать содержательную презентацию выполненной работы (пояснительную записку и графический материал).

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к курсовой работе (проекту):

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- составление плана выполнения курсовой работы (проекта);
- составление списка использованных источников.

для закрепления и систематизации знаний:

- работа учебно-методическими материалами по выполнению курсовой работы (проекта);
- изучение основных методик расчёта технологических схем, выбора и расчёта оборудования;
- подготовка тезисов ответов на вопросы по тематике курсовой работы (проекта).

для формирования навыков и умений:

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, компоновочных чертежей;
- оформление текстовой и графической документации.

Тематика курсовых работ (проектов) приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

### **Подготовка к зачёту**

Зачёт по дисциплине может быть проведён в виде теста или включать в себя защиту контрольной работы (доклад с презентацией).

*Тест* – это система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.

При самостоятельной подготовке к зачёту, проводимому в виде теста, студенту необходимо:

- проработать информационный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора дополнительной учебной литературы;
- выяснить условия проведения теста: количество вопросов в тесте, продолжительность выполнения теста, систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с тестом, нужно внимательно и до конца прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов, выбрать правильные (их может быть несколько), на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам.

В процессе выполнения теста рекомендуется применять несколько подходов в решении заданий. Такая стратегия позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант. Не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, а сразу переходить к другим тестовым заданиям, к трудному вопросу можно обратиться в конце. Необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Зачёт также может проходить в виде защиты контрольной работы (доклад с презентацией). Методические рекомендации по подготовке и выполнению доклада с презентацией приведены в п. «Подготовка и написание контрольной работы».

### **Подготовка к экзамену**

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в форме экзамена.

Билет на экзамен включает в себя теоретические вопросы и практико-ориентированные задания.

*Теоретический вопрос* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность

одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся.

*Практико-ориентированное задание* – средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по определенной теме.

При самостоятельной подготовке к экзамену студенту необходимо:

- получить перечень теоретических вопросов к экзамену;
- проработать пройденный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине, при необходимости изучить дополнительные источники;
- составить планы и тезисы ответов на вопросы;
- проработать все типы практико-ориентированных заданий;
- составить алгоритм решения основных типов задач;
- выяснить условия проведения экзамена: количество теоретических вопросов и практико-ориентированных заданий в экзаменационном билете, продолжительность и форму проведения экзамена (устный или письменный), систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с экзаменационным билетом, нужно внимательно прочитать теоретические вопросы и условия практико-ориентированного задания;
- при условии проведения устного экзамена составить план и тезисы ответов на теоретические вопросы, кратко изложить ход решения практико-ориентированного задания;
- при условии проведения письменного экзамена дать полные письменные ответы на теоретические вопросы; изложить ход решения практико-ориентированного задания с численным расчётом искомых величин.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

***МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ  
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ***

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

Направление подготовки

***13.03.02 Электроэнергетика и электротехника***

Профиль

***Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий***

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА .....	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ .....	4
Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса .....	4
Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам .....	5
Подготовка и написание контрольной работы .....	6
Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта) .....	7
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ .....	8
Подготовка к зачёту .....	8
Подготовка к экзамену .....	8

## ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* – это разнообразные виды деятельности студентов, осуществляемые под руководством, но без непосредственного участия преподавателя в аудиторное и/или внеаудиторное время.

Это особая форма обучения по заданиям преподавателя, выполнение которых требует активной мыслительной, поисково-исследовательской и аналитической деятельности.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет деятельностный подход, когда цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, то есть на реальные ситуации, где студентам надо проявить знание конкретной дисциплины, использовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Цель самостоятельной работы – закрепление знаний, полученных на аудиторных занятиях, формирование способности принимать на себя ответственность, решать проблему, находить конструктивные выходы из сложных ситуаций, развивать творческие способности, приобретение навыка организовывать своё время

Кроме того самостоятельная работа направлена на обучение студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свой профессиональный уровень.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирование практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитие исследовательских умений;
- получение навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

## **ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА**

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

В соответствии с реализацией рабочей программы дисциплины в рамках самостоятельной работы студенту необходимо выполнить следующие виды работ:

*для подготовки ко всем видам текущего контроля:*

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение курса;
- подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам;
- подготовка к контрольной работе, написание контрольной работы;
- выполнение и написание курсовой работы (проекта);

*для подготовки ко всем видам промежуточной аттестации:*

- подготовка к зачёту;
- подготовка к экзамену.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов как online, так и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита контрольных и курсовых работ (проектов), защита зачётных работ в виде доклада с презентацией и др.

Текущий контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

Промежуточный контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного для сдачи экзамена / зачёта.

В методических указаниях по каждому виду контроля представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

### **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ**

#### **Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса**

Лекционный материал по дисциплине излагается в виде устных лекций преподавателя во время аудиторных занятий. Самостоятельная работа студента во время лекционных аудиторных занятий заключается в ведении записей (конспекта лекций).

Конспект лекций, выполняемый во время аудиторных занятий, дополняется студентом при самостоятельном внеаудиторном изучении некоторых тем курса. Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка основной и дополнительной литературы к дисциплине.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины приведён в рабочей программе дисциплины.



Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на повторение материала лекций и самостоятельное изучение тем курса:

*для овладения знаниями:*

- конспектирование текста;
- чтение основной и дополнительной литературы;
- составление плана текста;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- повторная работа над учебным материалом;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- изучение нормативных материалов;
- составление плана и тезисов ответа на вопросы для самопроверки;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Вопросы для самопроверки приведены учебной литературе по дисциплине или могут быть предложены преподавателем на лекционных аудиторных занятиях после изучения каждой темы.

### **Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам**

*Практические занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования, выполняются доклады с презентацией по определенным учебно-практическим, учебно-исследовательским или научным темам с последующим их обсуждением.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;

- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

*Лабораторные занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов навыков работы с использованием лабораторного оборудования, планирования и выполнения экспериментов, оформления отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к лабораторным занятиям:

*для овладения знаниями:*

- изучение методик работы с использованием различных видов и типов лабораторного оборудования;
- изучение правил безопасной эксплуатации лабораторного оборудования;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана проведения эксперимента;
- составление отчётной документации по результатам экспериментирования;
- аналитическая обработка результатов экспериментов.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

### **Подготовка и написание контрольной работы**

*Контрольная работа* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся. Контрольная работа является средством проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к контрольной работе:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению контрольной работы.

Контрольная работа может быть выполнена в виде доклада с презентацией.

*Доклад с презентацией* – это публичное выступление по представлению полученных результатов знаний по определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной теме.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления;
- осуществить сбор материала к выступлению;
- организовать работу с источниками;
- во время изучения источников следует записывать вопросы, возникающие по мере ознакомления, ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- сформулировать возможные вопросы по теме доклада, подготовить тезисы ответов на них;
- обработать материал и представить его в виде законченного доклада и презентации.

При выполнении контрольной работы в виде доклада с презентацией самостоятельная работа студента включает в себя:

*для овладения знаниями:*

- чтение основное и дополнительной литературы по заданной теме доклада;
- составление плана доклада;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей по теме доклада

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана и тезисов презентации по теме доклада;
- составление презентации;
- составление библиографического списка по теме доклада;
- подготовка к публичному выступлению;
- составление возможных вопросов по теме доклада и ответов на них.

*для формирования навыков и умений:*

- публичное выступление;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Варианты контрольных работ и темы докладов приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

### **Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта)**

*Курсовая работа (проект)* – форма контроля для демонстрации обучающимся умений работать с объектами изучения, критическими источниками, справочной и энциклопедической литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать и строить априорную модель изучаемого объекта или процесса, создавать содержательную презентацию выполненной работы.

При выполнении и защите курсовой работы (проекта) оценивается умение самостоятельной работы с объектами изучения, справочной литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать выбранную технологическую схему и принятый тип и количество оборудования, создавать содержательную презентацию выполненной работы (пояснительную записку и графический материал).

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к курсовой работе (проекту):

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- составление плана выполнения курсовой работы (проекта);
- составление списка использованных источников.

для закрепления и систематизации знаний:

- работа учебно-методическими материалами по выполнению курсовой работы (проекта);
- изучение основных методик расчёта технологических схем, выбора и расчёта оборудования;
- подготовка тезисов ответов на вопросы по тематике курсовой работы (проекта).

для формирования навыков и умений:

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, компоновочных чертежей;
- оформление текстовой и графической документации.

Тематика курсовых работ (проектов) приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

### **Подготовка к зачёту**

Зачёт по дисциплине может быть проведён в виде теста или включать в себя защиту контрольной работы (доклад с презентацией).

*Тест* – это система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.

При самостоятельной подготовке к зачёту, проводимому в виде теста, студенту необходимо:

- проработать информационный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора дополнительной учебной литературы;
- выяснить условия проведения теста: количество вопросов в тесте, продолжительность выполнения теста, систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с тестом, нужно внимательно и до конца прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов, выбрать правильные (их может быть несколько), на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам.

В процессе выполнения теста рекомендуется применять несколько подходов в решении заданий. Такая стратегия позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант. Не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, а сразу переходить к другим тестовым заданиям, к трудному вопросу можно обратиться в конце. Необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Зачёт также может проходить в виде защиты контрольной работы (доклад с презентацией). Методические рекомендации по подготовке и выполнению доклада с презентацией приведены в п. «Подготовка и написание контрольной работы».

### **Подготовка к экзамену**

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в форме экзамена.

Билет на экзамен включает в себя теоретические вопросы и практико-ориентированные задания.

*Теоретический вопрос* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность

одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся.

*Практико-ориентированное задание* – средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по определенной теме.

При самостоятельной подготовке к экзамену студенту необходимо:

- получить перечень теоретических вопросов к экзамену;
- проработать пройденный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине, при необходимости изучить дополнительные источники;
- составить планы и тезисы ответов на вопросы;
- проработать все типы практико-ориентированных заданий;
- составить алгоритм решения основных типов задач;
- выяснить условия проведения экзамена: количество теоретических вопросов и практико-ориентированных заданий в экзаменационном билете, продолжительность и форму проведения экзамена (устный или письменный), систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с экзаменационным билетом, нужно внимательно прочитать теоретические вопросы и условия практико-ориентированного задания;
- при условии проведения устного экзамена составить план и тезисы ответов на теоретические вопросы, кратко изложить ход решения практико-ориентированного задания;
- при условии проведения письменного экзамена дать полные письменные ответы на теоретические вопросы; изложить ход решения практико-ориентированного задания с численным расчётом искомых величин.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

***МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ  
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ***

**ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ**

Направление подготовки

***13.03.02 Электроэнергетика и электротехника***

Профиль

***Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий***

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА .....	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ .....	4
Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса .....	4
Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам .....	5
Подготовка и написание контрольной работы .....	6
Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта) .....	7
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ .....	8
Подготовка к зачёту .....	8
Подготовка к экзамену .....	8

## ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* – это разнообразные виды деятельности студентов, осуществляемые под руководством, но без непосредственного участия преподавателя в аудиторное и/или внеаудиторное время.

Это особая форма обучения по заданиям преподавателя, выполнение которых требует активной мыслительной, поисково-исследовательской и аналитической деятельности.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет деятельностный подход, когда цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, то есть на реальные ситуации, где студентам надо проявить знание конкретной дисциплины, использовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Цель самостоятельной работы – закрепление знаний, полученных на аудиторных занятиях, формирование способности принимать на себя ответственность, решать проблему, находить конструктивные выходы из сложных ситуаций, развивать творческие способности, приобретение навыка организовывать своё время

Кроме того самостоятельная работа направлена на обучение студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свой профессиональный уровень.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирование практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитие исследовательских умений;
- получение навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.



## **ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА**

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

В соответствии с реализацией рабочей программы дисциплины в рамках самостоятельной работы студенту необходимо выполнить следующие виды работ:

*для подготовки ко всем видам текущего контроля:*

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение курса;
- подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам;
- подготовка к контрольной работе, написание контрольной работы;
- выполнение и написание курсовой работы (проекта);

*для подготовки ко всем видам промежуточной аттестации:*

- подготовка к зачёту;
- подготовка к экзамену.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов как online, так и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита контрольных и курсовых работ (проектов), защита зачётных работ в виде доклада с презентацией и др.

Текущий контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

Промежуточный контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного для сдачи экзамена / зачёта.

В методических указаниях по каждому виду контроля представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

### **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ**

#### **Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса**

Лекционный материал по дисциплине излагается в виде устных лекций преподавателя во время аудиторных занятий. Самостоятельная работа студента во время лекционных аудиторных занятий заключается в ведении записей (конспекта лекций).

Конспект лекций, выполняемый во время аудиторных занятий, дополняется студентом при самостоятельном внеаудиторном изучении некоторых тем курса. Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка основной и дополнительной литературы к дисциплине.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины приведён в рабочей программе дисциплины.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на повторение материала лекций и самостоятельное изучение тем курса:

*для овладения знаниями:*

- конспектирование текста;
- чтение основной и дополнительной литературы;
- составление плана текста;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- повторная работа над учебным материалом;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- изучение нормативных материалов;
- составление плана и тезисов ответа на вопросы для самопроверки;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Вопросы для самопроверки приведены учебной литературе по дисциплине или могут быть предложены преподавателем на лекционных аудиторных занятиях после изучения каждой темы.

### **Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам**

*Практические занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования, выполняются доклады с презентацией по определенным учебно-практическим, учебно-исследовательским или научным темам с последующим их обсуждением.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;

- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

*Лабораторные занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов навыков работы с использованием лабораторного оборудования, планирования и выполнения экспериментов, оформления отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к лабораторным занятиям:

*для овладения знаниями:*

- изучение методик работы с использованием различных видов и типов лабораторного оборудования;
- изучение правил безопасной эксплуатации лабораторного оборудования;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана проведения эксперимента;
- составление отчётной документации по результатам экспериментирования;
- аналитическая обработка результатов экспериментов.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

### **Подготовка и написание контрольной работы**

*Контрольная работа* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся. Контрольная работа является средством проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к контрольной работе:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению контрольной работы.

Контрольная работа может быть выполнена в виде доклада с презентацией.

*Доклад с презентацией* – это публичное выступление по представлению полученных результатов знаний по определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной теме.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления;
- осуществить сбор материала к выступлению;
- организовать работу с источниками;
- во время изучения источников следует записывать вопросы, возникающие по мере ознакомления, ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- сформулировать возможные вопросы по теме доклада, подготовить тезисы ответов на них;
- обработать материал и представить его в виде законченного доклада и презентации.

При выполнении контрольной работы в виде доклада с презентацией самостоятельная работа студента включает в себя:

*для овладения знаниями:*

- чтение основное и дополнительной литературы по заданной теме доклада;
- составление плана доклада;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей по теме доклада

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана и тезисов презентации по теме доклада;
- составление презентации;
- составление библиографического списка по теме доклада;
- подготовка к публичному выступлению;
- составление возможных вопросов по теме доклада и ответов на них.

*для формирования навыков и умений:*

- публичное выступление;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Варианты контрольных работ и темы докладов приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

### **Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта)**

*Курсовая работа (проект)* – форма контроля для демонстрации обучающимся умений работать с объектами изучения, критическими источниками, справочной и энциклопедической литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать и строить априорную модель изучаемого объекта или процесса, создавать содержательную презентацию выполненной работы.

При выполнении и защите курсовой работы (проекта) оценивается умение самостоятельной работы с объектами изучения, справочной литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать выбранную технологическую схему и принятый тип и количество оборудования, создавать содержательную презентацию выполненной работы (пояснительную записку и графический материал).

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к курсовой работе (проекту):

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- составление плана выполнения курсовой работы (проекта);
- составление списка использованных источников.

для закрепления и систематизации знаний:

- работа учебно-методическими материалами по выполнению курсовой работы (проекта);
- изучение основных методик расчёта технологических схем, выбора и расчёта оборудования;
- подготовка тезисов ответов на вопросы по тематике курсовой работы (проекта).

для формирования навыков и умений:

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, компоновочных чертежей;
- оформление текстовой и графической документации.

Тематика курсовых работ (проектов) приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

### **Подготовка к зачёту**

Зачёт по дисциплине может быть проведён в виде теста или включать в себя защиту контрольной работы (доклад с презентацией).

*Тест* – это система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.

При самостоятельной подготовке к зачёту, проводимому в виде теста, студенту необходимо:

- проработать информационный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора дополнительной учебной литературы;
- выяснить условия проведения теста: количество вопросов в тесте, продолжительность выполнения теста, систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с тестом, нужно внимательно и до конца прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов, выбрать правильные (их может быть несколько), на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам.

В процессе выполнения теста рекомендуется применять несколько подходов в решении заданий. Такая стратегия позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант. Не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, а сразу переходить к другим тестовым заданиям, к трудному вопросу можно обратиться в конце. Необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Зачёт также может проходить в виде защиты контрольной работы (доклад с презентацией). Методические рекомендации по подготовке и выполнению доклада с презентацией приведены в п. «Подготовка и написание контрольной работы».

### **Подготовка к экзамену**

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в форме экзамена.

Билет на экзамен включает в себя теоретические вопросы и практико-ориентированные задания.

*Теоретический вопрос* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность

одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся.

*Практико-ориентированное задание* – средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по определенной теме.

При самостоятельной подготовке к экзамену студенту необходимо:

- получить перечень теоретических вопросов к экзамену;
- проработать пройденный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине, при необходимости изучить дополнительные источники;
- составить планы и тезисы ответов на вопросы;
- проработать все типы практико-ориентированных заданий;
- составить алгоритм решения основных типов задач;
- выяснить условия проведения экзамена: количество теоретических вопросов и практико-ориентированных заданий в экзаменационном билете, продолжительность и форму проведения экзамена (устный или письменный), систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с экзаменационным билетом, нужно внимательно прочитать теоретические вопросы и условия практико-ориентированного задания;
- при условии проведения устного экзамена составить план и тезисы ответов на теоретические вопросы, кратко изложить ход решения практико-ориентированного задания;
- при условии проведения письменного экзамена дать полные письменные ответы на теоретические вопросы; изложить ход решения практико-ориентированного задания с численным расчётом искомых величин.



МИНБРНАУКИ РФ  
ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный  
университет»

М. Е. Садовников

## **ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОННЫЕ АППАРАТЫ**

**Методические рекомендации и задания к  
контрольной работе для студентов направления  
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника,  
профиля бакалавриата Электротехнические  
комплексы и системы горных и промышленных  
предприятий**

Екатеринбург

2021

## Задание

1. Выбрать все электрические аппараты, указанные на схеме (см. рис. 1). При выборе аппаратов считать, что ШР-1 защищается таким же автоматическим выключателем, что и QF1, но его уставки выбраны с учётом требований селективности (эти уставки необходимо определить).
2. Варианты заданий указаны в таблице 1 (задаются преподавателем).
3. Электроаппараты следует выбрать того производителя, который указан в таблице 1.
4. В случае невозможности выбрать какой-либо аппарат заданного в таблице 1 производителя, обоснованно показать это в работе (подтвердить расчётами), и выбрать данный аппарат у другого производителя.
5. Характеристики электроприёмников и расчётные токи короткого замыкания (ТКЗ), в зависимости от выданного варианта задания, приводятся в таблице 1.
6. Считать токи короткого замыкания незначительными для системы.
7. Расчётные токи электроприёмников (ЭП) определить по формуле

$$I_p = \frac{P_n}{\sqrt{3} \cdot U_{1n} \cdot \cos\varphi_n \cdot \eta_n},$$

где  $P_n$  – активная номинальная мощность электродвигателя, кВт;  $\cos\varphi_n$  – номинальный коэффициент мощности электродвигателя;  $\eta_n$  – номинальный КПД электродвигателя, о. е.;  $U_{1n}$  – номинальное напряжение электродвигателя, кВ.

8. Суммарный ток двух ЭП принять как сумму их номинальных токов.
9. Пиковый ток каждого из ЭП определить по формуле

$$I_{\text{пуск}} = K_{\text{п}} \cdot I_p,$$

где  $K_{\text{п}}$  – кратность пускового тока электродвигателя.

10.  $\cos\varphi_n$ ,  $\eta_n$ ,  $K_{\text{п}}$  определить по [1], по заданной в таблице 1 марке двигателя.
11. При выполнении работы использовать методику, приведённую в пп 5.5.2...5.5.5 [2], пп 9.1...9.5 [3] и каталоги изготовителей электроаппаратов, приведённые на сайтах изготовителей оборудования (ссылки на сайты приведены в таблице 1).
12. К работе, в обязательном порядке, в качестве приложения добавить копии каталожных данных по выбираемым аппаратам, по всем используемым при выборе переменным.
13. Отчёт оформить в соответствии с требованиями [4].



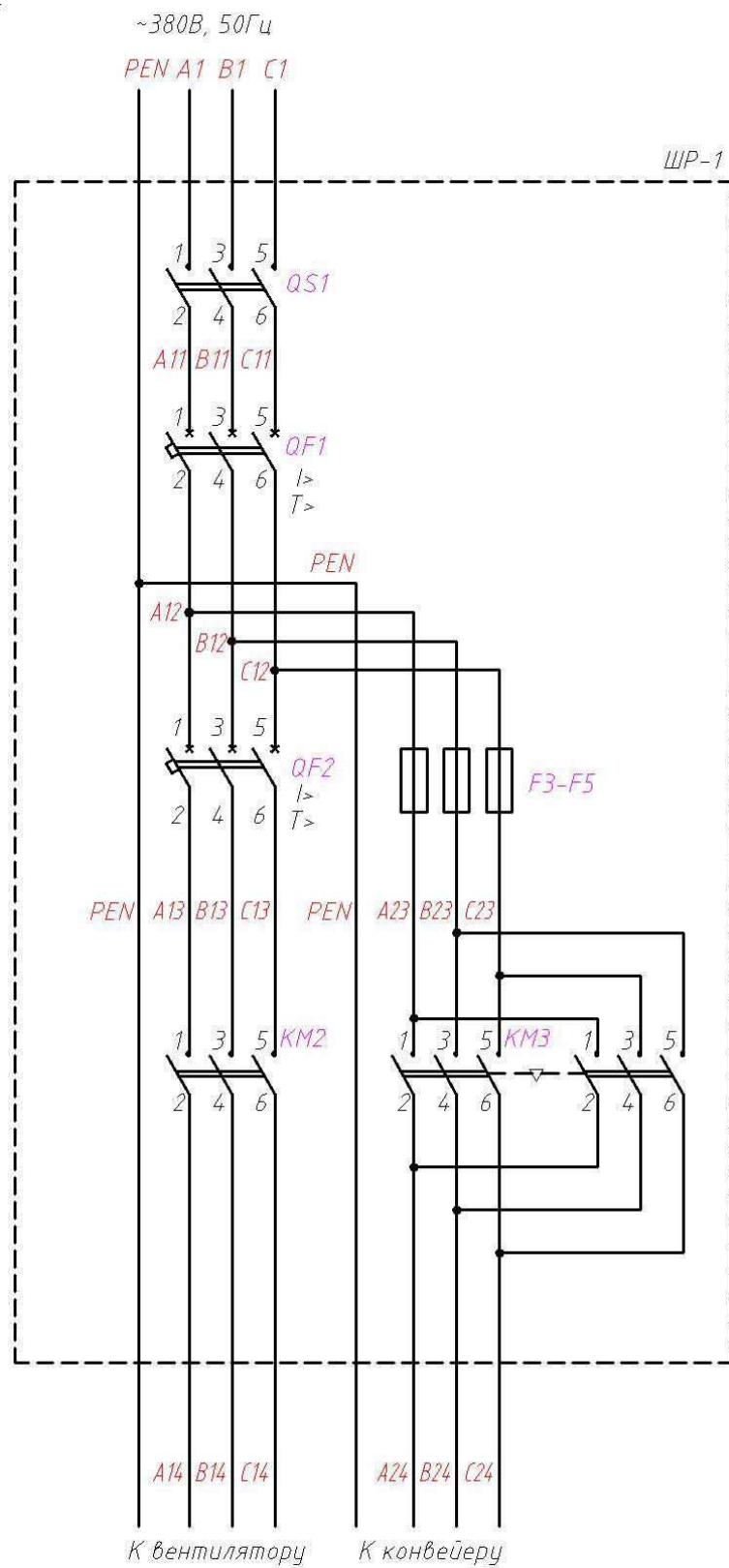


Рисунок 1 - Схема электрическая принципиальная ЩР-1

Таблица 1 - Варианты заданий контрольной работы

Вариант	Изготовитель электроаппаратов	Технологическое оборудование	Тип двигателя	Однофазный ТКЗ на зажимах двигателя, кА	Однофазный ТКЗ в конце участка защиты QF1, кА	Трёхфазный ТКЗ на верхних губках рубильника QS1, кА
1	<b>ABB</b> <a href="http://new.abb.com/ru">http://new.abb.com/ru</a>	Вентилятор	4A132S4Y3	0,4	28	44
		Конвейер	4A280M2Y3	7		
2	<b>ИЭК</b> <a href="http://www.iek.ru/">http://www.iek.ru/</a>	Насос	4A80B4Y3	0,6	25	41
		Конвейер	4A355S6Y3	6,5		
3	<b>ЕКФ</b> <a href="http://ekfgroup.com/">http://ekfgroup.com/</a>	Грохот	4A100S4Y3	0,7	18	33
		Конвейер	4A315M6Y3	6		
4	<b>ДЗНВА</b> (автоматические выключатели) <a href="http://www.dznva.ru/">http://www.dznva.ru/</a> <b>ОАО «Коренёвский завод низковольтной аппаратуры»</b> (предохранители) <a href="http://www.nva-korenevo.ru/">http://www.nva-korenevo.ru/</a> <b>КЭАЗ</b> (контакторы) <a href="https://keaz.ru/">https://keaz.ru/</a>	Питатель	4A112M4Y3	0,8	22	32
		Конвейер	4A315S6Y3	5,5		
5	<b>Schneider Electric</b> <a href="http://www.schneider-electric.ru/ru/">http://www.schneider-electric.ru/ru/</a>	Вентилятор	4A160S4Y3	0,95	30	45
		Конвейер	4A250M4Y3	5		
6	<b>ОЕЗ</b> <a href="http://www.oez.ru/">http://www.oez.ru/</a>	Насос	4A160M2Y3	1	17	26
		Конвейер	4A250S4Y3	4,5		
7	<b>КЭАЗ</b> <a href="https://keaz.ru/">https://keaz.ru/</a>	Грохот	4A180M6Y3	1,1	26	35
		Конвейер	4A225M4Y3	4		
8	<b>Moeller (EATON)</b> <a href="http://www.eaton.ru/EatonRU/ProductsServices/Electrical/index.htm">http://www.eaton.ru/EatonRU/ProductsServices/Electrical/index.htm</a>	Питатель	4A132M4Y3	1,2	15	23

## Список литературы

1. Кравчик А. Э. Асинхронные двигатели серии 4А: справочник [Текст]: А. Э. Кравчик, М. М. Шлаф, В. И. Афонин [и др.]. – М.: Энергоиздат, 1982. – 504 с.: ил.
2. Электроснабжение и электрооборудование горного производства. Часть 1 [Текст]: учебное пособие / М. Е. Садовников; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: УГГУ, 2016. – 229 с.
3. Электроснабжение и электрооборудование горного производства. Часть 2 [Текст]: учебное пособие / М. Е. Садовников; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: УГГУ, 2016. – 191 с.
4. Садовников М. Е. Единые требования по оформлению текстовых и графических документов на кафедре ЭПП [Текст]: учебно-метод. пособие для студентов очного и заочного обучения / сост.: М. Е. Садовников, А. Л. Карякин, Х. Б. Юнусов; Уральский гос. горный ун-т. - Екатеринбург: УГГУ, 2018. - 31 с.



МИНБРНАУКИ РФ  
ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный  
университет»

М. Е. Садовников

## **ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОННЫЕ АППАРАТЫ**

**Методические рекомендации и задания к  
контрольной работе для студентов направления  
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника,  
профиля бакалавриата Электротехнические  
комплексы и системы горных и промышленных  
предприятий**

Екатеринбург

2021

## Задание

1. Выбрать все электрические аппараты, указанные на схеме (см. рис. 1). При выборе аппаратов считать, что ШР-1 защищается таким же автоматическим выключателем, что и QF1, но его уставки выбраны с учётом требований селективности (эти уставки необходимо определить).
2. Варианты заданий указаны в таблице 1 (задаются преподавателем).
3. Электроаппараты следует выбрать того производителя, который указан в таблице 1.
4. В случае невозможности выбрать какой-либо аппарат заданного в таблице 1 производителя, обоснованно показать это в работе (подтвердить расчётами), и выбрать данный аппарат у другого производителя.
5. Характеристики электроприёмников и расчётные токи короткого замыкания (ТКЗ), в зависимости от выданного варианта задания, приводятся в таблице 1.
6. Считать токи короткого замыкания незначительными для системы.
7. Расчётные токи электроприёмников (ЭП) определить по формуле

$$I_p = \frac{P_n}{\sqrt{3} \cdot U_{1n} \cdot \cos\varphi_n \cdot \eta_n},$$

где  $P_n$  – активная номинальная мощность электродвигателя, кВт;  $\cos\varphi_n$  – номинальный коэффициент мощности электродвигателя;  $\eta_n$  – номинальный КПД электродвигателя, о. е.;  $U_{1n}$  – номинальное напряжение электродвигателя, кВ.

8. Суммарный ток двух ЭП принять как сумму их номинальных токов.
9. Пиковый ток каждого из ЭП определить по формуле

$$I_{\text{пуск}} = K_{\text{п}} \cdot I_p,$$

где  $K_{\text{п}}$  – кратность пускового тока электродвигателя.

10.  $\cos\varphi_n$ ,  $\eta_n$ ,  $K_{\text{п}}$  определить по [1], по заданной в таблице 1 марке двигателя.
11. При выполнении работы использовать методику, приведённую в пп 5.5.2...5.5.5 [2], пп 9.1...9.5 [3] и каталоги изготовителей электроаппаратов, приведённые на сайтах изготовителей оборудования (ссылки на сайты приведены в таблице 1).
12. К работе, в обязательном порядке, в качестве приложения добавить копии каталожных данных по выбираемым аппаратам, по всем используемым при выборе переменным.
13. Отчёт оформить в соответствии с требованиями [4].

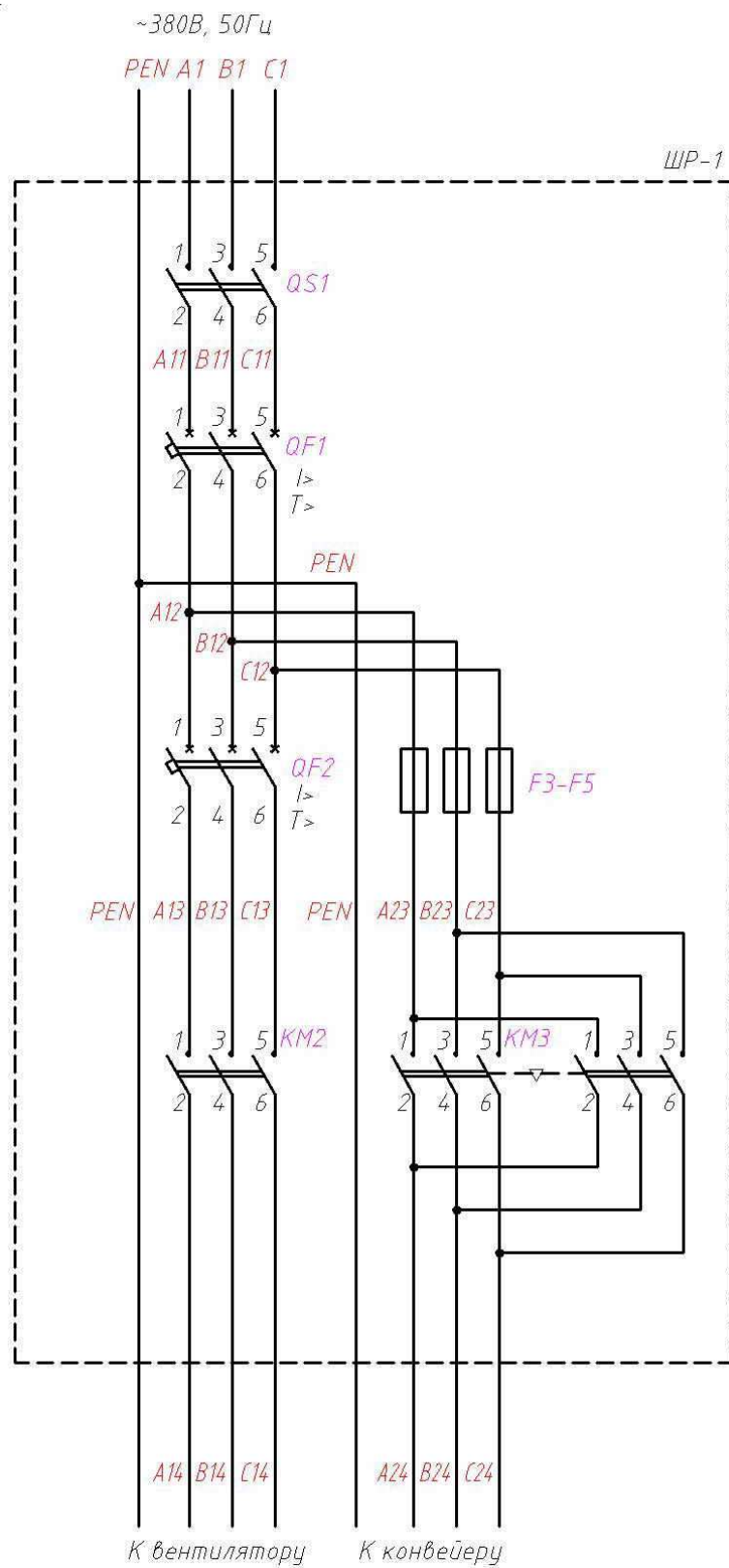


Рисунок 1 - Схема электрическая принципиальная ЩР-1

Таблица 1 - Варианты заданий контрольной работы

Вариант	Изготовитель электроаппаратов	Технологическое оборудование	Тип двигателя	Однофазный ТКЗ на зажимах двигателя, кА	Однофазный ТКЗ в конце участка защиты QF1, кА	Трёхфазный ТКЗ на верхних губках рубильника QS1, кА
1	<b>ABB</b> <a href="http://new.abb.com/ru">http://new.abb.com/ru</a>	Вентилятор	4A132S4Y3	0,4	28	44
		Конвейер	4A280M2Y3	7		
2	<b>ИЭК</b> <a href="http://www.iek.ru/">http://www.iek.ru/</a>	Насос	4A80B4Y3	0,6	25	41
		Конвейер	4A355S6Y3	6,5		
3	<b>ЕКФ</b> <a href="http://ekfgroup.com/">http://ekfgroup.com/</a>	Грохот	4A100S4Y3	0,7	18	33
		Конвейер	4A315M6Y3	6		
4	<b>ДЗНВА</b> (автоматические выключатели) <a href="http://www.dznva.ru/">http://www.dznva.ru/</a> <b>ОАО «Коренёвский завод низковольтной аппаратуры»</b> (предохранители) <a href="http://www.nva-korenevo.ru/">http://www.nva-korenevo.ru/</a> <b>КЭАЗ</b> (контакторы) <a href="https://keaz.ru/">https://keaz.ru/</a>	Питатель	4A112M4Y3	0,8	22	32
		Конвейер	4A315S6Y3	5,5		
5	<b>Schneider Electric</b> <a href="http://www.schneider-electric.ru/ru/">http://www.schneider-electric.ru/ru/</a>	Вентилятор	4A160S4Y3	0,95	30	45
		Конвейер	4A250M4Y3	5		
6	<b>ОЕЗ</b> <a href="http://www.oez.ru/">http://www.oez.ru/</a>	Насос	4A160M2Y3	1	17	26
		Конвейер	4A250S4Y3	4,5		
7	<b>КЭАЗ</b> <a href="https://keaz.ru/">https://keaz.ru/</a>	Грохот	4A180M6Y3	1,1	26	35
		Конвейер	4A225M4Y3	4		
8	<b>Moeller (EATON)</b> <a href="http://www.eaton.ru/EatonRU/ProductsServices/Electrical/index.htm">http://www.eaton.ru/EatonRU/ProductsServices/Electrical/index.htm</a>	Питатель	4A132M4Y3	1,2	15	23

## Список литературы

1. Кравчик А. Э. Асинхронные двигатели серии 4А: справочник [Текст]: А. Э. Кравчик, М. М. Шлаф, В. И. Афонин [и др.]. – М.: Энергоиздат, 1982. – 504 с.: ил.
2. Электроснабжение и электрооборудование горного производства. Часть 1 [Текст]: учебное пособие / М. Е. Садовников; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: УГГУ, 2016. – 229 с.
3. Электроснабжение и электрооборудование горного производства. Часть 2 [Текст]: учебное пособие / М. Е. Садовников; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: УГГУ, 2016. – 191 с.
4. Садовников М. Е. Единые требования по оформлению текстовых и графических документов на кафедре ЭПП [Текст]: учебно-метод. пособие для студентов очного и заочного обучения / сост.: М. Е. Садовников, А. Л. Карякин, Х. Б. Юнусов; Уральский гос. горный ун-т. - Екатеринбург: УГГУ, 2018. - 31 с.



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

***МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ  
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ***

**ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА**

Направление подготовки

***13.03.02 Электроэнергетика и электротехника***

Профиль

***Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий***

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА .....	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ .....	4
Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса .....	4
Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам .....	5
Подготовка и написание контрольной работы .....	6
Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта) .....	7
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ .....	8
Подготовка к зачёту .....	8
Подготовка к экзамену .....	8

## ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* – это разнообразные виды деятельности студентов, осуществляемые под руководством, но без непосредственного участия преподавателя в аудиторное и/или внеаудиторное время.

Это особая форма обучения по заданиям преподавателя, выполнение которых требует активной мыслительной, поисково-исследовательской и аналитической деятельности.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет деятельностный подход, когда цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, то есть на реальные ситуации, где студентам надо проявить знание конкретной дисциплины, использовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Цель самостоятельной работы – закрепление знаний, полученных на аудиторных занятиях, формирование способности принимать на себя ответственность, решать проблему, находить конструктивные выходы из сложных ситуаций, развивать творческие способности, приобретение навыка организовывать своё время

Кроме того самостоятельная работа направлена на обучение студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свой профессиональный уровень.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирование практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитие исследовательских умений;
- получение навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

## **ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА**

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

В соответствии с реализацией рабочей программы дисциплины в рамках самостоятельной работы студенту необходимо выполнить следующие виды работ:

*для подготовки ко всем видам текущего контроля:*

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение курса;
- подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам;
- подготовка к контрольной работе, написание контрольной работы;
- выполнение и написание курсовой работы (проекта);

*для подготовки ко всем видам промежуточной аттестации:*

- подготовка к зачёту;
- подготовка к экзамену.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов как online, так и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита контрольных и курсовых работ (проектов), защита зачётных работ в виде доклада с презентацией и др.

Текущий контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

Промежуточный контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного для сдачи экзамена / зачёта.

В методических указаниях по каждому виду контроля представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

### **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ**

#### **Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса**

Лекционный материал по дисциплине излагается в виде устных лекций преподавателя во время аудиторных занятий. Самостоятельная работа студента во время лекционных аудиторных занятий заключается в ведении записей (конспекта лекций).

Конспект лекций, выполняемый во время аудиторных занятий, дополняется студентом при самостоятельном внеаудиторном изучении некоторых тем курса. Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка основной и дополнительной литературы к дисциплине.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины приведён в рабочей программе дисциплины.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на повторение материала лекций и самостоятельное изучение тем курса:

*для овладения знаниями:*

- конспектирование текста;
- чтение основной и дополнительной литературы;
- составление плана текста;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- повторная работа над учебным материалом;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- изучение нормативных материалов;
- составление плана и тезисов ответа на вопросы для самопроверки;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Вопросы для самопроверки приведены учебной литературе по дисциплине или могут быть предложены преподавателем на лекционных аудиторных занятиях после изучения каждой темы.

### **Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам**

*Практические занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования, выполняются доклады с презентацией по определенным учебно-практическим, учебно-исследовательским или научным темам с последующим их обсуждением.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;

- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

*Лабораторные занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов навыков работы с использованием лабораторного оборудования, планирования и выполнения экспериментов, оформления отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к лабораторным занятиям:

*для овладения знаниями:*

- изучение методик работы с использованием различных видов и типов лабораторного оборудования;
- изучение правил безопасной эксплуатации лабораторного оборудования;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана проведения эксперимента;
- составление отчётной документации по результатам экспериментирования;
- аналитическая обработка результатов экспериментов.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

### **Подготовка и написание контрольной работы**

*Контрольная работа* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся. Контрольная работа является средством проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к контрольной работе:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению контрольной работы.

Контрольная работа может быть выполнена в виде доклада с презентацией.

*Доклад с презентацией* – это публичное выступление по представлению полученных результатов знаний по определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной теме.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления;
- осуществить сбор материала к выступлению;
- организовать работу с источниками;
- во время изучения источников следует записывать вопросы, возникающие по мере ознакомления, ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- сформулировать возможные вопросы по теме доклада, подготовить тезисы ответов на них;
- обработать материал и представить его в виде законченного доклада и презентации.

При выполнении контрольной работы в виде доклада с презентацией самостоятельная работа студента включает в себя:

*для овладения знаниями:*

- чтение основное и дополнительной литературы по заданной теме доклада;
- составление плана доклада;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей по теме доклада

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана и тезисов презентации по теме доклада;
- составление презентации;
- составление библиографического списка по теме доклада;
- подготовка к публичному выступлению;
- составление возможных вопросов по теме доклада и ответов на них.

*для формирования навыков и умений:*

- публичное выступление;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Варианты контрольных работ и темы докладов приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

### **Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта)**

*Курсовая работа (проект)* – форма контроля для демонстрации обучающимся умений работать с объектами изучения, критическими источниками, справочной и энциклопедической литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать и строить априорную модель изучаемого объекта или процесса, создавать содержательную презентацию выполненной работы.

При выполнении и защите курсовой работы (проекта) оценивается умение самостоятельной работы с объектами изучения, справочной литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать выбранную технологическую схему и принятый тип и количество оборудования, создавать содержательную презентацию выполненной работы (пояснительную записку и графический материал).

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к курсовой работе (проекту):

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- составление плана выполнения курсовой работы (проекта);
- составление списка использованных источников.

для закрепления и систематизации знаний:

- работа учебно-методическими материалами по выполнению курсовой работы (проекта);
- изучение основных методик расчёта технологических схем, выбора и расчёта оборудования;
- подготовка тезисов ответов на вопросы по тематике курсовой работы (проекта).

для формирования навыков и умений:

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, компоновочных чертежей;
- оформление текстовой и графической документации.

Тематика курсовых работ (проектов) приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

### **Подготовка к зачёту**

Зачёт по дисциплине может быть проведён в виде теста или включать в себя защиту контрольной работы (доклад с презентацией).

*Тест* – это система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.

При самостоятельной подготовке к зачёту, проводимому в виде теста, студенту необходимо:

- проработать информационный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора дополнительной учебной литературы;
- выяснить условия проведения теста: количество вопросов в тесте, продолжительность выполнения теста, систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с тестом, нужно внимательно и до конца прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов, выбрать правильные (их может быть несколько), на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам.

В процессе выполнения теста рекомендуется применять несколько подходов в решении заданий. Такая стратегия позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант. Не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, а сразу переходить к другим тестовым заданиям, к трудному вопросу можно обратиться в конце. Необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Зачёт также может проходить в виде защиты контрольной работы (доклад с презентацией). Методические рекомендации по подготовке и выполнению доклада с презентацией приведены в п. «Подготовка и написание контрольной работы».

### **Подготовка к экзамену**

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в форме экзамена.

Билет на экзамен включает в себя теоретические вопросы и практико-ориентированные задания.

*Теоретический вопрос* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность



одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся.

*Практико-ориентированное задание* – средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по определенной теме.

При самостоятельной подготовке к экзамену студенту необходимо:

- получить перечень теоретических вопросов к экзамену;
- проработать пройденный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине, при необходимости изучить дополнительные источники;
- составить планы и тезисы ответов на вопросы;
- проработать все типы практико-ориентированных заданий;
- составить алгоритм решения основных типов задач;
- выяснить условия проведения экзамена: количество теоретических вопросов и практико-ориентированных заданий в экзаменационном билете, продолжительность и форму проведения экзамена (устный или письменный), систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с экзаменационным билетом, нужно внимательно прочитать теоретические вопросы и условия практико-ориентированного задания;
- при условии проведения устного экзамена составить план и тезисы ответов на теоретические вопросы, кратко изложить ход решения практико-ориентированного задания;
- при условии проведения письменного экзамена дать полные письменные ответы на теоретические вопросы; изложить ход решения практико-ориентированного задания с численным расчётом искомых величин.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

***МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ  
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ***

**МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ**

Направление подготовки

***13.03.02 Электроэнергетика и электротехника***

Профиль

***Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий***

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА .....	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ .....	4
Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса .....	4
Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам .....	5
Подготовка и написание контрольной работы .....	6
Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта) .....	7
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ .....	8
Подготовка к зачёту .....	8
Подготовка к экзамену .....	8

## ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* – это разнообразные виды деятельности студентов, осуществляемые под руководством, но без непосредственного участия преподавателя в аудиторное и/или внеаудиторное время.

Это особая форма обучения по заданиям преподавателя, выполнение которых требует активной мыслительной, поисково-исследовательской и аналитической деятельности.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет деятельностный подход, когда цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, то есть на реальные ситуации, где студентам надо проявить знание конкретной дисциплины, использовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Цель самостоятельной работы – закрепление знаний, полученных на аудиторных занятиях, формирование способности принимать на себя ответственность, решать проблему, находить конструктивные выходы из сложных ситуаций, развивать творческие способности, приобретение навыка организовывать своё время

Кроме того самостоятельная работа направлена на обучение студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свой профессиональный уровень.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирование практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитие исследовательских умений;
- получение навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

## **ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА**

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

В соответствии с реализацией рабочей программы дисциплины в рамках самостоятельной работы студенту необходимо выполнить следующие виды работ:

*для подготовки ко всем видам текущего контроля:*

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение курса;
- подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам;
- подготовка к контрольной работе, написание контрольной работы;
- выполнение и написание курсовой работы (проекта);

*для подготовки ко всем видам промежуточной аттестации:*

- подготовка к зачёту;
- подготовка к экзамену.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов как online, так и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита контрольных и курсовых работ (проектов), защита зачётных работ в виде доклада с презентацией и др.

Текущий контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

Промежуточный контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного для сдачи экзамена / зачёта.

В методических указаниях по каждому виду контроля представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

### **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ**

#### **Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса**

Лекционный материал по дисциплине излагается в виде устных лекций преподавателя во время аудиторных занятий. Самостоятельная работа студента во время лекционных аудиторных занятий заключается в ведении записей (конспекта лекций).

Конспект лекций, выполняемый во время аудиторных занятий, дополняется студентом при самостоятельном внеаудиторном изучении некоторых тем курса. Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка основной и дополнительной литературы к дисциплине.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины приведён в рабочей программе дисциплины.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на повторение материала лекций и самостоятельное изучение тем курса:

*для овладения знаниями:*

- конспектирование текста;
- чтение основной и дополнительной литературы;
- составление плана текста;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- повторная работа над учебным материалом;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- изучение нормативных материалов;
- составление плана и тезисов ответа на вопросы для самопроверки;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Вопросы для самопроверки приведены учебной литературе по дисциплине или могут быть предложены преподавателем на лекционных аудиторных занятиях после изучения каждой темы.

### **Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам**

*Практические занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования, выполняются доклады с презентацией по определенным учебно-практическим, учебно-исследовательским или научным темам с последующим их обсуждением.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;

- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

*Лабораторные занятия* по дисциплине выступают средством формирования у студентов навыков работы с использованием лабораторного оборудования, планирования и выполнения экспериментов, оформления отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к лабораторным занятиям:

*для овладения знаниями:*

- изучение методик работы с использованием различных видов и типов лабораторного оборудования;
- изучение правил безопасной эксплуатации лабораторного оборудования;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана проведения эксперимента;
- составление отчётной документации по результатам экспериментирования;
- аналитическая обработка результатов экспериментов.

*для формирования навыков и умений:*

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

### **Подготовка и написание контрольной работы**

*Контрольная работа* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся. Контрольная работа является средством проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к контрольной работе:

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

*для закрепления и систематизации знаний:*

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки.

*для формирования навыков и умений:*

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению контрольной работы.

Контрольная работа может быть выполнена в виде доклада с презентацией.

*Доклад с презентацией* – это публичное выступление по представлению полученных результатов знаний по определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной теме.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления;
- осуществить сбор материала к выступлению;
- организовать работу с источниками;
- во время изучения источников следует записывать вопросы, возникающие по мере ознакомления, ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- сформулировать возможные вопросы по теме доклада, подготовить тезисы ответов на них;
- обработать материал и представить его в виде законченного доклада и презентации.

При выполнении контрольной работы в виде доклада с презентацией самостоятельная работа студента включает в себя:

*для овладения знаниями:*

- чтение основное и дополнительной литературы по заданной теме доклада;
- составление плана доклада;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей по теме доклада

*для закрепления и систематизации знаний:*

- составление плана и тезисов презентации по теме доклада;
- составление презентации;
- составление библиографического списка по теме доклада;
- подготовка к публичному выступлению;
- составление возможных вопросов по теме доклада и ответов на них.

*для формирования навыков и умений:*

- публичное выступление;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Варианты контрольных работ и темы докладов приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

### **Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта)**

*Курсовая работа (проект)* – форма контроля для демонстрации обучающимся умений работать с объектами изучения, критическими источниками, справочной и энциклопедической литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать и строить априорную модель изучаемого объекта или процесса, создавать содержательную презентацию выполненной работы.

При выполнении и защите курсовой работы (проекта) оценивается умение самостоятельной работы с объектами изучения, справочной литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать выбранную технологическую схему и принятый тип и количество оборудования, создавать содержательную презентацию выполненной работы (пояснительную записку и графический материал).

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к курсовой работе (проекту):

*для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- составление плана выполнения курсовой работы (проекта);
- составление списка использованных источников.



для закрепления и систематизации знаний:

- работа учебно-методическими материалами по выполнению курсовой работы (проекта);
- изучение основных методик расчёта технологических схем, выбора и расчёта оборудования;
- подготовка тезисов ответов на вопросы по тематике курсовой работы (проекта).

для формирования навыков и умений:

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, компоновочных чертежей;
- оформление текстовой и графической документации.

Тематика курсовых работ (проектов) приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

### **Подготовка к зачёту**

Зачёт по дисциплине может быть проведён в виде теста или включать в себя защиту контрольной работы (доклад с презентацией).

*Тест* – это система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.

При самостоятельной подготовке к зачёту, проводимому в виде теста, студенту необходимо:

- проработать информационный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора дополнительной учебной литературы;
- выяснить условия проведения теста: количество вопросов в тесте, продолжительность выполнения теста, систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с тестом, нужно внимательно и до конца прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов, выбрать правильные (их может быть несколько), на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам.

В процессе выполнения теста рекомендуется применять несколько подходов в решении заданий. Такая стратегия позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант. Не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, а сразу переходить к другим тестовым заданиям, к трудному вопросу можно обратиться в конце. Необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Зачёт также может проходить в виде защиты контрольной работы (доклад с презентацией). Методические рекомендации по подготовке и выполнению доклада с презентацией приведены в п. «Подготовка и написание контрольной работы».

### **Подготовка к экзамену**

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в форме экзамена.

Билет на экзамен включает в себя теоретические вопросы и практико-ориентированные задания.

*Теоретический вопрос* – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность

одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся.

*Практико-ориентированное задание* – средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по определенной теме.

При самостоятельной подготовке к экзамену студенту необходимо:

- получить перечень теоретических вопросов к экзамену;
- проработать пройденный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине, при необходимости изучить дополнительные источники;
- составить планы и тезисы ответов на вопросы;
- проработать все типы практико-ориентированных заданий;
- составить алгоритм решения основных типов задач;
- выяснить условия проведения экзамена: количество теоретических вопросов и практико-ориентированных заданий в экзаменационном билете, продолжительность и форму проведения экзамена (устный или письменный), систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с экзаменационным билетом, нужно внимательно прочитать теоретические вопросы и условия практико-ориентированного задания;
- при условии проведения устного экзамена составить план и тезисы ответов на теоретические вопросы, кратко изложить ход решения практико-ориентированного задания;
- при условии проведения письменного экзамена дать полные письменные ответы на теоретические вопросы; изложить ход решения практико-ориентированного задания с численным расчётом искомых величин.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебно-методическому  
комплексу \_\_\_\_\_ С.А.Упоров

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ  
РАБОТЕ СТУДЕНТОВ**

**Б1.О.ДВ.01.02 КОММУНИКАТИВНАЯ КУЛЬТУРА ЛИЧНОСТИ**

Направление подготовки

**13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**

Профиль

**Электротехнические комплексы и системы горных  
и промышленных предприятий**

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2022

Автор: Гладкова И. В., доцент, канд. филос. н.

Одобрена на заседании кафедры

Философии и культурологии

(название кафедры)

Зав. кафедрой

(подпись)

Беляев В. П.

(Фамилия И.О.)

Протокол №1 от 01.09.2021

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией

Горно-механического факультета

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Осипов П. А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по работе с текстом лекций	5
2	Методические рекомендации по подготовке к опросу	8
3	Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)	9
4	Методические рекомендации по написанию эссе	11
5	Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям	14
6	Методические рекомендации по подготовке к дискуссии	15
7	Методические рекомендации по написанию реферата	17
8	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	19
	Заключение	21
	Список использованных источников	22

## ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

**Самостоятельная работа студента (СРС)** - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

**Самостоятельная работа студента** - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;

- освоение информации и ее логическая переработка;
- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблеме;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельной работе, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

## 1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить опiski, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тестов по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.



## 2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

### *Письменный опрос*

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

### *Устный опрос*

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии<sup>1</sup>.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: [http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii\\_dlya\\_studentov\\_21.pdf](http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf)

<sup>2</sup> Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: [http://priab.ru/images/metod\\_agro/Metod\\_Inostran\\_yazyk\\_35.03.04\\_Agro\\_15.01.2016.pdf](http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf)

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем времени на подготовку к устному опросу зависит от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

### 3. Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

*Доклад должен соответствовать следующим требованиям:*

- тема доклада должна быть согласована с преподавателем и соответствовать теме занятия;
- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;
- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны соответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;
- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)
2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.
3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

#### ***Общая структура доклада***

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

#### ***Вступление.***

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;

- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

**Основная часть.**

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки) Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

**Заключение.**

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

<i>Критерии оценки доклада, сообщения</i>	<i>Количество баллов</i>
Содержательность, информационная насыщенность доклада	1
Наличие аргументов	1
Наличие выводов	1
Наличие презентации доклада	1
Владение профессиональной лексикой	1
Итого:	5

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов

#### 4. Методические рекомендации по написанию эссе

*Эссе* - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

##### *Структура эссе*

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);
2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершенно необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

#### ***Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе***

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

*Тезис* - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

#### ***Требования к фактическим данным и другим источникам***

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедиться в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

### ***Как подготовить и написать эссе?***

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

*Планирование* - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

*Цель* должна определять действия.

*Идеи*, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

*Аналогии* - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

*Ассоциации* - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

*Предположения* - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

*Рассуждения* - формулировка и доказательство мнений.

*Аргументация* - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

*Суждение* - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

*Доводы* - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники*. Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

*Качество текста* складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

*Мысль* - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

*Внятность* - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

*Грамотность* отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

*Корректность* — это стиль написанного. Стиль определяется жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

## 5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогов обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.



## 6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия*, где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

*Дискуссия* (от лат. discussio - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

*Дискуссия* обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обусловливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

*Дискуссия- диалог* чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

*Дискуссия - спор* используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,
- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;
- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;
- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;
- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

**Подготовка студентов к дискуссии:** если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

**В проведении дискуссии** выделяется несколько этапов.

**Этап 1-й, введение в дискуссию:** формулирование проблемы и целей дискуссии; определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

**Этап 2-й, обсуждение проблемы:** обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

**Этап 3-й, подведение итогов обсуждения:** выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

## 7. Методические рекомендации по написанию реферата

Слово "реферат" (от латинского – *referre* – докладывать, сообщать) означает сжатое изложение в устной или письменной форме содержания какого-либо вопроса или темы на основе критического обзора информации.

Написание реферата - вид самостоятельной работы студента, содержащий информацию, дополняющую и развивающую основную тему, изучаемую на аудиторных занятиях. Реферат может включать обзор нескольких источников и служить основой для доклада на семинарах, конференциях.

При подготовке реферата необходимо соблюдать следующие правила.

Ясно и четко сформулировать цель и задачи реферата, отражающие тему или решение проблемы.

Найти литературу по выбранной теме; составить перечень источников, обязательных к прочтению.

Только после предварительной подготовки следует приступать к написанию реферата. Прежде всего, составить план, выделить в нем части.

*Введение.* В этом разделе раскрывается цель и задачи работы; здесь необходимо сформулировать проблему, которая будет проанализирована в реферате, изложить своё отношение к ней, то есть мотивацию выбора; определить особенность постановки данной проблемы авторами изученной литературы; объяснить актуальность и социальную значимость выбранной темы.

*Основная часть.* Разделы, главы, параграфы основной части должны быть направлены на рассмотрение узловых моментов в теме реферата. Изложение содержания изученной литературы предполагает его критическое осмысление, глубокий логический анализ.

Каждый раздел основной части реферата предполагает детальное изучение отдельного вопроса темы и последовательное изложение структуры текстового материала с обязательными ссылками на первоисточник. В целом, содержание основной части должно отражать позиции отдельных авторов, сравнительную характеристику этих позиций, выделение узловых вопросов дискурса по выбранной для исследования теме.

*Заключение.* В заключении автор реферата должен сформулировать личную позицию в отношении изученной проблемы и предложить, может быть, свои способы её решения. Целесообразно сделать общие выводы по теме реферата и ещё раз отметить её актуальность и социальную значимость.

*Список использованных источников и литературы.*

Написание рефератов является одной из форм обучения студентов, направленной на организацию и повышение уровня самостоятельной работы, а также на усиление контроля за этой работой.

В отличие от теоретических семинаров, при проведении которых приобретаются, в частности, навыки высказывания своих суждений и изложения мнений других авторов в устной форме, написание рефератов формирует навыки изложения своих мыслей в письменной форме грамотным языком, хорошим стилем.

В зависимости от содержания и назначения в учебном процессе рефераты можно подразделить на два основных типа: научно-проблемные и обзорно-информационные.

*Научно-проблемный реферат.* При написании такого реферата следует изучить и кратко изложить имеющиеся в литературе суждения по определенному, спорному в теории, вопросу (проблеме) по данной теме, высказать по этому вопросу (проблеме) собственную точку зрения с соответствующим ее обоснованием.

*Обзорно-информационный реферат.* Разновидностями такого реферата могут быть следующие:

1) краткое изложение основных положений той или иной книги, монографии, содержащих материалы, относящиеся к изучаемой теме по курсу дисциплины;

2) подбор и краткое изложение содержания статей по определенной проблеме (теме, вопросу), опубликованных в различных журналах за определенный период, либо в сборниках («научных трудах», «ученых записках» и т.д.).

Темы рефератов определяются преподавателем. Литература либо рекомендуется преподавателем, либо подбирается аспирантами самостоятельно, что является одним из элементов самостоятельной работы.

Объем реферата должен быть в пределах 15 страниц машинописного текста через 1,5 интервала. При оформлении реферата необходимо ориентироваться на правила и установленные стандарты для учебных и научных работ.

Реферат сдается в указанные преподавателем сроки.

Критерии оценивания:

- достижение поставленной цели и задач исследования (новизна и актуальность поставленных в реферате проблем, правильность формулирования цели, определения задач исследования, правильность выбора методов решения задач и реализации цели; соответствие выводов решаемым задачам, поставленной цели, убедительность выводов);

- уровень эрудированности автора по изученной теме (знание автором состояния изучаемой проблематики, цитирование источников, степень использования в работе результатов исследований);

- личные заслуги автора реферата (новые знания, которые получены помимо основной образовательной программы, новизна материала и рассмотренной проблемы, научное значение исследуемого вопроса);

- культура письменного изложения материала (логичность подачи материала, грамотность автора);

- культура оформления материалов работы (соответствие реферата всем стандартным требованиям);

- знания и умения на уровне требований стандарта данной дисциплины: знание фактического материала, усвоение общих понятий и идей;

- степень обоснованности аргументов и обобщений (полнота, глубина, всестороннее раскрытие темы, корректность аргументации и системы доказательств, характер и достоверность примеров, иллюстративного материала, наличие знаний интегрированного характера, способность к обобщению);

- качество и ценность полученных результатов (степень завершенности реферативного исследования, спорность или однозначность выводов);

- корректное использование литературных источников, грамотное оформление ссылок.

## **8. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов**

**Экзамен** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы (проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неувоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадет на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие

вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неусттомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и,

следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

- 1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;
- 2) добросовестное выполнение заданий;
- 3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;
- 4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;
- 5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;
- 6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;
- 7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html>
2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml>
3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебно-методическому  
комплексу \_\_\_\_\_ С.А.Упоров

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

### ФТД.01 ТЕХНОЛОГИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ТРУДА

Направление подготовки

**13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**

Направленность (профиль)

**Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий**

Одобрена на заседании кафедры

Управления персоналом

(название кафедры)

Зав. кафедрой

Ветош

(подпись)

Ветошкина Т.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 16.09.2021

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией  
факультета

Горно-механического факультета

(название факультета)

Председатель

Осипов

(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий	5
2 Методические указания по подготовке к опросу	9
3 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям	11
4 Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям	13
5 Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	14
Заключение	17
Список использованных источников	18

## ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);

- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

## 1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

*Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций.* Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации<sup>1</sup>. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированным заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированными заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированными заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированному заданию и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированным заданием.

---

<sup>1</sup> Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html/>

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливаются заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один-два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

*Дискуссия* занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

*Метод «мозговой атаки»* или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;



- время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

**Презентация**, или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода *case-study*. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффективна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповой и индивидуальной. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного анализа (правильность предложений, подготовленность, аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющих в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

## 2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

### *Письменный опрос*

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучать лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

### *Устный опрос*

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии<sup>2</sup>.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременности и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

---

<sup>2</sup>Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: [http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii\\_dlya\\_studentov\\_21.pdf](http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf)

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)<sup>3</sup>.

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

### **3. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям**

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для

---

<sup>3</sup>Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]:  
[http://priab.ru/images/metod\\_agro/Metod\\_Inostran\\_yazyk\\_35.03.04\\_Agro\\_15.01.2016.pdf](http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf)

будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помочь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.



#### 4. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

## 5. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

*Экзамен* - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы (проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неувоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на



то, что это не попадет на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала, кратко записав это на листе бумаги, создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неустойчивый физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее и ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать,

подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

- 1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;
- 2) добросовестное выполнение заданий;
- 3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;
- 4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;
- 5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;
- 6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам;
- 7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368с.
2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально-ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html>
3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml>
4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности: Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.
5. Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: [http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii\\_dlya\\_studentov\\_21.pdf](http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому комплексу С.А.Упоров

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

### ФТД.02 СРЕДСТВА КОММУНИКАЦИИ В УЧЕБНОЙ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Направление подготовки

*13.03.02 Электроэнергетика и электротехника*

Направленность (профиль)

*Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий*

Одобрена на заседании кафедры

*Управления персоналом*

*(название кафедры)*

Зав. кафедрой

*Ветош*

*(подпись)*

Ветошкина Т.А.

*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 1 от 16.09.2021

*(Дата)*

Рассмотрена методической комиссией факультета

Горно-механического факультета

*(название факультета)*

Председатель

*Осипов*

*(подпись)*

Осипов П.А.

*(Фамилия И.О.)*

Протокол № 2 от 12.10.2021

*(Дата)*

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий	5
2 Методические указания по подготовке к опросу	9
3 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям	11
4 Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям	13
5 Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	14
Заключение	17
Список использованных источников	18

## ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);

- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.



## 1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

**Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций.** Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации<sup>1</sup>. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированным заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированными заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированными заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированному заданию и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированным заданием.

---

<sup>1</sup> Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html/>

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливаются заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один-два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

*Дискуссия* занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

*Метод «мозговой атаки»* или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

- время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

**Презентация**, или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода *case-study*. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффективна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповой и индивидуальной. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного анализа (правильность предложений, подготовленность, аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющих в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

## 2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

### *Письменный опрос*

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучать лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

### *Устный опрос*

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии<sup>2</sup>.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременности и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

---

<sup>2</sup>Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: [http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii\\_dlya\\_studentov\\_21.pdf](http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf)

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)<sup>3</sup>.

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

### **3.Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям**

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для

---

<sup>3</sup>Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]:  
[http://priab.ru/images/metod\\_agro/Metod\\_Inostran\\_yazyk\\_35.03.04\\_Agro\\_15.01.2016.pdf](http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf)

будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помочь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.





#### 4. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

## 5. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

**Экзамен** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы (проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неувоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на

то, что это не попадет на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала, кратко записав это на листе бумаги, создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неустойчивый физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее и ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или в учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать,

подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

- 1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;
- 2) добросовестное выполнение заданий;
- 3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;
- 4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;
- 5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;
- 6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам;
- 7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368с.
2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально-ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html>
3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml>
4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности: Учеб.пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.
5. Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: [http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii\\_dlya\\_studentov\\_21.pdf](http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf)



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебно-методическому комплексу  
С.А.Упоров

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

### **ФТД.03 ОСНОВЫ СОЦИАЛЬНОЙ АДАПТАЦИИ И ПРАВОВЫХ ЗНАНИЙ**

Направление подготовки

***13.03.02 Электроэнергетика и электротехника***

Направленность (профиль)

***Электротехнические комплексы и системы горных и промышленных предприятий***

Одобрена на заседании кафедры

*Управления персоналом*

(название кафедры)

Зав. кафедрой Ветош  
(подпись)

Ветошкина Т.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 16.09.2021

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией  
факультета

*Горно-механического факультета*

(название факультета)

Председатель Осипов  
(подпись)

Осипов П.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 12.10.2021

(Дата)

Екатеринбург

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий	5
2 Методические указания по подготовке к опросу	9
3 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям	11
4 Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям	13
5 Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	14
Заключение	17
Список использованных источников	18



## ВВЕДЕНИЕ

*Самостоятельная работа студентов* может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

*Аудиторная самостоятельная работа* по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

*Внеаудиторная самостоятельная работа* - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);

- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

## 1. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

**Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций.** Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации<sup>1</sup>. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

---

<sup>1</sup> Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html/>

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливаются заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель может занимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один-два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

*Дискуссия* занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

*Метод «мозговой атаки»* или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность, отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

- время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

**Презентация**, или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода *case-study*. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффективна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповой и индивидуальной. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного анализа (правильность предложений, подготовленность, аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющих в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

## 2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

### *Письменный опрос*

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучать лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

### *Устный опрос*

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии<sup>2</sup>.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременности и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

---

<sup>2</sup>Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: [http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii\\_dlya\\_studentov\\_21.pdf](http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf)

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)<sup>3</sup>.

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

---

<sup>3</sup>Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]:  
[http://priab.ru/images/metod\\_agro/Metod\\_Inostran\\_yazyk\\_35.03.04\\_Agro\\_15.01.2016.pdf](http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf)



### 3. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для будущих специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помочь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем – самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;

- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

#### 4. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

## 5. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

**Экзамен** - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным, выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы (проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неувоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на

то, что это не попадет на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала, кратко записав это на листе бумаги, создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неустрашающий физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее и ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или в учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать,

подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

- 1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;
- 2) добросовестное выполнение заданий;
- 3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;
- 4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;
- 5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;
- 6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам;
- 7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368с.
2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально-ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html>
3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml>
4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности: Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.
5. Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: [http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii\\_dlya\\_studentov\\_21.pdf](http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf)